PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos Vol. II - N°2 Pgs. 45-55 Lima – Perú

CONTROLABILIDAD APROXIMADA PARA UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES EN UN DOMINIO NO CILINDRICO

Andrés Barraza de la Cruz[1]

Sea Ω un abierto acotado de $I\!R^n$, el cual sin pérdida de generalidad podemos suponer conteniendo el origen de $I\!R^n$, con frontera Γ bien regular y $Q_t = \Omega \times [0,T[$ $(T > 0)$ un cilindro de $I\!R^{n+1}$, con frontera lateral $\sum_T = \Gamma \times]0,T[$. Consideremos la función

$$t \mapsto K(t), \text{ de } [0,T] \to I\!R^{n^2}.$$

es decir $K(t)$ es la matriz de orden $n \times n$

Supongamos $K(t)$ ortogonal y continuamente diferenciable para cada t.

Definimos el conjunto

$$\Omega_t = \{x = K(t)y \ ; \ y \in \Omega\} \quad (0 \le t \le T)$$

cuya frontera es denotada por Γ_t. Representemos por $\hat{Q}_T$ el dominio no cilíndrico

$$\hat{Q}_T = \bigcup_{0<t<T} \Omega_t \times \{t\}$$

con frontera lateral

$$\hat{\Sigma}_T = \bigcup_{0<t<T} \Gamma_t \times \{t\}$$

Sea ω un subconjunto abierto no vacío de Ω_0, tal que el cilindro $q_T = \omega \times]0,T[$ está contenido en $\hat{Q}_T$. χ_{q_T} denota la función característica de q_T y $\hat{\omega}(x,t)$ es la función control con soporte contenido en q_T.

En este trabajo estudiamos la controlabilidad aproximada para el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} &u'(x,t) - \Delta u(x,t) + \hat{a}(x,t)u(x,t) + \hat{\vec{b}}(x,t) \cdot \nabla u(x,t) = \hat{\omega}(x,t)\chi_{q_T} \quad en \quad \hat{Q}_T \\ &u(x,t) = 0 \quad sobre \quad \hat{\Sigma}_T \\ &u(x,0) = u_0(x) \quad en \quad \Omega_0 \end{aligned} \tag{1}$$

donde $u(x,t)$ es la función vectorial $(u_1(x,t),\ldots,u_n(x,t))$ con (x,t) $\in \hat{Q}_T$.

[1] Centro Universitario de Palmas, Fundación Universidad de Tocantins, Caixa Postal 114. CEP 77000-000, Palmas-TO Brasilia – Brasil.

Con el símbolo Δ representamos la matriz $(\Delta_{ij})_{n\times n}$ de operadores definida por

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} \Delta & para & i \le j \\ 0 & para & i > j \end{vmatrix}$$

donde Δ es el operador Laplaciano; $\hat{a}(x,t) = \left(\hat{a}_{ij}(x,t)\right)_{n\times n}$ y $\hat{\vec{b}}(x,t) = \left(\hat{\vec{b}}_{ij}(x,t)\right)_{n\times n}$ matrices

tales que $\hat{a}_{ij}(x,t) = 0$ para $i > j$ y $\hat{\vec{b}}_{ij}(x,t) = (0,0,\cdots,0)$ para $i > j$, $\hat{a}_{ij}(x,t) \in L^\infty(Q_T)$,

$\hat{\vec{b}}_{ij}(\cdot,t) \in \left[L^\infty(Q_T)\right]^n$, $\nabla u(x,t) = (\nabla u_1(x,t),\cdots,\nabla u_n(x,t))$, ∇ es el operador gradiente

$$\hat{\omega}(x,t) = \left(\hat{\omega}_1(x,t),\cdots,\hat{\omega}_n(x,t)\right)$$

El presente trabajo está basado en resultados obtenidos por L. A. Medeiros [6] en los cuales se estudia la controlabilidad aproximada para el sistema (1) en el dominio no cilíndrico $\hat{Q}_T$ en el caso en que el sistema se reduce a una sola ecuación siguiendo las ideas de Fabre-Puel-Zuazua [2], Fabre [3], Lions [4]; sistemas semejantes a (1) son considerados en Lions [5]. Transformaremos el sistema (1) en un sistema equivalente en dominio no cilíndrico mediante la aplicación

$$\tau : \hat{Q}_T \to Q_T$$

definido por $\tau(x,t) = \left(K(t)^{-1}x, t\right)$ con inversa

$$\tau^{-1} : Q_T \to \hat{Q}_T \quad ,$$

dado por $\tau^{-1}(y,t) = \left(K(t)x, t\right)$. Así, haciendo $u(x,t) = v\left(K^{-1}(t)x,t\right)$, $v : Q \to I\!R$, $K^{-1}(t)x = y$ tenemos

$$u'(x,t) = v'\left(K^{-1}(t)x,t\right) + \nabla v\left(K^{-1}(t)x,t\right)\cdot K^{-1}(t)K'(t)y$$
$$\nabla u(x,t) = \nabla v\left(K^{-1}(t)x,t\right)K^{-1}(t)$$
$$\Delta u(x,t) = \Delta v\left(K^{-1}(t)x,t\right)$$
$$\hat{a}_{ij}(x,t) = a_{ij}\left(K^{-1}(t)x,t\right)$$
$$\hat{\vec{b}}_{ij}(x,t) = \hat{\vec{b}}_{ij}\left(K^{-1}(t)x,t\right)$$
$$\hat{\omega}_i(x,t) = \omega_i\left(K^{-1}(t)x,t\right)$$

Luego el sistema (1) queda transformado en

$$\begin{aligned}
&v' - \Delta v - \Delta v K^{-1}(t)K'(t)y + a(y,t)v + \vec{b}(y,t)\nabla v K^{-1}(t) = \omega \chi_{q_T} \quad en \quad Q_T \\
&v(y,t) = 0 \quad sobre \quad \Sigma_T \qquad\qquad (2)\\
&v(y,0) = v_0(y) \quad en \quad \Omega
\end{aligned}$$

donde

$$a(y,t) = \left(a_{ij}(y,t)\right)_{n\times n} \quad , \quad \vec{b}(y,t) = \left(b_{ij}(y,t)\right)_{n\times n}$$

$$\omega(y,t) = \left(\omega_1(y,t),\cdots,\omega_n(y,t)\right) \quad , \quad \hat{q}_T = \left\{\left(K^{-1}(t)x,t\right);(x,t)\in q_T \quad , \quad 0<t<T\right\} .$$

$$v = \left(v_1,\cdots,v_n\right) \quad , \quad v_i(y,t) = u_i(x,t) \quad ; \quad v_0(y) = u_0(y)$$

Dado que $K(t)$ es ortogonal tenemos

$$-\nabla v K^{-1}(t)K'(t)y = K^{*'}(t)K(t)y = y^* K^{-1}(t)K'(t)\nabla v \quad y \quad \nabla v K^{-1}(t) = K(t)\nabla v$$

donde A^* denota la matriz transpuesta de A .

Denotando nuevamente por $\vec{b}_{ij}$ a la suma $y^* K^{-1}(t)K'(t)\delta_{ij} + \vec{b}_{ij}\, K(t)$ donde

$\delta_{ij} = \left| \begin{array}{lll} 1 & si & i=j \\ 0 & si & i\neq j \end{array} \right.$, tenemos que el sistema (2) queda aún transformado en:

$$\begin{aligned}
&v' - \Delta v + a(y,t)v + \vec{b}(y,t)\nabla v = \omega \chi_{q_T} \quad en \quad Q_T \\
&v(y,t) = 0 \quad sobre \quad \Sigma_T \qquad\qquad (3)\\
&v(y,0) = v_0(y) \quad en \quad \Omega
\end{aligned}$$

Soluciones en Q_T y $\hat{Q}_T$

Sean V y H espacios de Hilbert con producto interno y norma representados por $((\cdot,\cdot))$, $\|\cdot\|$ y $(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|$. Supongamos $V \subset H$ con inmersión continua. Consideremos el espacio vectorial

$$W(0,T;V,H) = \left\{z \in L^2(0,T;V)\, ,\, z' \in L^2(0,T;H)\right\}$$

donde z' es la derivada en el sentido de las distribuciones. W es un espacio de Hilbert con la norma:

$$\| z \|^2_{W(0,T;H)} = \| z \|^2_{L^2(0,T;V)} + \| z' \|^2_{L^2(0,T;H)} .$$

Este espacio de Hilbert tiene inmersión continua en el espacio de Banach $C^0([0,T];H)$; de este modo tiene sentido $z(0)$ y $z(T)$ para elementos de $W(0,T;V,H)$.

Definición 1: *La función* $v: Q_T \to I\!R$ *será llamada la solución fuerte del problema (3) si* $v \in W\left(0,T; H_0^1(\Omega)^n \cap H^2(\Omega)^n, L^2(\Omega)^n\right)$ *y*

$$v' - \Delta v + av + \vec{b}\,\nabla v = \omega\,\chi_{\hat{q}_T} \quad c.s. \quad en \quad Q_T$$

y la condición inicial $v(y,0) = v_0$.

Definición 2: *La función* $u: \hat{Q}_T \to I\!R$ *será llamada solución fuerte del problema (1) si* $u \in W\left(0,T; H_0^1(\Omega_t)^n \cap H^2(\Omega_t)^n, L^2(\Omega_t)^n\right)$ *y*

$$u' - \Delta u + \hat{a}\,u + \hat{\vec{b}}\,\nabla u = \hat{\omega}\,\chi_{q_T} \quad c.s.\ en \quad \hat{Q}_T\ .$$

Espacios funcionales sobre $\hat{Q}_T$ *son dados como en Milla-Limaco* [7] .

Teorema 1: *Dado* $\omega \in L^2\left(0,T; L^2(\Omega)^n\right)$ *y* $v_0 \in H_0^1(\Omega)^n$ *existe una única función* $v: Q_T \to I\!R$ *solución fuerte del problema (3). Esta solución tiene la siguiente regularidad:*

$$v \in C^0\left([0,T]; H_0^1(\Omega)^n\right).$$

Demostración: Para una demostración usamos el método de Galerkin conforme a [1]. Observando que el sistema es triangular superior, las limitaciones son obtenidas a partir de la última línea en el problema aproximado.

Así, dada la limitación en la última línea usamos este resultado para limitar la penúltima línea y así sucesivamente. Para las limitaciones en la última línea ver [6].

Teorema 2: *Dado* $\hat{\omega} \in L^2\left(0,T; L^2(\Omega_t)^n\right)$ *y* $u_0 \in H_0^1(\Omega_0)^n$ *existe una única función* $u: \hat{Q}_T \to I\!R$ *solución fuerte del problema (1). Esta solución tiene la siguiente regularidad:*

$$u \in C^0\left([0,T]; H_0^1(\Omega_t)^n\right).$$

Demostración: Dado que $x = K(t)y$ tenemos $u(x,t) = v\left(K^{-1}(t)x, t\right)$; $u_0(x) = v_0(y)$.

Así por el teorema 1 existe $v: Q_T \to I\!R$ solución fuerte de (3) tal que $v \in C^0\left([0,T]; H_0^1(\Omega)^n\right)$.

Este resultado sigue de la equivalencia de los sistemas.

Así tenemos el siguiente resultado de controlabilidad aproximada para el sistema (1).

Teorema 3: Dado $u_0 \in H_0^1(\Omega_0)^n$ el conjunto de estados admisibles en el tiempo T

$$\hat{R}_L\, x(T) = \left\{ u(x,T); \hat{\omega} \in L^2(q_T)^n, \quad u \text{ solución fuerte de (1)} \right\}$$

es denso en $H_0^1(\Omega_T)^n$.

Dada la equivalencia de los problemas (1) y (3) será suficiente probar el siguiente lema

***Lema 3.1**: Dado $v_0 \in H_0^1(\Omega)^n$ el conjunto de estados admisibles en el tiempo T*

$$R_L(T) = \left\{ v(y,T); \omega \in L^2\left(\hat{q}_T\right)^n, \quad v \text{ solución fuerte de (3)} \right\}$$

es denso en $H_0^1(\Omega)^n$.

Demostración: Sea $v_d \in H_0^1(\Omega)^n$, probaremos la existencia de una sucesión $(v_k(T))_{k\in IN}$ tal que $v_k(T) \in R_L(T)$ y $v_k(T) \to v_d$ fuerte en $H_0^1(\Omega)^n$.

Por la linealidad de (3) bastará mostrar el lema para el caso en que $v_0 = 0$.

Para cada $k \in IN$ definimos el funcional

$$J_k(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \int_{\hat{q}_T} \omega_i^2(y,t)\, dy\, dt + \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{n} \| v_{i\omega}(T) - v_{id} \|^2 \tag{4}$$

donde v_ω denota la solución fuerte de (3) para $\omega \in L^2\left(\hat{q}_T\right)^n$ y $v_\omega = (v_{1\omega}, \cdots, v_{n\omega})$, $v_d = (v_{1d}, \cdots, v_{nd})$.

Consideremos ahora el siguiente problema de minimización

$$(P_k) \qquad \left| \begin{array}{l} Min\ J_k(\omega) \\ Para\ todo\ \omega \in L^2\left(\hat{q}_T\right) \end{array} \right.$$

Por la forma como está definida $J_k(\omega)$, resulta semicontinua inferiormente, estrictamente convexa y coerciva en $L^2\left(\hat{q}_T\right)^n$. Entonces existe una solución ω_k de (P_k) para cada k.

La derivada de $J_k(\omega)$ es definida por

$$J_k'(\omega)\cdot\xi = \sum_{i=1}^{n} \int_{\hat{q}_T} \omega_i \xi_i\, dy\, dt + k\sum_{i=1}^{n} \left(\left(v_{i\omega}(T) - v_{id}, v_{i\xi}(T) \right)\right) \tag{5}$$

para todo $\xi \in L^2(\hat{q}_T)^n$ donde $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$.

Reemplazando $J'_k(\omega)\cdot\xi$ en la solución ω_k de (P_k) tenemos

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\hat{q}_T} \omega_{ik}\xi_i \, dx\, dt + k\sum_{i=1}^{n}\big(\big(v_{ik}(T) - v_{id}, v_{i\xi}(\mathrm{T}) \big)\big) = 0 \tag{6}$$

para todo $\xi \in L^2(\hat{q}_T)^n$ donde $v_{ik}(T) = v_i\omega_k(T)$.

Probaremos ahora que $v_k(T) \to v_d$ fuerte en $H_0^1(\Omega)^n$.

En efecto, de la minimización tenemos

$$J_k(\omega_k) \le J_k(0) = \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{n}\| v_{id} \|^2$$

esto es

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\hat{q}_T} \omega_{ik}^2 \, dy\, dt + \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{n}\| v_{ik}(T) - v_{id} \|^2 \le \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{n}\| v_{id} \|^2 \tag{7}$$

De allí

$$\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\omega_k\right)_{k\in IN} \quad \text{es acotada en } L^2(\hat{q}_T)^n \tag{8}$$

y

$$\left(v_k(T) - v_d\right)_{k\in IN} \text{ es acotada en } H_0^1(\Omega)^n . \tag{9}$$

Luego existe una subsucesión que denotamos nuevamente por $\left(v_k(T) - v_d\right)_{k\in IN}$ tal que

$v_k(T) - v_d \longrightarrow \psi$ débilmente en $H_0^1(\Omega)^n$

donde $\psi = (\psi_1, \cdots, \psi_n)$.

De (6) tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{i=1}^{n}\int_{\hat{q}_T} \frac{1}{\sqrt{k}}\omega_{ik}\xi_i \, dy\, dt + \sum_{i=1}^{n}\big(\big(v_{ik}(T) - v_{id}, v_{i\xi}(\mathrm{T}) \big)\big) = 0 \quad .$$

Así, haciendo $k \to \infty$ y considerando la acotación (8) tenemos

$$\sum_{i=1}^{n}\big(\big(\psi_{ik}, v_{i\xi}(\mathrm{T}) \big)\big) = 0 \quad , \quad \forall \xi \in L^2\left(\hat{q}_T\right)^n . \tag{10}$$

Definimos el estado adjunto por transposición, sea $p(y,t) = \left(p_1(y,t), \cdots, p_n(y,t)\right)$, así multiplicando (3) por $p(y,t)$, en seguida integrando por partes tenemos

$$\int_{Q_T} p(y,t)[v' - \Delta v + a(y,t)v + \vec{b}(y,t)\nabla v] = \; < -\Delta\psi, v(T) > \tag{11}$$

donde $v \in W\left(0,T;H_0^1(\Omega)^n \bigcap H^2(\Omega)^n, L^2(\Omega)^n\right)$ tal que $v(0)=(0,\cdots,0)$ y p solución del problema:

$$
\begin{aligned}
& -p' - \Delta^* p + a^*(y,t) - div\left(\overrightarrow{b}^*(y,t)\cdot p\right) = 0 \quad \text{en} \quad Q_T \\
& p = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma_T \qquad\qquad (12) \\
& p(T) = -\Delta\psi \quad \text{en} \quad \Omega
\end{aligned}
$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
\int_{Q_T} p(y,t)\overrightarrow{b}(y,t)\nabla v \, dy\, dt &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{Q_T} p_i \overrightarrow{b}_{ij} \nabla v_i \, dx\, dt \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{Q_T} v_i \, div\left(p_i \overrightarrow{b}_{ij}\right) dx\, dt \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} div\left(\overrightarrow{b}_{ji}\, p_i\right) v_i \, dx\, dt
\end{aligned}
$$

Consideremos ahora los sistemas

$$
\begin{aligned}
& -p' - \Delta^* p + a^*(y,t) - div\left(\overrightarrow{b}^*(y,t)\cdot p\right) = 0 \quad \text{en} \quad Q_T \\
& p = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma_T \qquad\qquad (13) \\
& p(T) = f \quad \text{en} \quad \Omega
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
& z' - \Delta z + a(y,t) + \overrightarrow{b}(y,t)\nabla z = \varphi \quad \text{en} \quad Q_T \\
& z = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma_T \qquad\qquad (14) \\
& z(y,0) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega
\end{aligned}
$$

donde $div\left(\overrightarrow{C}_{ij}\right)_{n\times n}$ denota $\left(div\,\overrightarrow{C}_{ij}\right)_{n\times n}$.

Si $\varphi \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)^n\right)$ por el teorema 1 tenemos que $z \in W\left(0,T;H_0^1(\Omega)\bigcap H^2(\Omega)^n, L^2(\Omega)^n\right)$ es solución fuerte de (3) $\left(con \;\; v_0 = 0\right)$, desde que $z_0 = 0$ tenemos que $z \in C^0\left([0,T];H_0^1(\Omega)^n\right)$; luego tiene sentido $< f, z(T) >$, $\forall f \in H^{-1}(\Omega)^n$.

Definición 3: *Decimos que p es solución por transposición del problema (13) si* $p \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)^n\right)$

y satisface

$$\int_{Q_T} p(y,t)\varphi(y,t)\, dy\, dt = < f, z(T) > \qquad (15)$$

para todo $\varphi \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)^n\right)$, *donde* z *es una solución fuerte de (14) correspondiente a* φ.

***Teorema 4**: Existe una única solución por transposición del sistema (13).*

Prueba: Consideremos la forma lineal

$$L : L^2\left(0,T;L^2(\Omega)^n\right) \rightarrow I\!R$$

definida por $L(\varphi) =< f, z(T) >$, $\forall \varphi \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)^n\right)$, $f \in H^{-1}(\Omega)^n$ y z solución única fuerte de (14) correspondiente a φ.

Así tenemos

$$\left| < f, z(T) > \right| = \| f \|_{H^{-1}(\Omega)^n} \| z(T) \|_{H_0^1(\Omega)^n}$$

Por otro lado, ver [4], tenemos

$$\| z(T) \|_{H_0^1(\Omega)^n} \leq \| z \|_{C^0\left([0,T];H_0^1(\Omega)^n\right)} \leq C \sum_{i=1}^{n} \int_0^T \left| \varphi_i(t) \right|^2 dt$$

luego

$$\left| < f, z(T) > \right| = \| f \|_{H^{-1}(\Omega)^n} \| \varphi \|_{L^2\left(0,T;L^2(\Omega)^n\right)} .$$

Así f es una forma lineal continua sobre $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)^n\right)$.. Por el teorema de representación de Riesz, existe única función

$$p \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)^n\right)$$

tal que

$$L(\varphi) = \int_{Q_T} p(y,t)\varphi(y,t)\, dy\, dt$$

Para todo $\varphi \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)^n\right)$

Haciendo $f = \Delta\psi \in H^{-1}(\Omega)^n$ tenemos que existe una única función p solución por transposición del problema (12), definido por (11), con la siguiente regularidad

$$p \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)^n\right) \cap C^0\left([0,T];H^{-1}(\Omega)\right) \qquad (\text{ ver [6] })$$

Sea v_ξ solución fuerte de (3) con $\omega = \xi$ es decir el lado derecho de (3) es dado por $\xi \chi_{\hat{q}_T} \in L^2(\Omega_T)^n$. Luego substituyendo en (11) v por v_ξ obtenemos

$$\int_{\hat{q}_T} p\xi\, dy\, dt = \int_{Q_T} p\xi \chi_{\hat{q}_T}\, dy\, dt = \left(\left(\psi, v_\xi(\mathrm{T})\right)\right) = 0 \ , \ \forall \xi \in L^2\left(\hat{q}_T\right)^n$$

dado que $\psi \in H_0^1(\Omega)^n$ y (10).

Luego $p=(0,\cdots,0)$ en $\hat{q}_T$ es decir $p_i=0$ en $\hat{q}_T$, $i=1,2,\cdots,n$.

La primera ecuación del sistema (12) se puede escribir considerando el caso $n=3$ (para visualizar mejor) como :

$$\begin{aligned}
&-p_1'-\Delta p_1+a_{11}p_1-div\left(\vec{b}_{11}\,p_1\right)=0\\
&-p_2'-\Delta p_1-\Delta p_2+a_{12}p_1+a_{22}p_2-div\left(\vec{b}_{12}\,p_1\right)-div\left(\vec{b}_{12}\,p_2\right)=0\\
&-p_3'-\Delta p_1-\Delta p_2-\Delta p_3+a_{13}p_1+a_{23}p_2+a_{33}p_3\\
&\qquad -div\left(\vec{b}_{13}\,p_1\right)-div\left(\vec{b}_{23}\,p_2\right)-div\left(\vec{b}_{33}\,p_3\right)=0
\end{aligned}\tag{16}$$

Así como $p_1=0$ en $\hat{q}_T$. Se sigue del resultado de unicidad dado en Caroline Fabre [3] que $p_1=0$ en Q_T .

Luego en la segunda línea de (16) tenemos

$$-p_2'-\Delta p_2+a_{22}p_2-div\left(\vec{b}_{12}\,p_2\right)=0$$

y como $p_2=0$ en $\hat{q}_T$ tenemos nuevamente del resultado de unicidad que $p_2=0$ en Q_T .

Finalmente en la última línea de (16) tenemos

$$-p_3'-\Delta p_3+a_{33}p_3-div\left(\vec{b}_{33}\,p_3\right)=0\ ,\text{ con } p_3=0 \text{ en } \hat{q}_T\ .$$

Nuevamente por el mismo resultado de unicidad tenemos

$$p_3=0 \text{ en } Q_T\ .$$

Así ; $(p_1,p_2,p_3)=(0,0,0)$ en Q_T .

En general tenemos

$$(p_1,p_2,\cdots,p_n)=(0,\cdots,0) \text{ en } Q_T\ .$$

Luego, dado que $p\in C^0\left([0,T];H^{-1}(\Omega)^n\right)$ tenemos que $p(T)=0$. Así $-\Delta\psi=0$ con $\psi\in H_0^1(\Omega)^n$ luego $\psi=0$, por otro lado como de (9) $v_k(T)-v_d \rightharpoonup \psi$ débilmente en $H_0^1(\Omega)^n$ resulta que

$$v_k(T)\rightharpoonup v_d \text{ débilmente en } H_0^1(\Omega)^n\ .$$

Haciendo $\xi=\omega_k$ en (6) tenemos

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\int_{\hat{q}_T}\omega_{ik}^2\,dy\,dt=-\sum_{i=1}^{n}\left(\left(v_{ik}(T)-v_{id},v_{ik}(\mathrm{T})\right)\right).$$

De allí tenemos

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\int_{\hat{q}_T}\omega_{ik}^2\, dy\, dt+\sum_{i=1}^{n}\| v_{ik}(T)-v_{id}\| = -\sum_{i=1}^{n}((v_{ik}(T)-v_{id}, v_{id})) .$$

Haciendo $k \to \infty$ tenemos

$$v_{ik}(T) \to v_{id} \text{ fuerte en } H_0^1(\Omega)$$

así

$$v_k(T) \to v_d \text{ fuerte en } H_0^1(\Omega)^n$$

Prueba del Teorema 3:

Sea $u_d \in H_0^1(\Omega_T)^n$, definimos $v_d(y) = u_d(k(T)y)$. Así $v_d \in H_0^1(\Omega)^n$, luego por el Lema 3.1 existe una sucesión $(v_k(T))_{k\in IN}$ con $v_k(T) \in R_L(T)$, $k \in IN$ tal que

$$v_k(T) \to v_d \text{ fuerte en } H_0^1(\Omega)^n$$

Sea ahora $u_k(x,t) = v_k(K^{-1}(t)x,t)$ luego de la equivalencia de los problemas (1) y (3) tenemos que $u_k(x,t)$ es solución fuerte de (1) para $\hat{\omega}_k(x,t) = \omega_k(K^{-1}(t)x,t)$ así

$$u_k(x,T) \in \hat{R}_L(T) \quad .$$

Probaremos ahora que $u_k(T) \to u_d$ fuerte en $H_0^1(\Omega_T)^n$. En efecto como

$$\int_\Omega | \nabla v_{ik}(y,T) - \nabla v_{id}(y) |^2\, dy$$

$$= \int_{\Omega_T} | \nabla u_{ik}(x,T)k(T) - \nabla u_{id}(x,T)k(T) |^2 \,| \det k(T) |\, dx$$

$$= \int_{\Omega_T} | \nabla u_{ik}(x,T) - \nabla u_{id}(x,T) |^2\, dx \quad \text{puesto que } k(T) \text{ es ortogonal.}$$

Luego, haciendo $k \to \infty$ tenemos

$$u_{ik} \to u_{id} \text{ fuerte en } H_0^1(\Omega_T)$$

así

$$u_k \to u_d \text{ fuerte en } H_0^1(\Omega_T)^n \quad .$$

Agradecimientos:

Al profesor Manuel Milla Miranda por la sugerencia y acompañamiento del tema y a los profesores J. Limaco y L. A. Medeiros por las constructivas conversaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BREZIS, H. Analyse Fonctionelle (Theory and applications). Masson, Paris, (1983).
2. FABRE, C.; PUEL, J. ; ZUAZUA, E. Approximate controllability of the semilinear heat equation, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 125 A, pp 31-61 (1995).
3. FABRE, C. Uniqueness results for Stockes Equations and their consequencias in linear and nonlinear control problems, ESAIM, vol. 1, pp 267-302, (1996).
4. LIONS, J. L. Remark on approximate controllability, Journal d'Analyse Mathématiques, vol. 59, pp 103-116, (1992).
5. LIONS, J. L. Sentinelles pour les systemes distribués à données incomplétes, RMA 21, Masson, (1992).
6. LÍMACO, J.; MEDEIROS, L. A. Remarks on approximate controllability in noncylindrical domains, 47° SBA pp. 1-51 (1998).
7. MILLA MIRANDA, M.; LÍMACO, J. The Navier-Stokes Equations in noncylindrical domain, Comput. Appl. Math. Vol 16, N° 3, pp 247-265 (1997).