PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. II - N°1 Pgs. 41-56 Lima – Perú Ag. 1999

SOLUCIÓN GLOBAL PARA UNA CLASE DE ECUACIONES ABSTRACTAS DEGENERADAS ASOCIADA A LA ECUACIÓN NO-LINEAL DE LA VIGA

Raúl Izaguirre Maguiña[1]
Eugenio Cabanillas Lapa[2]

RESUMEN

En este trabajo estudiamos la existencia y unicidad de solución débil para el problema abstracto:

$$\begin{aligned} & u''(t) + A^{\varepsilon}u(t) + M\left(\left|A^{\alpha}u \quad t\right|^{2}\right) A^{\beta} \; u(t) = f(t) \\ & u(0) = u_o \quad ; \quad u'(0) = u_1 \end{aligned} \qquad (*)$$

El operador lineal A, está definido por la terna $\{H, V, a(u,v)\}$, donde H, V, son espacios de Hilbert, la inmersión de V en H es densa y compac*ta*. La forma bilineal a es no-negativa , la función no – lineal M(s) es a valores reales, acotada inferiormente, es decir existe $\sigma \in \mathbf{R}$ tal que:

$$M(s) \geq -\sigma, \ \forall \ s \geq 0, \quad \sigma \in \mathbf{R}$$

Los exponentes, α, β, ε , son números reales no negativos, cumpliendo ciertas condiciones. La ecuación (*) contiene (entre otros) la ecuación no-lineal de la viga.

1. Introducción

Sea Ω un abierto de R^n con frontera regular; Q el cilindro Ω x $]0,T[$, $0 < T < \infty$,con frontera lateral Σ . La siguiente ecuación diferencial parcial no-lineal.

$$\begin{aligned} & u_{tt} + \Delta^2 u + M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)(-\Delta u) = f && en \ \ Q \\ & u = 0 && en \ \ \Sigma \\ & u(0) = u_0 \ \ ; \ \ u_t(0) = u_1 && en \ \ \Omega \end{aligned} \qquad (1)$$

---

1 Universidad Nacional del Callao
2 Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Es un modelo n-dimensional de la ecuación que describe las vibraciones no-lineales de una viga de extensión finita , que para dimensión n = 1 tienen la forma (ver [16]);

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{EI\partial^4 u}{\xi\,\partial x^4}-\left(\frac{H}{\xi}+\frac{EA}{2\xi L}\int_0^L\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad (2)$$

donde E es el módulo de Young del material, I el momento de inercia, ξ representa la densidad y A el área de la sección recta.

Asimismo la ecuación (1) desde el punto de vista de los métodos abstractos en espacios de Hilbert, puede ser considerada como un caso particular de:

$$\begin{aligned} &u''(t) + A^{\varepsilon} u(t) + M\left(\left|A^{\alpha} u(t)\right|^2\right) A^{\beta} \ u(t) = f(t) \\ &u(0) = u_0 \ ; \ u'(0) = u_1 \end{aligned} \qquad (3)$$

Donde A es un operador autoadjunto, no acotado y positivo, definido por la terna $\{H, V, ((,))\}$, donde *H, V,* son espacios de Hilbert, la inmersión de *V* en *H* es densa y compacta; variantes de la ecuación abstracta (3), son por ejemplo:

$$u'' + M\left(\left|A^{1/2}u\right|^2\right)Au + A^{\alpha}u' = f \qquad (4)$$

$$K(x,t)u'' + Au' + M\left(\left|A^{1/2}u\right|^2\right)Au = f \qquad (5)$$

$$Ku'' + A^2\, u + M\left(\left|A^{1/2}u\right|^2\right)Au + u' = f \qquad (6)$$

La Ecuación (4), es estudiada entre otros por L. Medeiros-M. Milla [12], quienes prueban la existencia de soluciones globales para M (s) ≥ $m_0 > 0$, A un operador estrictamente positivo y $\alpha \in [0,1]$. El caso degenerado para la ecuación (4) es tratado por M. Aassila en [2] donde se obtiene existencia y unicidad de solución global considerando que M(s) ≥ 0 y que el operador A es no-negativo, α =1. Solución global para ecuaciones del tipo (5), son estudiadas por ejemplo en D. Pereira-R. Izaguirre [6], que obtienen solución global única, y donde la función *K(x,t)* ≥ 0. En [14] Pereira D. y en [13] Muñoz J. estudian la existencia, unicidad y decaimiento de la energía para la ecuación (6).

Estudios sobre modelos en ecuaciones hiperbólicas no-lineales que incluyen el operador de Kirchhoff-Carrier son por ejemplo los presentados en [3] Cousin-Larkin-Frota –Medeiros y en [8], Izaguirre-Veliz que tratan ecuaciones de la forma:

$$u''(t) + M\left(\left|A^{\alpha} u(t)\right|^2\right) A^{\beta}\, u(t) = f(t) \qquad (7)$$

donde la función no-lineal M es de clase C^1 y estrictamente positiva.. En [3], se obtiene soluciones globales con datos analíticos "suficientemente pequeños" . En [8], se obtiene solución local, pero en una clase mayor de datos iniciales.

El caso degenerado de la ecuación (7) es tratado en la referencia [7], donde se determina la existencia y unicidad de solución local débil.

2. Caso No Degenerado. Sean $(V, ((\ ,\ )))$, $(H, (\ ,\ ))$ espacios de Hilbert, la inmersión de V en H densa y compacta. Sea también A el operador definido por la terna $\{V, H; ((\ ,\ ))\}$.

Entonces, $D(A)$ es un subespacio denso en H, A es un operador no-acotado auto-adjunto y positivo de H ,con espectro discreto;

$$Aw_\nu = \lambda_\nu w_\nu \quad \forall \nu = 1,2...... ;\lambda_\nu \to \infty \ cuando \ \nu \to \infty$$

$\{ w_\nu \}$ es un sistema ortonormal completo de H de modo que:

$$D(A) = \left\{ u \in H; \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^2 \left|(u, w_\nu)\right|^2 \prec \infty \right\}$$

$$Au = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (u, w_\nu) w_\nu ; \forall u \in D(A)$$

Asimismo para todo $\alpha \in \mathbf{R}$, el operador A^α está bien definido

$$D(A^\alpha) = \left\{ u \in H; \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{2\alpha} \left|(u, w_\nu)\right|^2 \prec \infty \right\}$$

$$A^\alpha u = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^\alpha (u, w_\nu) w_\nu ; \forall u \in D(A)$$

Definiendo:

$$|u|_{D(\alpha)}^2 = |u|_\alpha^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{2\alpha} \left|(u, w_\nu)\right|^2 \ ; \quad u \in D(A^\alpha) \tag{8}$$

se tiene que

- $(D(A^\alpha) , |\,.\,|_\alpha)$ es un espacio de Hilbert.
- Si $\alpha > \beta$, $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$ y la inmersión de $D(A^\alpha)$ en $\subset D(A^\beta)$ es compacta.

La función (no – lineal) M satisface las siguientes condiciones:

H-1 $M \in C^1([0,\infty))$, $M(s) \geq -\sigma$, $\sigma \in \mathbf{R}$.

Teorema 1. Sean α,β,ε números reales no-negativos tales que:

1. $0 \leq 4\alpha < 2\beta \leq \varepsilon$.
2. $u_0 \in D(A^{\varepsilon/2})$
3. $u_1 \in H$
4. $f \in L^2(0,T;H)$

Entonces existe una función vectorial u: $[0,T] \to D(A^{\alpha+(\varepsilon-\beta)/2})$, tal que :

5. $u \in L^\infty\left(0,T;D\left(A^{\varepsilon/2}\right)\right)$
6. $u' \in L^\infty(0,T;H)$
7. $u'' \in L^\infty\left(0,T;D\left(A^{\alpha-(\varepsilon-\beta)/2}\right)\right)$
8. $\dfrac{d}{dt}(u'(t),v)+\left(A^{\varepsilon/2}u(t),A^{\varepsilon/2}v\right)+M\left(\left|A^\alpha u(t)\right|^2\right)\left(A^{\beta/2}u(t),A^{\beta/2}v\right)=(f(t),v)$

   $\forall\, v \in L^2\left(0,T;D\left(A^{\beta/2}\right)\right)$

Demostración. Sea $V_m = [w_1, \ldots\ldots w_m]$, el subespacio generado por los primeros m vectores propios del operador A . Luego V_m es un subespacio de V de dimensión finita m, e invariante bajo la acción del operador A^δ, $\forall\, \delta \in \mathbf{R}$, es decir $A^\delta(V_m) \subset V_m$.

Sea tambien:

$$u_m(t)=\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\,w_i \in V_m \tag{9}$$

donde las funciones g_{im} , son determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no - lineales :

$$\left(u_m''(t),w_j\right)+\left(A^\varepsilon u_m(t),w_j\right)+M\left(\left|A^\alpha u_m(t)\right|^2\right)\left(A^\beta u_m(t),w_j\right)=\left(f(t),w_j\right) \tag{10}$$

$$j=1,2,\cdots,m$$

$$u_m(0)=u_{0m}\to u_0 \qquad en \qquad D\left(A^{\varepsilon/2}\right) \tag{11}$$

$$u_m'(0)=u_{1m}\to u_1 \qquad en \qquad H \tag{12}$$

Este sistema, luego de un análisis y aplicación del Teorema de Caratheodory sobre existencia local de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias no–lineales, admite solución en un intervalo [0 , t_m) , de donde seguimos la existencia de las soluciones aproximadas u_m para m ≥ 1 . Seguidamente debemos obtener estimados a priori, para la sucesión { u_m } de modo que podamos prolongarlas a un intervalo uniforme de existencia .

Estimado a Priori 1. Es fácil ver que la ecuación (9) se verifica para todo $v \in V_m$. Entonces reemplazando w_j por $v = 2A^{2\alpha-\beta} u'_m(t) \in V_m$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\left|A^{\alpha-\beta/2} u'_m(t)\right|^2 + \left|A^{\alpha+(\varepsilon-\beta)/2} u_m(t)\right|^2 + \hat{M}\left(\left|A^{\alpha} u_m(t)\right|^2\right)\right\} \\
&= \frac{d}{dt}\left\{\left|A^{\alpha-\beta/2} u'_m(t)\right|^2 + \left|A^{\alpha+\varepsilon/2-\beta/2} u_m(t)\right|^2 + \hat{M}\left(\left|A^{\alpha} u_m(t)\right|^2\right) + \sigma\left|A^{\alpha} u_m(t)\right|^2\right\} \\
&= \left(f(t), 2A^{2\alpha-\beta} u'_m(t)\right) + 2\sigma\left(A^{\alpha} u_m(t), A^{\alpha} u'_m(t)\right) \qquad (13) \\
&= 2\left(A^{\alpha-\beta/2} f(t), A^{\alpha-\beta/2} u'_m(t)\right) + 2\sigma\left(A^{\alpha+\beta/2} u_m(t), A^{\alpha-\beta/2} u'_m(t)\right) \\
&\le \left|A^{\alpha-\beta/2} f(t)\right|^2 + 2\left|A^{\alpha-\beta/2} u'_m\right|^2 + \sigma^2\left|A^{\alpha+\beta/2} u_m\right|^2 \\
&\le \left|A^{\alpha-\beta/2} f(t)\right|^2 + 2\left|A^{\alpha-\beta/2} u'_m\right|^2 + \sigma^2 C\left|A^{\alpha+(\varepsilon-\beta)/2} u_m\right|^2
\end{aligned}
$$

Entonces integrando en la desigualdad (13), sobre [0, t):

$$
\begin{aligned}
&\left|A^{\alpha-\beta/2} u'_m(t)\right|^2 + \left|A^{\alpha+(\varepsilon-\beta)/2} u_m(t)\right|^2 \\
&\le \left|A^{\alpha-\beta/2} u'_m(0)\right|^2 + \left|A^{\alpha+(\varepsilon-\beta)/2} u_m(t)\right|^2 + M\left(\left|A^{\alpha} u_m(0)\right|^2\right) + \sigma\left|A^{\alpha} u_m(0)\right|^2 \\
&\le \left|A^{\alpha-\beta/2} u'_m(0)\right|^2 + \left|A^{\alpha+(\varepsilon-\beta)/2} u_m(0)\right|^2 + \int_0^t \left|A^{\alpha-\beta/2} f(s)\right|^2 ds + \\
&\qquad + 2\int_0^t \left|A^{\alpha-\beta/2} u'_m(s)\right|^2 ds + \sigma^2 C \int_0^t \left|A^{\alpha+(\varepsilon-\beta)/2} u_m(s)\right|^2 ds \qquad (14) \\
&\le \left|A^{\alpha-\beta/2} u_{1m}\right|^2 + \left|A^{\alpha+(\varepsilon-\beta)/2} u_{0m}\right|^2 + M\left(\left|A^{\alpha} u_{0m}\right|^2\right) + \sigma\left|A^{\alpha} u_m(0)\right|^2 + \\
&+ \int_0^t \left|A^{\alpha-\beta/2} f(s)\right|^2 ds + 2\int_0^t \left|A^{\alpha-\beta/2} u'_m(s)\right|^2 ds + \sigma^2 C \int_0^t \left|A^{\alpha+(\varepsilon-\beta)/2} u_m(s)\right|^2 ds \\
&\le C + C\left\{\int_0^t \left|A^{\alpha-\beta/2} u'_m(s)\right|^2 ds + \int_0^t \left|A^{\alpha+(\varepsilon-\beta)/2} u_m(s)\right|^2 ds\right\}
\end{aligned}
$$

Utilizando (1), las convergencias (10), (11) y la hipótesis *H*-1 sobre *M,* obtenemos una desigualdad de la forma:

$$
\varphi(t) = \left|A^{\alpha-\beta/2} u'_m(t)\right| + \left|A^{\alpha+(\varepsilon-\beta)/2} u_m(t)\right|^2 \le C + C\int_0^t \varphi(s)\, ds \qquad (15)
$$

En efecto:

$$u_{0m} \to u_0 \quad en \quad D\left(A^{\varepsilon/2}\right) \subset D\left(A^{\alpha+(\varepsilon-\beta)/2}\right) \subset D\left(A^{\alpha}\right); \text{luego}$$

$$\left|A^{\alpha}\, u_{0m}\right|^2 \to \left|A^{\alpha}\, u_0\right|^2 \quad en \quad R$$

$$\left|A^{\alpha+(\varepsilon-\beta)/2}\, u_{0m}\right|^2 \to \left|A^{\alpha+(\varepsilon-\beta)/2}\, u_0\right|^2 \quad en \quad R$$

Entonces por la continuidad de M:

$$M\left(\left|A^{\alpha} u_{0m}\right|\right) \to M\left(\left|A^{\alpha} u_0\right|\right) \quad en \quad R$$

Análogamente

$$u_{tm} \to u_1 \quad en \quad H \subset D\left(A^{\alpha-\beta/2}\right) \text{ ; entonces:}$$

$$\left|A^{\alpha-\beta/2}\, u_{1m}\right|^2 \to \left|A^{\alpha-\beta/2}\, u_1\right|^2 \quad en \quad R$$

Entonces aplicando el lema de Gronwall a (15), obtenemos que:

$$\left|A^{\alpha+\beta/2}\, u_m'(t)\right|^2 + \left|A^{\alpha+(\varepsilon-\beta)/2}\, u_m(t)\right|^2 \leq C \tag{16}$$

Estimado a Priori 2. Haciendo $v = 2\ u'_m(t)$ en la ecuación aproximada (9) , obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\left|u_m'(t)\right|^2 + \left|A^{\varepsilon/2}\, u_m(t)\right|^2 + \Psi(t)\left|A^{\beta/2}\, u_m(t)\right|^2\right\} = \\
&= \frac{d}{dt}\left\{\left|u_m'(t)\right|^2 + \left|A^{\varepsilon/2}\, u_m(t)\right|^2 + (\Psi(t)+\sigma)\left|A^{\beta/2}\, u_m(t)\right|^2\right\} = \\
&= 2\left(f(t), u_m'(t)\right) + 2\sigma\left(A^{\beta/2}\, u_m(t), A^{\beta/2}\, u_m'(t)\right) + \Psi'(t)\left|A^{\beta/2}\, u_m(t)\right|^2 = \\
&= 2\left(f(t), u_m'(t)\right) + 2\sigma\left(A^{\beta}\, u_m(t), u_m'(t)\right) + \Psi'(t)\left|A^{\beta/2}\, u_m(t)\right|^2
\end{aligned} \tag{17}$$

donde

$$\Psi(t) = M\left(\left|A^{\alpha}\, u_m(t)\right|^2\right) \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\Psi(t) &= 2M'\left(\left|A^{\alpha}\, u_m(t)\right|^2\right)\left(A^{\alpha}\, u_m(t), A^{\alpha}\, u_m'(t)\right) \\
&= 2M'\left(\left|A^{\alpha}\, u_m(t)\right|^2\right)\left(A^{\alpha+\beta/2}\, u_m(t), A^{\alpha-\beta/2}\, u_m'(t)\right)
\end{aligned} \tag{19}$$

Ahora teniendo en cuenta la acotación (16), la continuidad de la función M, y la condición $0 < 2\beta \leq \varepsilon$ (que implica: $\alpha+(\varepsilon-\beta)/2 \geq \alpha+\beta/2 \geq \beta/2$):

$$
\begin{aligned}
|\Psi'(t)| &= \left|2M'\left(\left|A^{\alpha}u_m(t)\right|^2\right)\left(A^{\alpha+\beta/2}u_m(t),\, A^{\alpha-\beta/2}u_m'(t)\right)\right| \leq \\
&\leq C\left|A^{\alpha+\beta/2}u_m(t)\right|\left|A^{\alpha-\beta/2}u_m'(t)\right| \leq \\
&\leq C\left|A^{\alpha+(\varepsilon-\beta)/2}u_m(t)\right|\left|A^{\alpha-\beta/2}u_m'(t)\right| \leq C
\end{aligned} \tag{20}
$$

Integrando en (17), utilizando la desigualdad de Cauchy – Scharwz , (20), y la hipótesis H-1, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\phi(t) &= |u_m'(t)|^2 + |A^{\varepsilon/2}u_m(t)|^2 \leq |u_m'(t)|^2 + |A^{\varepsilon/2}u_m(t)|^2 + \Psi(t) + \sigma\,|A^{\beta/2}u_m(t)|^2 \leq \\
&\leq |u_m'(0)|^2 + |A^{\varepsilon/2}u_m(0)|^2 + (\Psi(0)+\beta)\,|A^{\beta/2}u_m(0)|^2 + \\
&+ \int_0^t |f(s)|^2\,ds + \int_0^t |u_m'(s)|^2\,ds + \sigma^2\int_0^t |A^{\beta}u_m(s)|^2\,ds + C\int_0^t |A^{\beta/2}u_m(s)|^2\,ds \\
&C\int_0^t |u_m'(s)|^2\,ds + C\int_0^t |A^{\varepsilon/2}u_m(s)|^2\,ds \leq C + C\int_0^t \phi(s)\,ds
\end{aligned} \tag{21}
$$

Aplicando el lema de Gronwall en (21) obtenemos la acotación:

$$
\phi(t) = |u_m'(t)|^2 + |A^{\varepsilon/2}u_m(t)|^2 \leq C \qquad \forall\ t \in [0,T] \tag{22}
$$

Convergencia de las Soluciones Aproximadas

De (16) y (22) tenemos que:

$$
(u_m) \quad \text{es acotada en } L^{\infty}\left(0,T;\, D\left(A^{\varepsilon/2}\right)\right) \subset L^{\infty}\left(0,T;\, D\left(A^{\alpha}\right)\right) \tag{23}
$$

$$
(u_m') \quad \text{es acotada en } L^{\infty}(0,T;\, H) \tag{24}
$$

Entonces existe una subsucesión de (u_m) que la seguimos denotando de la misma forma , y una función u tal que:

$$
u_m \xrightarrow{m\to\infty} u \ \text{débil - *} \quad \text{en} \quad L^{\infty}\left(0,T_0;\, D\left(A^{\varepsilon/2}\right)\right) \tag{25}
$$

$$
u_m' \xrightarrow{m\to\infty} u \ \text{débil - *} \quad \text{en} \quad L^{\infty}(0,T_0;\, H) \tag{26}
$$

Desde (25) y (26), podemos pasar al limite en los términos lineales de la ecuación aproximada, desde que:

$$\int_0^{T_1} \left(A^{\varepsilon/2}\, u_m(t),\, A^{\varepsilon/2}\, \omega(t)\right) dt \xrightarrow{m\to\infty} \int_0^{T_1} \left(A^{\varepsilon/2}\, u(t),\, A^{\varepsilon/2}\, \omega(t)\right) dt \tag{27}$$

$$\int_0^{T_1} \left(u_m'(t), \omega(t)\right) dt \xrightarrow{m\to\infty} \int_0^{T_1} \left(u'(t), \omega(t)\right) dt \tag{28}$$

$\forall \omega \in L^1\left(0, T_0;\, D\left(A^{\varepsilon/2}\right)\right).$

Análisis del Término No Lineal

La parte no lineal del problema esta dada por el término:

$$N(u_m) = M\left(\left|A^{\alpha}\, u_m\right|^2\right) A^{\beta/2}\, u_m \tag{29}$$

Probaremos que:

$$N(u_m) = M\left(\left|A^{\alpha}\, u_m\right|^2\right) A^{\beta/2}\, u_m \xrightarrow{m\to\infty} N(u) = M\left(\left|A^{\alpha}\, u\right|^2\right) A^{\beta/2}\, u \tag{30}$$

débil en $L^2(0, T)$

En efecto, de (16) y (22)

(u_m) es acotada en $L^{\infty}\left(0, T;\, D\left(A^{\varepsilon/2}\right)\right)$ (31)

(u_m') es acotada en $L^{\infty}(0, T;\, H)$ (32)

Haciendo

$$B_0 = D\left(A^{\varepsilon/2}\right) \subset B = D\left(A^{\alpha}\right) \subset B_1 = H \tag{33}$$

Entonces aplicando el teorema de Aubin's – Lions (teniendo en cuenta que la inmersión de B_0 en B es compacta , existe una subsucesión de (u_m) , que la continuamos denotando de la misma forma , tal que:

$$u_m \xrightarrow{m\to\infty} u \qquad \text{fuerte en } L^4\left(0, T;\, D\left(A^{\alpha}\right)\right) \tag{34}$$

Luego:

$$\left|A^{\alpha}\ u_m\right| \xrightarrow{m\to\infty} \left|A^{\alpha}\ u\right| \qquad \text{fuerte en} \quad L^4(0,T) \tag{35}$$

de donde:

$$\left|A^{\alpha}\ u_m\right|^2 \xrightarrow{m\to\infty} \left|A^{\alpha}\ u\right|^2 \qquad \text{fuerte en} \quad L^2(0,T) \tag{36}$$

Por otro lado tenemos que la función M es derivable, entonces por el teorema del valor intermedio:

$$M(s_1) - M(s_2) = M'(\tau)(s_1 - s_2) \tag{37}$$

de donde: $\tau = \theta s_1 + (1-\theta)\, s_2\ , 0 \le \theta \le 1.$

Ahora haciendo:

$$s_1(t) = \left|A^{\alpha} u_m(t)\right|^2 \quad ; \quad s_2(t) = \left|A^{\alpha}\ u(t)\right|^2 \tag{38}$$

Obtenemos la siguiente convergencia en $L^2\ (0,T)$:

$$\int_0^{T_1} \left| M\left(\left|A^{\alpha}\ u_m(t)\right|^2\right) - M\left(\left|A^{\alpha}\ u_m(t)\right|^2\right)\right|^2 dt \int_0^{T_1} \left|M'(\tau(t))\right| \left(\left|A^{\alpha}\ u_m(t)\right|^2 - \left|A^{\alpha}\ u(t)\right|^2\right)^2 dt$$
$$\le C \int_0^{T_1} \left|\left|A^{\alpha}\ u_m(t)\right|^2 - \left|A^{\alpha}\ u(t)\right|^2\right|^2 dt \xrightarrow{m\to\infty} 0 \tag{39}$$

Sea entonces $w = v\ \theta \in L^1\ (0,T_0;\ D(A^{\beta/2}))$, donde $v \in D(A^{\beta/2})$ y $\theta \in C^1\ ([0,T_0])$

$$\int_0^{T_1} \left(M\left(\left|A^{\alpha}\ u_m(t)\right|^2\right) \left(A^{\beta/2}\ u_m(t), A^{\beta/2}\right) - M\left(\left|A^{\alpha}\ u(t)\right|^2\right)\left(A^{\beta/2}\ u(t), A^{\beta/2}\ v\right)\right) \theta(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{T_1} \left(M\left(\left|A^{\alpha}\ u_m(t)\right|^2\right) - M\left(\left|A^{\alpha}\ u_m(t)\right|^2\right)\left(A^{\beta/2}\ u_m(t), A^{\beta/2}\ v\right)\right) \theta(t)\, dt + \tag{40}$$

$$+ \int_0^{T_1} \left(M\left(\left|A^{\alpha}\ u(t)\right|^2\right)\left(A^{\beta/2}\ u_m(t) - A^{\beta/2}\ u(t), A^{\beta/2}\ v\right)\right) \theta(t)\, dt$$

Por (22) y (39) tenemos que:

$$\left|\int_0^{T_1}\left(M\left(\left|A^{\alpha}\, u_m(t)\right|^2\right)-M\left(\left|A^{\alpha}\, u(t)\right|^2\right)\left(A^{\beta/2}\, u_m(t), A^{\beta/2}\, v\right)\right)\theta(t)\,d\,t\right|$$

$$\leq \int_0^{T_1}\left|M\left(\left|A^{\alpha}\, u_m(t)\right|^2\right)-M\left(\left|A^{\alpha}\, u(t)\right|^2\right)\right|\left|A^{\alpha}\, u_m(t)\right|\left|A^{\beta/2}\, v\right|\left|\theta(t)\right|\, dt \tag{41}$$

$$\leq C\int_0^{T_1}\left|M\left(\left|A^{\alpha}\, u_m(t)\right|^2\right)-M\left(\left|A^{\alpha}\, u(t)\right|^2\right)\right| dt \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Por otro lado, desde (25) obtenemos:

$$\left|\int_0^{T}\left(M\left(\left|A^{\alpha}\, u(t)\right|^2\right)\left(A^{\beta/2}\, u_m(t)-A^{\beta/2}\, u(t), A^{\beta/2}v\right)\right)\theta(t)\, d\right|$$

$$\leq \int_0^{T}\left|M\left(\left|A^{\alpha}\, u(t)\right|^2\right)\right|\left|\left(A^{\beta/2}\, u_m(t)-A^{\beta/2}\, u(t), A^{\beta/2}v.\,\theta(t)\right)\right| dt \tag{42}$$

$$\leq C\int_0^{T}\left|\left(A^{\beta/2}\, u_m(t)-A^{\beta/2}\, u(t), A^{\beta/2}v.\,\theta(t)\right)\right| dt \xrightarrow{m\to\infty} 0$$

Ahora pasaremos al limite en la ecuación aproximada. Desde (10) tenemos:

$$\left(u_m''(t), v\right)+\left(A^{\varepsilon/2}\, u_m(t), A^{\varepsilon/2}\, v\right)+M\left(\left|A^{\alpha}\, u_m(t)\right|^2\right)\left(A^{\beta/2}\, u_m(t), A^{\beta/2}\, v\right)=\left(f(t), v\right) \tag{43}$$

$\forall\, v\in V_m$

Multiplicando por $\theta \in D(0,T)$ en (43) e integrando sobre el intervalo $[\,0\,,T\,]$ obtenemos

$$\int_0^T\left(u_m'(t), v\right)\theta'(t)\,dt+\int_0^T\left(A^{\varepsilon/2}\, u_m(t), A^{\varepsilon/2}\, v\right)\theta(t)\,dt+$$

$$+\int_0^T M\left(\left|A^{\alpha}\, u_m(t)\right|^2\right)\left(A^{\beta/2}\, u_m(t), A^{\beta/2}\, v\right)\theta(t)\,dt = \int_0^T\left(f(t), v\right)\theta(t)\,dt \tag{44}$$

$\forall\, v\in V_m$

Entonces pasando al limite m→∞ en (44) y por las convergencias (27), (28) y (30)

$$\int_0^T (u'(t), v)\theta'(t)\,dt + \int_0^T \left(A^{\varepsilon/2} u(t), A^{\varepsilon/2} v\right)\theta(t)\,dt + \int_0^T M\left(\left|A^{\alpha} u(t)\right|^2\right)\left(A^{\beta/2} u(t), A^{\beta/2} v\right)\theta(t)\,dt =$$

$$= \int_0^T (f(t), v)\theta(t)\,dt \qquad (45)$$

$\forall\, v \in V_m$

Por argumentos de densidad , se verifica que

$$\int_0^T (u'(t), v)\theta'(t)\,dt + \int_0^T \left(A^{\varepsilon/2} u(t), A^{\varepsilon/2} v\right)\theta(t)\,dt + \int_0^T M\left(\left|A^{\alpha} u(t)\right|^2\right)\left(A^{\beta/2} u(t), A^{\beta/2} v\right)\theta(t)\,dt =$$

$$= \int_0^T (f(t), v)\theta(t)\,dt \qquad (46)$$

$\forall\, v \in D\left(A^{\beta/2}\right)$

Luego:

$$\frac{d}{dt}(u'(t), v) + \left(A^{\varepsilon/2} u(t), A^{\varepsilon/2} v\right) + M\left(\left|A^{\alpha} u(t)\right|^2\right)\left(A^{\beta/2} u(t), A^{\beta/2} v\right) = (f(t), v) \qquad (47)$$

en el sentido de las distribuciones sobre $[0, T_0]$ y para todo $v \in D\left(A^{\beta/2}\right)$

$$u'' = -M\left(\left|A^{\alpha} u(t)\right|^2\right) A^{\beta} u - A^{\varepsilon} u + f \in L^2\left(0, T; D\left(A^{-\varepsilon/2}\right)\right) \qquad (48)$$

Verificación de las Condiciones Iniciales

Tenemos por (3) , (40) y (41) que:

$u \in L^{\infty}\left(0, T; D\left(A^{\varepsilon/2}\right)\right)$, entonces:

$A^{\beta} u \in L^{\infty}\left(0, T; D\left(A^{\varepsilon/2-\beta}\right)\right) \subset L^{\infty}\left(0, T; D\left(A^{-\varepsilon/2}\right)\right)$;

$A^{\varepsilon} u \in L^{\infty}\left(0, T; D\left(A^{-\varepsilon/2}\right)\right)$

$f \in L^2(0, T; H) \subset L^2\left(0, T; D\left(A^{-\varepsilon/2}\right)\right)$

Por lo tanto:

$$u \in C_w^0\left([0, T]; D\left(A^{\varepsilon/2}\right)\right) \qquad (49)$$

$$u' \in C_w^0\left([0, T]; H\right) \qquad (50)$$

entonces

$$u(0) \in D\left(A^{\varepsilon/2}\right) \subset H \tag{51}$$

$$u'(0) \in H \tag{52}$$

Sea $\theta \in C^1([0,T])$, con $\theta(T) = 0$ y $\theta(0) = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(u_m'(t), v\right)\theta(t)\,dt &= \int_0^T \frac{d}{dt}\left(u_m(t), v\right)\theta(t)\,dt = \left(u_m(0), v\right) - \int_0^T \left(u_m(t), v\right)\theta'(t)\,dt \\
&= \left(u_{0m}, v\right) - \int_0^T \left(u_m(t), v\right)\theta'(t)\,dt \to \left(u_0, v\right) - \int_0^T \left(u(t), v\right)\theta'(t)\,dt
\end{aligned} \tag{53}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(u_m'(t), v\right)\theta(t)\,dt &= \int_0^T \frac{d}{dt}\left(u_m(t), v\right)\theta(t)\,dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}\left(u(t), v\right)\theta(t)\,dt \\
&= \left(u(0), v\right) - \int_0^T \left(u(t), v\right)\theta'(t)\,dt
\end{aligned} \tag{54}$$

Comparando (53) y (54)

$$\left(u(0), v\right) = \left(u_0, v\right) \qquad \forall\, v \in D\left(A^{\varepsilon/2}\right)$$

y desde que $D\left(A^{\varepsilon/2}\right)$ es denso en H

$$u(0) = u_0 \tag{55}$$

Probaremos que $u'(0) = u_1$

Sea $\delta > 0$ y

$$k_\delta = \begin{cases} 1 - t/\delta & 0 \le t \le \delta \\ 0 & \delta < t \le T \end{cases}$$

multiplicando ambos lados de la ecuación aproximada, por κ_δ, e integrando de 0 a T,

$$\int_0^T \left(\left(u_m''(t), v\right) + \left(A^{\varepsilon/2} u_m(t), A^{\varepsilon/2} v\right) + M\left(\left|A^{\alpha} u_m(t)\right|^2\right)\left(A^{\beta/2} u_m(t), A^{\beta/2} v\right)\right) k_\delta(t)\,dt =$$

$$= \int_0^T \left(f(t), v\right) k_\delta\,dt \tag{56}$$

$$\forall\, v \in D\left(A^{\varepsilon/2}\right)$$

entonces tenemos

$$\int_0^T \left(u''_m(t), v\right) k_\delta(t)\, dt = \frac{d}{dt}\left(u'_m(t), v\right) k_\delta(t)\, dt = \left(u'_m(0), v\right) + \int_0^\delta \left(u'_m(t), v\right) k'_\delta(t)\, dt$$

$$= -\left(u_{1m}, v\right) + \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \left(u'_m(t), v\right) dt \rightarrow \left(u_1, v\right) + \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \left(u'(t), v\right) dt \tag{57}$$

$$= -\int_0^T M\left(\left|A^\alpha u(t)\right|^2\right)\left(A^{\gamma/2} u(t), A^{\gamma/2} v\right) k_\delta(t)\, dt \int_0^T \left(A^{\varepsilon/2} u(t), v\right) k_\delta(t)\, dt + \left(f(t), v\right) k_\delta(t) dt$$

$$\forall v \in D\left(A^{\varepsilon/2}\right)$$

Desde que:

$$\frac{1}{\delta}\int_0^\delta \left(u'(t), v\right) dt \xrightarrow{\delta \to 0} \left(u'(0), v\right) \tag{58}$$

$$\int_0^{T_1} M\left(\left|A^\alpha u(t)\right|^2\right)\left(A^{\beta/2} u(t), A^{\beta/2} v\right) k_\delta(t)\, dt = \int_0^\delta M\left(\left|A^\alpha u(t)\right|^2\right)\left(A^{\beta/2} u(t), A^{\beta/2} v\right)(1 - t/\delta) dt =$$

$$= \int_0^\delta M\left(\left|A^\alpha u(t)\right|^2\right)\left(A^{\beta/2} u(t), A^{\beta/2} v\right) dt - \frac{1}{\delta}\int_0^\delta M\left(\left|A^\alpha u(t)\right|^2\right)\left(A^{\beta/2} u(t), A^{\beta/2} v\right) t\, dt \xrightarrow{\delta \to 0} 0 \tag{59}$$

$$\forall v \in D\left(A^{\beta/2}\right)$$

obtenemos que $(u_1, v) = (u'(0), v)$, $\forall v \in D(A^{\beta/2})$ y por argumentos de densidad, concluimos que:

$$u(0) = u_1 \tag{60}$$

Observación 1. La unicidad de la solución se sigue fácilmente por la condición impuesta sobre la función no-lineal M.

Observación 2. Si los exponentes α, β, cumplen la condición $2\alpha-\beta \geq 0$, no es necesario realizar el estimado 2, para las soluciones aproximadas. En este caso el estimado 1, nos dice que (u_m) es acotada en $D(A^{\alpha+(\varepsilon-\beta)/2}) \subset D(A^{\varepsilon/2})$ y que (u'_m) es acotada en $D(A^{\alpha-\beta/2}) \subset H$ y por tanto podemos continuar como en el teorema 1.

3. Caso Degenerado. En esta sección trataremos el caso en que el operador A es auto-adjunto y no-negativo. En Aassilla M. [2] se utilizo un método para tratar ecuaciones degeneradas considerando una descomposición del espacio $H = N(A) \oplus R(A)$ y de la ecuación abstracta sobre cada uno de los espacios componentes. Nosotros procedemos de forma similar y consideramos la siguiente situación:

(3.1) Sean V, H espacios de Hilbert, la inmersión de V en H densa y compacta.

(3.2) $a : V \times V \to \mathbf{R}$ una forma bilineal ,simétrica ,continua y no-negativa, tal que

$$a(v,v) + \lambda |v|_H^2 \geq c|v|_V^2 \qquad \forall\, v \in V$$

para algún $\lambda \in \Re$ y $c \succ 0$.

Entonces el operador $A_\lambda = A + \lambda I$ determinado por la terna $\{V, H, a_\lambda(u,v)\}$, es auto-adjunto, con dominio $D(A_\lambda) = D(A)$ denso en H y el operador inverso A_λ^{-1} es compacto . Entonces estamos en condiciones de utilizar el siguiente resultado cuya demostración aparece en [2].

Lema 1. Sea H un espacio con producto interno sobre los reales. Sea A un operador autoadjunto , no-negativo con dominio $D(A)$ y rango $R(A)$ en H . Supongamos que $(I+A)^{-1}$ es un operador compacto. Entonces:

a) $R(A)$ es cerrado y $H = N(A) \oplus R(A)$

b) $(A|_{R(A)})^{-1} : R(A) \to R(A)$ es compacto , donde $A|_{R(A)}$ es la restricción de A al $R(A)$.

Siguiendo [2], planteamos el siguiente problema sobre H.

Hallar $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ donde $u_1(t) \in N(A)$ y $u_2(t) \in D(A) \cap R(A)$ tal que

$$\begin{aligned} & u_1'(t) + u_2''(t) + M\left(\left|A^{\alpha}(u_1(t)+u_2(t))^2\right|^2\right) A^{\beta}u_2(t) + A^{\varepsilon}u_2(t) = f_1(t) + f_2(t) \\ & u(0) = u_1(0) + u_2(0) = u_{01} + u_{02} \\ & u'(0) = u_1'(0) + u_2'(0) = u_{11} + u_{12} \end{aligned} \tag{3.3}$$

En el caso $\alpha > 0$, la solución de (3.1) equivale a la resolución de los problemas siguientes: Hallar $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ donde $u_1(t) \in N(A)$ y $u_2(t) \in D(A) \cap R(A)$ tal que;

$$\begin{aligned} & u_1'(t) = f_1(t) \quad en \quad N(A) \\ & u_1(0) = u_{01} \,, u_2(0) = u_{11} \end{aligned} \tag{3.4}$$

y

$$\begin{aligned} & u_1''(t) + M\left(\left|A^{\alpha}u_2(t)\right|^2\right) A^{\beta}u_2(t) + A^{\varepsilon}u_2(t) = f_2(t)\, en \;\; R(A) \\ & u_1(0) = u_{02} \\ & u_2(0) = u_{12} \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde en (3.5) estamos denotando de la misma forma la restricción de A a R(A), y se utiliza que $A^{\delta} u_1(t) = 0$, $\forall\ \delta > 0$.

Ahora, (3.4) se resuelve trivialmente. Asimismo desde que A restricto al R(A) es auto-adjunto, positivo y con inversa compacta, (que seguimos denotando de la misma forma)podemos aplicar el teorema 1 de la sección anterior para resolver (3.5) y recuperar el teorema 1 para el caso $\alpha > 0$.

4. Aplicaciones. Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto acotado con frontera regular Γ.

4.1. Sea $H = L^2(\Omega)$; $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, consideremos la siguiente forma bilineal sobre V:

$$a(u, v) = \int \Delta u\ \Delta v\ dx$$

Entonces el operador asociado a la terna $\{V, H, a(u, v)\}$ esta dado por:

$$Au = \Delta^2 u \qquad \forall u \in D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^4(\Omega)$$

y se tiene que:

En estas condiciones el teorema 1 afirma la existencia y unicidad de solución del problema:

$$\left| \begin{array}{ll} u'' + \Delta^2 u + M\left(|\nabla u|^2\right)(-\Delta u) = f & en \quad Q \\ u = \Delta u = 0 & en \quad \Sigma \\ u(0) = u_0 \ ,\ u'(0) = u_1 & en \quad \Omega \end{array} \right.$$

4.2. Sea $H = L^2(\Omega)$; $V = H^1(\Omega)$, consideremos la siguiente forma bilineal sobre V:

$$a(u, v) = \int \nabla u\ \nabla v\ dx$$

Entonces el operador (no – negativo) asociado a la terna $\{V, H, a(u, v)\}$esta dado por:

$$Au = \Delta u \qquad \forall u \in D(A) = \left\{ u \in H^2(\Omega) / \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \right\}$$

y se tiene que:

$$A^2 u = \Delta^2 u \qquad \forall u \in D(A^2) = H^2(\Omega)$$

$$A^{1/2} u = \nabla u \qquad \forall u \in D(A^{1/2}) = H^1(\Omega)$$

En estas condiciones el teorema 1 afirma la existencia y unicidad de solución del problema:

$$\left|\begin{array}{ll} u'' + \Delta^2 u + M\left(|\nabla u|^2\right)(-\Delta u) = f & en \;\; Q \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & en \;\; \Sigma \\ u(0) = u_0 \;, u'(0) = u_1 & en \;\; \Omega \end{array}\right.$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Arosio A. – Spagnolo S.: "Global solutions of the Cauchy problem for a non-linear Hyperbolic Equation "Universita di Pisa . Departamento de Matemática. Roma (1982).
2. A Assila M. "On a Quasilinear Wave Equation with Strong Damping" Funkcialaj Ekvaioj 41 -(1998)
3. Cousin A. , Frota C. Larkin N, ,Medeiros L.A. "On the abstract model of Kirchhoff-Carrier Equation" Comm. In Appl. Analysis – 3- (1997).
4. Ebihara Y.: "On the existence of local smooth solutions for same degenerate quasilinear hyperbolic equations". Anais Acad.Bras.Ciencias.vol.57 (1985)
5. Ebihara Y. –Medeiros L. – Milla A.: "Local solutions for a nonlinear degenerate hyperbolic equations". Nonlinear Analysis.Vol.10. (1986).
6. Izaguirre R. – Pereira D.: "Solução global para uma classe de equações hiperbólicas degeneradas" Proceding of 9^0 Congreso Brasileiro de Matematica Aplicada e Computacional-Brasilia-(1986)
7. Izaguirre R. – Veliz – V.: " Existencia y unicidad de solucion local para una clase de ecuaciones abstractas no-lineales tipo Kirchhoff-Carrier" I Seminario Internacional de Ecuaciones Diferenciales Parciales y Aplicaciones – Universidad Ricardo Palma – Peru- (1999)
8. Izaguirre R. Veliz V.: " Solución Local para una clase de ecuaciones tipo Kirchhoff" Actas del 42^0 Seminario Brasileiro de analisis (1997).
9. Limaco J. - Ferrel L.: "Existencia de soluções para a equação da corda elástica com amortecimento" Atas do 37 Seminario Brasileiro de Analise
10. Lions J. L.: "Quelques Methodes de Resolution des Probleme aux limites nonlinear". Dunod. Paris (1969).
11. Matos M. "Estudo de um modelo abstrato para a equação da viga vía integral Hilbertiana" Atas 29^0 Seminario Brasileiro de Analise- (1989).
12. Medeiros L.A – Milla M.M.: "Remarks on a nonlinear model vibrations of string with damping".30 Seminario Brasileiro de Analise.L.N.C.C.-R.J.(1989)
13. Muñoz J. "Remark on the existence and Decay of the Nonlinear Beam Equation" Internat. J. Math. Vol.17, N^0 2 –(1994).
14. Pereira D. C. "Existence, Uniqueness and Asymptotic Behavior for Solutions of the nonlinear Beam equation". Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications,Vol 14, N^0 8 , 1990.
15. Perla G.: "On classical solutions of quasilinear hyperbolic equations". Nonlinear Analysis.Vol.3.(1979)
16. Woinowsky S. –Krieger. "The effect of axial force on the vibration of hinged bar" J. Appl. Math. 17 (1950).