PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. II - N° 2 Pgs. 57-72 Lima – Perú Dic. 1999

CONTROLE EXATO EM DOMÍNIO NÃO CILÍNDRICO PARA UM OPERADOR DO TIPO Δ^{2p}

R. F. Apolaya [1]
P. Gamboa [2]

1. INTRODUÇÃO

Seja um domínio limitado de $I\!R^n$ com fronteira de classe C^{4p} e suponhamos que Ω contém a origem de $I\!R^n$. Consideramos a função contínua $K : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ que verifica

i) $K \in W^{3,+\infty}_{loc}(0,+\infty)$

ii) $0 < K_0 = \inf_{t\geq 0} K(t)$, $K_1 = \sup_{t\geq 0} K(t) < +\infty$

iii) $r = \sup_{t\geq 0} | K'(t) | < +\infty$ (1.1)

iv) $L_1 = \int_0^{+\infty} | K'(t) | dt$, $L_2 = \int_0^{+\infty} | K''(t) | dt$

Estudamos a controlabilidade exata na fronteira, para um domínio não cilíndrico, de uma equação do seguinte tipo:

$$\begin{cases} u'' + \Delta^{2p} u = 0 & \text{em } \hat{Q} \text{ (domínio no cilíndrico)} \\ u = 0,\ \dfrac{\partial^i u}{\partial \nu^i} = 0 & \text{sobre } \hat{\Sigma},\ i = 1,2,\cdots,2(p-1) \\ \dfrac{\partial^{2p-1} u}{\partial \nu^{2p-1}} = g, & \text{sobre } \hat{\Sigma} \\ u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1 & \text{em } \Omega_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

O problema de controlabilidade exata na fronteira do sistema (1.2) formula-se da seguinte forma:

Dado $T > 0$, para cada $\{u^0, u^1\}$ em um espaço adequado, queremos determinar um controle na fronteira, denotado por g, de modo que a solução u do sistema (1.2) verifique a condição final

$$u(T) = u'(T) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega_T$$

1 Instituto de Matemática, UFF, Rua Mário de Santos Braga s/n, Niterói, CEP 24210; E-mail address: ganrefa@vm.uff.br

2 Instituto de Matemática, UFRJ, C. P. 68530, CEP 21944, Río de Janeiro, RJ; E-mail address: pgamboa@dmm.im.ufrj.br

O estudo do problema de controlabilidade exata do sistema (1.2) será feito aplicando o método H.U.M. o qual foi introduzido por J. L. Lions. Isto é possível pois o sistema (1.2) possui existência, regularidade, unicidade e reversibilidade de soluções.

O problema de controlabilidad exata na fronteira de equações em derivadas parciais, tem sido estudado por vários especialistas. O primeiro autor em resolver problemas de controlabilidade exata via método H.U.M. foi J. L. Lions. Depois outros autores estudaram o problema de controlabilidade exata, dentre eles podemos citar: J. P. Puel [9], C. Fabre [1], L. A. Medeiros e M. Milla Miranda [7], justamente as idéias deste último trabalho motivaram nossa análise apropiada para o problema de controlabilidade exata do sistema (1.2).

2. PRELIMINARES

Seja

$$\hat{Q} = \bigcup_{0<t<T} \Omega_t \times \{t\}, \qquad \hat{\Sigma} = \bigcup_{0<t<T} \partial\Omega_t \times \{t\};$$

onde $\hat{Q} \subset I\!R^{n+1}$.

Consideremos uma função contínua $k : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ tal que

i) $k \in W_{loc}^{3,+\infty}(]0,+\infty[)$;

ii) $0 < k^0 = \inf_{t\geq 0} k(t)$, $k^1 = \sup_{t\geq 0} k(t) < +\infty$;

iii) $r = \sup_{t\geq 0} | k'(t) | < +\infty$;

iv) $L_1 = \int_0^{+\infty} | k'(t) | \, dt$, $L_2 = \int_0^{+\infty} | k''(t) | \, dt$.

Definimos uma função $u : \hat{Q} \to I\!R$ por

$$u(\bar{x},T) = k^{-n}(t).v(\bar{y},t) \tag{2.1}$$

onde $v \in L^p(0,T;W_0^{m,q}(\Omega))$, $\bar{y} = \dfrac{\bar{x}}{k(t)}$, $k(t) > 0$ e $k^{-n}(t)$ sendo que $\check{\psi} : I\!R^{n+1} \to I\!R^{n+1}$;

$$\check{\psi}^{-1}(\bar{x},t) = (\bar{y},t) = \left(\frac{\bar{x}}{k(t)}, t \right) \text{ é um difeomorfismo.} \tag{2.2}$$

Denotemos com $\eta^* = \eta^*(\bar{x},t)$ o vetor normal unitário no ponto $(\bar{x},t) \in \hat{\Sigma}$, na direção da normal exterior de $\hat{Q}$, logo

$$\eta^*(\bar{x},t) = \left(\eta(\bar{y},t), -k'(t)(\eta(\bar{y}),\bar{y}) \cdot \left[1 + k'^2(t) \left| (\eta(\bar{y}),\bar{y}) \right|^2 \right]^{-1/2} \right) \tag{2.3}$$

onde $\bar{y} = \dfrac{\bar{x}}{k(t)}$ e $\eta(\bar{y},t)$ é o vetor normal unitário a Q no espaço $I\!R^n$. Assim a $\bar{x}$-componente do $\eta^*(\bar{x},t)$ será denotada por

$$v(\bar{x},t) = \eta\left(\frac{\bar{x}}{k(t)}, t \right)$$

3. RESUMO DE RESULTADOS SOBRE O CILINDRO

Consideremos o operador

$$Lw = w'' + b(t)\Delta^{2p} w + \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(\bar{y},t)\frac{\partial w}{\partial y_j} \right) + b_i(\bar{y},t)\frac{\partial w'}{\partial y_i} + \hat{d}_i \frac{\partial w}{\partial y_i} \tag{3.1}$$

Seu adjunto associado é dado por

$$L^* z = z'' + b(t)\Delta^{2p} z + \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(\bar{y},t)\frac{\partial z}{\partial y_j} \right) + b_i(\bar{y},t)\frac{\partial z'}{\partial y_i} + Pz \tag{3.2}$$

onde

$$Pz = cz' + d_i \frac{\partial z}{\partial y_i} + f.z$$

$$a_{ij}(\bar{y},t) = \left[\frac{k'(t)}{k(t)} \right]^2 y_i y_j, \quad b(t) = \left[\frac{1}{k(t)} \right]^{4p}$$

$$b_i(\bar{y},t) = -2\frac{k'(t)}{k(t)} y_i, \quad d_i(\bar{y},t) = \left[(1-n)k'^2(t) - k''(t)k(t) \right] k^{-2}(t) y_i$$

$$f(t) = n\left[(1+n)k'^2(t) - k''(t)k(t) \right] k^{-2}(t), \; \hat{d}_i(\bar{y},t) = \left[(1+n)k'^2(t) - k''(t)k(t) \right] k^{-2}(t) y_i$$

Consideremos o problema

$$\begin{cases} L^* z = h & \text{em } Q \\ z = \dfrac{\partial z}{\partial v} = \cdots = \dfrac{\partial^{2p-1} z}{\partial v^{2p-1}} = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ z(0) = z^0, \quad z'(0) = z^1 & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{3.3}$$

com dados iniciais

$$z^0 \in H_0^{2p}(\Omega), \quad z^1 \in L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad h \in L^1\big(0,T;L^2(\Omega)\big) \tag{3.4}$$

Definição 3.1. *Uma função $z: Q \to I\!R$ é chamada de solução fraca do problema (3.3)-(3.4) se*

$$z \in L^\infty\big(0,T;H_0^{2p}(\Omega)\big), \quad z' \in L^\infty\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$$

verificando

$$-\int_0^T (z',\psi')dt + \int_0^T \big(b\Delta^{2p}z,\psi\big)dt + \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\left[a_{ij}\frac{\partial z}{\partial y_j}\right],\psi\right)dt$$

$$-\int_0^T \left(b_i\frac{\partial z'}{\partial y_i},\psi\right)dt + \int_0^T (Pz,\psi)dt = \int_0^T (h,\psi)dt$$

para todo $\psi \in L^\infty\big(0,T;H_0^{2p}(\Omega)\big)$, $\psi' \in L^\infty\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$ *tal que* $\psi(0)=\psi(T)=0$ *verificando as condições iniciais*

$$z(0)=z^0, \quad z'(0)=z^1.$$

Teorema 3.1. *Se* $\{z^0,z^1,h\} \in H^{4p}(\Omega)\times H_0^{2p}(\Omega)\times W^{1,1}\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$, *então existe uma única solução forte* $z=z(x,t)$ *do problema (3.3)-(3.4) na classe*

$$z \in C\big([0,T];H_0^{2p}(\Omega)\cap H^{4p}(\Omega)\big)\cap C^1\big([0,T];H_0^{2p}(\Omega)\big)$$

verificando

$$L^* z = h \quad em \quad L^1\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$$

Teorema 3.2. *Se* $\{z^0,z^1,h\} \in H_0^{2p}(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^1\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$, *então:*

i) Existe uma única solução fraca $z=z(x,t)$ *do problema (3.3)-(3.4) na classe*

$$z \in C\big([0,T];H_0^{2p}(\Omega)\big)\cap C^1\big([0,T];L^2(\Omega)\big)$$

ii) A implição linear

$$H_0^{2p}(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^1\big(0,T;L^2(\Omega)\big) \to C\big([0,T];H_0^{2p}(\Omega)\big)\cap C^1\big([0,T];L^2(\Omega)\big)$$

$$\{z^0,z^1,h\} \mapsto z$$

é contínua na respectiva topologia.

iii) Se z verifica (i), obtemos:

$$E(t) = E(0) + \frac{1}{2}\int_0^t b'(s)\big|\Delta^{2p}z\big|^2\psi ds - \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\left[a_{ij}\frac{\partial z}{\partial y_j}\right],z'\right)ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\partial b_i}{\partial y_i}z',z'\right)\psi ds - \int_0^t (Pz,z')ds + \int_0^t (h,z')ds$$

Consideremos o problema não homogêneo:

$$\begin{cases} Lw = 0 & \text{em } Q \\ \dfrac{\partial^i w}{\partial \nu^i} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \quad i = 0,1,\cdots,2(p-1) \\ \dfrac{\partial^{2p-1} w}{\partial \nu^{2p-1}} = \xi & \text{sobre } \Sigma \\ w(0) = w^0, \quad w'(0) = w^1 & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{3.5}$$

Definição 3.2. *Se* $\{w^0, w^1, \xi\} \in L^2(\Omega) \times H^{-2p}(\Omega) \times L^2(\Sigma)$, *dizemos que* $w = w(x,t) \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$ *é uma solução ultra fraca do problema (3.5) se*

$$\int_0^T (w,h)dt = \langle w^1, z(0)\rangle - (w^1, z(0)) - \langle \frac{2k'(0)}{k(0)} y_i \frac{\partial w^0}{\partial y_i}, z(0)\rangle -$$

$$- \int_\Sigma \xi b(t) \Delta^p z d\Sigma.$$

Consideremos o problema não homogêneo:

$$\begin{cases} L^* z = h & \text{em } Q \\ \dfrac{\partial^i z}{\partial \nu^i} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \quad i = 0,1,\cdots,2p-1 \\ z(T) = 0, \quad z'(T) = 0 & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{3.6}$$

Teorema 3.3. *Se* $\{w^0, w^1, \xi\} \in L^2(\Omega) \times H^{-2p}(\Omega) \times L^2(\Sigma)$, *então existe uma única solução ultrafraca tal que*

$$w \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^{-2p}(\Omega)).$$

Além disso

$$\| w \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \| w' \|_{L^\infty(0,T;H^{-2p}(\Omega))} \leq C\left(| w^0 | + \| w^1 \|_{H^{-2p}(\Omega)} + | \xi |_{L^2(\Sigma)}\right).$$

Teorema 3.4. *Se* $T > T_0$, *então, para cada* $\{w^0, w^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-2p}(\Omega)$ *existe um controle* $\xi \in L^2(\Sigma)$ *tal que a solução ultrafraca w do problema (3.6) satisfaz*

$$w(T) = 0, \; w'(T) = 0$$

onde T_0 *é dado como em [4].*

Dado $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in D(\Omega) \times D(\Omega)$ definimos o problema homogéneo:

$$\begin{cases} L^* \varphi = 0 & \text{em } Q \\ \dfrac{\partial^i \varphi}{\partial \nu^i} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \quad i = 0,1,\cdots,2p-1 \\ \varphi(T) = \varphi^0, \quad \varphi'(T) = \varphi^1 & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{3.7}$$

tem uma única solução $\varphi = \varphi(x,t)$ que satisfaz $\Delta^p \varphi \in L^2(\Sigma)$.

Por outro lado, consideremos agora o problema retardado:

$$\begin{cases} L\psi = 0 & \text{em } Q \\ \dfrac{\partial^i \psi}{\partial \nu^i} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \quad i = 0,1,\cdots,2p-2 \\ \dfrac{\partial^{2p-1}\psi}{\partial \nu^{2p-1}} = \Delta^p \psi & \text{sobre } \Sigma \\ \psi(T) = 0, \ \psi'(T) = 0 & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{3.8}$$

tem uma única solução ultrafraca $\psi = \psi(x,t)$ sendo que ψ é solução de (3.7);

$$\psi \in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T];H^{-2p}(\Omega)\right).$$

Agora definimos o operador

$$\Lambda : D(\Omega)\times D(\Omega) \to H^{-2p}(\Omega)\times L^2(\Omega)$$

$$\{\varphi^0,\varphi^1\} \mapsto \Lambda\{\varphi^0,\varphi^1\} = \left\{\psi'(0) - \frac{2k'(0)}{k(0)} y_i \frac{\partial \psi}{\partial y_i}(0), -\psi(0)\right\}.$$

Dado que ψ é a solução ultrafraca do problema (3.8), obtenemos que

$$0 = \langle \psi'(0) - \frac{2k'(0)}{k(0)} y_i \frac{\partial \psi}{\partial y_i}(0), \psi^0 \rangle - \left(\psi(0),\psi^1\right) - \int_\Sigma b(t) \left| \Delta^p \varphi(t) \right|^2 d\Sigma.$$

Esta igualdade equivale a:

$$\langle \Lambda\{\varphi^0,\varphi^1\},\{\varphi^0,\varphi^1\}\rangle = \int_\Sigma b(t) \left| \Delta^p \varphi(t) \right|^2 d\Sigma \tag{3.9}$$

Logo, em $D(\Omega)\times D(\Omega)$, e (3.9), obtemos

$$\left\| \{\varphi^0,\varphi^1\} \right\|_F^2 = \int_\Sigma b(t) \left| \Delta^p \varphi(t) \right|^2 d\Sigma \tag{3.10}$$

Mas pelas desigualdades inversa e direta, ver [4] obtemos que $\|\cdot\|_F$ é uma norma equivalente à norma usual de $H_0^{2p}(\Omega)\times L^2(\Omega)$. Por tanto

$$F = \overline{D(\Omega)\times D(\Omega)}^{\|\cdot\|_F} = H_0^{2p}(\Omega)\times L^2(\Omega) \tag{3.11}$$

Daqui podemos estender $\Lambda : F \to F'$ sendo coercivo e pela igualdade (3.9) concluimos que Λ é um isomorfismo entre F e F'.

4. SOLUÇÕES FRACAS EM $\hat{Q}$

Dado $(\bar{x},t) \in \hat{Q}$ consideremos as seguintes funções

$$u(\bar{x},t) = w\left(\frac{\bar{x}}{k(t)},t\right), \quad \theta(\bar{x},t) = k^{-n}(t) z\left(\frac{\bar{x}}{k(t)},t\right) \quad \text{e} \quad v(\bar{x},t) = k^{-(n+p)}(t)\xi\left(\frac{\bar{x}}{k(t)},t\right).$$

Temos que

$$\Delta^{2p} u = k^{-4p}(t)\Delta^{2p} w \quad \text{e} \quad \Delta^{2p}\theta = k^{-(n+4p)}(t)\Delta^{2p} z$$

e

$$u'' = \frac{\partial}{\partial y_i}\left\{ k'^2(t)k^{-2}(t)y_i y_j \frac{\partial w}{\partial y_j}\right\} -$$

$$-2k'(t)k^{-1}(t)y_i\frac{\partial w'}{\partial y_i} + \left[(1-n)k'^2(t) - k''(t)k(t)\right]^2 k^{-2}(t)y_i\frac{\partial w}{\partial y_i} + w''$$

Portanto,

$$u''(\bar{x},t) + \Delta^{2p}u(\bar{x},t) = Lw\left(\frac{\bar{x}}{k(t)},t\right). \tag{4.1}$$

Lembrando que

$$Lw(\bar{y},t) = w'' + b(t)\Delta^{2p} w + \frac{\partial}{\partial y_i}\left[a_{ij}(\bar{y},t)\frac{\partial w}{\partial y_j}\right] + b_i(\bar{y},t)\frac{\partial w'}{\partial y_j} + d_i(\bar{y},t)\frac{\partial w}{\partial y_i}$$

Analogamente é possível obter

$$\theta''(\bar{x},t) + \Delta^{2p}\theta(\bar{x},t) = k^{-n}(t)L^*z\left(\frac{\bar{x}}{k(t)},t\right). \tag{4.2}$$

Tem-se que

$$L^*z = z'' + b(t)\Delta^{2p}z + \frac{\partial}{\partial y_i}\left[a_{ij}(\bar{y},t)\frac{\partial z}{\partial y_j}\right] + b_i(\bar{y},t)\frac{\partial z'}{\partial y_j} + Pz$$

Observação 4.1

$$\Omega_t = \{\bar{x} = k(t)\bar{y};\quad \bar{y}\in\Omega\},$$

isto é,

$$\check{\psi}(\bar{y}) = \check{\psi}(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (k(t)y_1, \cdots, k(t)y_n)$$

com $\check{\psi}(\bar{y}) = k(t)y_i, \quad i = 1,2,\cdots,n.$

Resulta que

$$\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial y_i} = k(t)^n$$

Da observação (4.1), obtenemos que

$$\int_0^T \int_{\Omega_t=\psi(\Omega)} \left(u'' + \Delta^{2p} u\right)\theta d\bar{x}dt = \int_0^T \int_\Omega Lw\left(\frac{\psi(\bar{y})}{k(t)}, t\right)\theta\left(\psi(\bar{y}), t\right)\left|\frac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)}\right| d\bar{y}dt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega Lw(\bar{y}, t)\left[k^n(t)\theta(\bar{x}, t)\right]d\bar{y}dt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega Lw(\bar{y}, t) z(\bar{y}, t) d\bar{y}dt$$

De forma similar, obtemos que

$$\int_0^T \int_{\Omega_t} \left(\theta'' + \Delta^{2p}\theta\right) u d\bar{x}dt = \int_0^T \int_\Omega L^* z(\bar{y}, t) w(\bar{y}, t) d\bar{y}dt$$

Observemos que se $\Gamma_t = \psi(\Gamma)$, resulta

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} k^{n-p}(t) v(\bar{x}, t)\Delta^p \theta(\bar{x}, t) d\Gamma_t dt =$$

$$\int_0^T \int_\Gamma k^{n-p}(t)\left[k^{-(n+p)}(t)\xi\left(\frac{\check{\psi}(\bar{y})}{k(t)}, t\right)\right] k^{-(n+2p)}(t)\Delta^{2p} z k^n(t) d\Gamma dt =$$

$$\int_0^T \int_\Gamma k^{-4p}(t)\xi(\bar{y}, t)\Delta^p z d\Gamma dt$$

Integrando por partes e aplicando a fórmula de Green, tem-se

$$\int_0^T \int_\Omega Lw.z d\bar{y}dt = \int_\Omega \left[w'(T)z(T) - w(T)z'(T)\right]d\bar{y} - \int_\Omega \left[w'(0)z(0) - w(0)z'(0)\right]d\bar{y} +$$

$$+ \int_\Omega (-2)\frac{k'(T)}{k(T)} y_i \frac{\partial w}{\partial y_i}(T) z(T) d\bar{y} - \int_\Omega (-2)\frac{k'(0)}{k(0)} y_i \frac{\partial w}{\partial y_i}(0) z(0) d\bar{y} + \tag{4.3}$$

$$\int_0^T \int_\Gamma k^{-4p}(t)\xi(\bar{y}, t)\Delta^p z(\bar{y}, t) d\Gamma dt + \int_0^T \int_\Omega w L^* d\bar{y}dt\ .$$

Mas,

$$\int_{\Omega_t} \left[u'(\bar{x}, t)\theta(\bar{x}, t) - u(\bar{x}, t)\theta'(\bar{x}, t)\right]dx = \int_\Omega \left[w'(\bar{y}, t) z(\bar{y}, t) - w(\bar{y}, t) z'(\bar{y}, t)\right]d\bar{y}$$

$$\int_\Omega (-2)\frac{k'(t)}{k(t)} y_i \frac{\partial w}{\partial y_i}(\bar{y}, t) z(\bar{y}, t) d\bar{y}. \tag{4.4}$$

Logo, de (4.3) e (4.4), obtemos

$$\int_0^T \int_{\Omega_t} \left(u'' + \Delta^{2p} u\right)\theta d\bar{x}dt = \int_{\Omega_T} \left[u'(\bar{x}, T)\theta(\bar{x}, T) - u(\bar{x}, T)\theta'(\bar{x}, T)\right]d\bar{x} -$$

$$- \int_{\Omega_0} \left[u'(\bar{x}, 0)\theta(\bar{x}, 0) - u(\bar{x}, 0)\theta'(\bar{x}, 0)\right]d\bar{x} + \int_0^T \int_{\Gamma_t} k^{-4p}(t) v(\bar{x}, t)\Delta^p \theta(\bar{x}, t) d\Gamma_t dt + \tag{4.5}$$

$$+ \int_0^T \int_{\Omega_t} u\left(\theta'' + \Delta^{2p}\theta\right) d\bar{x}dt$$

Motivados pelo resultado "formal" (4.5), consideramos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \theta'' + \Delta^{2p}\theta = \hat{h} & \text{em} \quad \hat{Q} \\ \theta = 0, \quad \dfrac{\partial^i \theta}{\partial \nu^i} = 0 & \text{sobre} \quad \hat{\Sigma}, \quad i = 0,1,\cdots,2p-1 \\ \theta(0) = \theta^0, \quad \theta'(0) = \theta^1 & \text{em} \quad \Omega_0 \end{cases} \tag{4.6}$$

sendo que

$$\left\{\theta^0, \theta^1, \hat{h}\right\} \in H_0^{2p}(\Omega_0) \times L^2(\Omega_0) \times L^1\left(0,T;L^2(\Omega_t)\right) \tag{4.7}$$

Definição 4.1. *Dizemos que* $\theta = \theta(x,t)$ *é uma solução fraca do problema (4.6) se*

$$\theta \in C\left([0,T];H_0^{2p}(\Omega_t)\right) \quad e \quad C^1\left([0,T];L^2(\Omega_t)\right)$$

verificando

$$-\int_0^T (\theta',\alpha')_{L^2(\Omega_t)}dt + \int_0^T \left(\Delta^p\theta, \Delta^p\alpha\right)_{L^2(\Omega_t)}dt = \int_0^T (\hat{h},\alpha')_{L^2(\Omega_t)}dt$$

para todo $\alpha \in L^2\left([0,T];H_0^{2p}(\Omega_t)\right)$, $\alpha' \in L^2\left([0,T];L^2(\dot{\Omega}_t)\right)$ *tal que* $\alpha(0) = \alpha(T)$ *e dados iniciais*

$$\theta(0) = \theta^0, \quad \theta'(0) = \theta^1$$

Consideremos agora o seguinte problema:

$$\begin{cases} L^* z = h & \text{em} \quad Q \\ \dfrac{\partial^i z}{\partial \nu^i} = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \quad i = 0,1,\cdots,2p-1 \\ z(0) = z^0, \quad z'(0) = z^1 & \text{em} \quad \Omega \end{cases} \tag{4.8}$$

sendo que

$$\left\{z^0, z^1, h\right\} \in H_0^{2p}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \tag{4.9}$$

Definição 4.2. *Dizemos que z é uma solução fraca do problema (4.8)-(4.9) se*

$$z \in C\left([0,T];H_0^{2p}(\Omega)\right), \quad z' \in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$$

verificando

$$-\int_0^T (z',\beta')dt + \int_0^T \left(b\Delta^{2p}z,\beta\right)dt + \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\left[a_{ij}\frac{\partial z}{\partial y_j}\right],\beta\right)dt$$

$$+\int_0^T \left(b_i\frac{\partial z'}{\partial y_i},\beta\right)dt + \int_0^T (Pz,\beta)dt = \int_0^T (h,\beta)dt$$

para todo $\beta \in L^2(0,T;H_0^{2p}(\Omega))$, $\beta' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ *tal que* $\beta(0)=\beta(T)=0$ *e os dados iniciais*

$$z(0)=z^0 \quad e \quad z'(0)=z^1$$

Teorema 4.1. *Seja*

$$\theta(\bar{x},t)=k^{-n}(t)z\left(\frac{\bar{x}}{k(t)},t\right)$$

onde z *é uma solução fraca do problema (4.8)-(4.9) se e só se* θ *é uma solução fraca do problema (4.6)-(4.7) sendo que os dados iniciais* $\left\{\theta^0,\theta^1,\hat{h}\right\}$ *e* $\{z^0,z^1,h\}$ *encontram-se relacionados por*

$$\theta^0(\bar{x})=k^{-n}(0)z^0\left(\frac{\bar{x}}{k(0)}\right) \tag{4.10}$$

$$\theta^1(\bar{x})=-nk^{-(n+1)}(0)k'(0)z^0\left(\frac{\bar{x}}{k(0)}\right)-$$

$$-k^{-(n+1)}(0)k'(0)y_i\frac{\partial z^0}{\partial y_i}\left(\frac{\bar{x}}{k(0)}\right)+k^{-n}(0)z'\left(\frac{\bar{x}}{k(0)}\right) \tag{4.11}$$

Demonstração: Suponhamos que z é uma solução fraca do problema (4.8)-(4.9), isto é,

$$-\int_0^T(z',\beta')dt+\int_0^T\left(b\Delta^{2p}z,\beta\right)dt+\int_0^T\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\left[a_{ij}\frac{\partial z}{\partial y_j}\right],\beta\right)dt$$

$$+\int_0^T\left(b_i\frac{\partial z'}{\partial y_i},\beta\right)dt+\int_0^T(Pz,\beta)dt=\int_0^T(h,\beta)dt \tag{4.12}$$

para todo $\beta \in L^2(0,T;H_0^{2p}(\Omega))$, $\beta' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ tal que $\beta(0)=\beta(T)=0$.

De (4.9), obtemos

$$\{z^0,z^1,h\}\in H_0^{2p}(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^1(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.13}$$

Daqui existem $\{z_m^0,z_m^1,h_m\}\in \left(H_0^{2p}(\Omega)\cap H^{4p}(\Omega)\right)\times H_0^{2p}(\Omega)\times W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$, tais que

$$\begin{cases} z_m^0 \to z^0 & \text{em } H_0^{2p}(\Omega) \\ z_m^1 \to z^1 & \text{em } L^2(\Omega) \\ h_m \to h & \text{em } L^1(0,T;L^2(\Omega)) \end{cases} \tag{4.14}$$

Logo de uma substitução $\{z_m^0,z_m^1,h_m\}$ no problema (4.8)-(4.9) e pelo Teorema 1, existe z_m soluções fortes do problema (4.8) verificando

$$-\int_0^T\int_\Omega z_m'\beta' dt+\int_0^T\int_\Omega b\Delta^p z_m,\Delta^p\beta dt+\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_i}\left[a_{ij}\frac{\partial z}{\partial y_j}\right]\beta dt+$$

$$+\int_0^T\int_\Omega b_i\frac{\partial z_m'}{\partial y_i}\beta d\bar{y}dt+\int_0^T\int_\Omega Pz_m\beta d\bar{y}dt=\int_0^T\int_\Omega h_m\beta d\bar{y}dt \qquad (4.15)$$

Mas

$$\theta''(\bar{x},t)=k^{-n}(t)\left[z_m''+\frac{\partial}{\partial y_i}\left[a_{ij}\frac{\partial z_m}{\partial y_j}\right]+b_i\frac{\partial z_m'}{\partial y_i}+Pz_m\right] \qquad (4.16)$$

Se $\beta\left(\frac{\bar{x}}{k(t)},t\right)=\alpha(\bar{x},t)$ então de (4.16) tem-se que

$$\int_0^T\int_{\Omega_t}\theta_m''(\bar{x},t)\alpha(\bar{x},t)d\bar{x}dt=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega k^{-n}(t)\left[z_m''+\frac{\partial}{\partial y_i}\left[a_{ij}\frac{\partial z_m}{\partial y_j}\right]+b_i\frac{\partial z_m'}{\partial y_i}+Pz_m\right]\beta k^n(t)d\bar{x}dt \qquad (4.17)$$

$$\int_0^T\int_{\Omega_t}\Delta^p\theta_m\Delta^p\alpha d\bar{x}dt=\int_0^T\int_\Omega k^{-(n+2p)}(t)\Delta^p zk^{-2p}(t),\Delta^p\beta k^n(t)d\bar{y}dt \qquad (4.18)$$

Então, substituindo (4.17), (4.18) na equação (4.15), resulta que

$$\int_0^T\int_{\Omega_t}\theta_m''(\bar{x},t)\alpha(\bar{x},t)d\bar{x}dt+\int_0^T\int_{\Omega_t}\Delta^p\theta_m\Delta^p\alpha d\bar{x}dt=$$

$$=\int_0^T\int_{\Omega_t}\check{h}_m(\bar{x},t)\alpha(\bar{x},t)d\bar{x}dt \qquad (4.19)$$

onde $\check{h}_m=k^{-n}(t)h_m$.

Integrando por partes em (4.19), obtemos

$$-\int_0^T\int_{\Omega_t}\theta_m'(\bar{x},t)\alpha'(\bar{x},t)d\bar{x}dt+\int_0^T\int_{\Omega_t}\Delta^p\theta_m\Delta^p\alpha d\bar{x}dt=$$

$$=\int_0^T\int_{\Omega_t}\check{h}_m(\bar{x},t)\alpha(\bar{x},t)d\bar{x}dt \qquad (4.20)$$

Mas

$$z_m\to z \qquad \text{em } C\left([0,T];H_0^{2p}(\Omega)\right)$$

$$z_m'\to z' \qquad \text{em } C\left([0,T];L^2(\Omega)\right). \qquad (4.21)$$

Então, lembrando que $\check{\psi}$ é um difeomorfismo, obtemos de (4.21):

$$\theta_m\to\theta \qquad \text{em } C\left([0,T];H_0^{2p}(\Omega_t)\right)$$

$$\theta_m'\to\theta' \qquad \text{em } C\left([0,T];L^2(\Omega_t)\right). \qquad (4.22)$$

Usando (4.22) na passagem ao limite em (4.20), obtemos

$$-\int_0^T\int_{\Omega_t}\theta'(\bar{x},t)\alpha'(\bar{x},t)d\bar{x}dt+\int_0^T\int_{\Omega_t}\Delta^p\theta\Delta^p\alpha d\bar{x}dt=$$
$$=\int_0^T\int_{\Omega_t}\check{h}(\bar{x},t)\alpha(\bar{x},t)d\bar{x}dt \tag{4.23}$$

sendo que

$$\check{h}_m\to\check{h}\quad\text{em}\quad L^2(0,T;L^2(\Omega_t)),\qquad \check{h}(\bar{x},t)=k^{-n}(t)h(\bar{y},t)\ .$$

Notemos que a partir de

$$\theta'(\bar{x},t)=-nk^{-(n+1)}(t)k'(t)z\left(\frac{\bar{x}}{k(t)},t\right)-k^{-(n+1)}(t)k'(t)y_i\frac{\partial z}{\partial y_i}\left(\frac{\bar{x}}{k(t)},t\right)+k^{-n}(t)z'\left(\frac{\bar{x}}{k(t)},t\right)$$

mostra-se que $u(0)=u^0$ e $u'(0)=u^1$. Para isso, basta que se tome $t=0$.

Também devemos observar que a unicidade do problema (4.7) é uma conseqüência do Teorema.

Observação 4.2. *Temos:*

$$\theta(\bar{x},t)=k^{-n}(t)z\left(\frac{\bar{x}}{k(0)},t\right)=k^{-n}(t)z(\bar{y},t)$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial\nu}(\bar{x},t)=k^{-(n+1)}(t)\frac{\partial z}{\partial\eta}(\bar{y},t)\ ,$$
$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\nu^2}(\bar{x},t)=k^{-(n+2)}(t)\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}(\bar{y},t)$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial^{2p-1}\theta}{\partial\nu^{2p-1}}(\bar{x},t)=k^{-[n+(2p-1)]}(t)\frac{\partial^{2p-1}z}{\partial\eta^{2p-1}}(\bar{y},t)$$

Observação 4.3. *Se é considerada a mudança $t=0$ por $t-T$ no problema (4.7)-(4.8), então pode-se obter os mesmos resultados anteriores para a solução w do correspondente problema retrógado.*

Queremos estudar o seguinte problema:

$$\begin{cases} u''+\Delta^{2p}u=0 & \text{em}\quad \hat{Q}\\ u=0,\quad \dfrac{\partial^i u}{\partial\nu^i}=0 & \text{sobre}\quad \hat{\Sigma},\quad i=1,2,\cdots,2(p-1)\\ \dfrac{\partial^{2p-1}z}{\partial\nu^{2p-1}}=v & \text{sobre}\quad \hat{\Sigma}\\ u(0)=u^0,\quad u'(0)=u^1 & \text{em}\quad \Omega,\end{cases} \tag{4.24}$$

sendo que

$$\{u^0,u^1,v\}\in L^2(\Omega_0)\times H^{-2p}(\Omega_0)\times L^1(0,T;L^2(\Gamma_t)) \tag{4.25}$$

Definição 4.3. *Dizemos que* $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))$ *é uma solução ultrafraca do problema (4.24)-(4.25) se*

$$\int_0^T (u,\check{h})^2_L(\Omega_t)dt = \langle u^1,\theta'(0)\rangle_{H^{-2p}(\Omega_0)\times H_0^{2p}(\Omega_0)} - \left(u^0,\theta'(0)\right)_{L^2(\Omega_0)} -$$

$$-\int_0^T\int_{\Gamma_t} k^{n-p}(t)v(\bar{x},t)\Delta^p\theta(\bar{x},t)d\Gamma_t dt \qquad (4.26)$$

para todo $\check{h} \in L^1(0,T;L^2(\Omega_t))$, *com* θ *solução fraca do problema*

$$\begin{cases} \theta'' + \Delta^{2p}\theta = \check{h} & \text{em } \hat{Q} \\ \theta = 0, \quad \dfrac{\partial^i\theta}{\partial v^i} = 0 & \text{sobre } \hat{\Sigma}, \quad i = 1,2,\cdots,2p-1 \\ \theta(T) = 0, \quad \theta'(T) = 0 & \text{em } \Omega_0 \end{cases} \qquad (4.27)$$

Teorema 4.2. *Seja*

$$u(\bar{x},t) = w\left(\frac{\bar{x}}{k(t)},t\right),$$

w é uma solução ultrafraca do problema (3.5) se e só se u é uma solução ultrafraca do problema (4.24). Além disso, os dados iniciais relacionam-se por

$$u^0(\bar{x}) = w^0\left(\frac{\bar{x}}{k(0)}\right); \qquad (4.28)$$

$$\langle u^1,\alpha\rangle = \langle -\frac{k'(0)}{k(0)}y_i\frac{\partial w^0}{\partial y_i} + w^1,\beta\rangle \qquad (4.29)$$

sendo que $\alpha(\bar{x}) = k^{-n}(0)\beta\left(\dfrac{\bar{x}}{k(0)}\right)$, $\alpha \in H_0^{2p}(\Omega_0)$, *e*

$$v(\bar{x},t) = k^{-(n+2p-1)}(t)\xi(\bar{y},t), \qquad \bar{y} = \left(\frac{\bar{x}}{k(t)}\right) \qquad (4.30)$$

Demonstração: Inicialmente lembremos que

$$\int_0^T\int_{\Omega_t} u\check{h}(\bar{x},t)d\bar{x}dt = \int_0^T\int_{\Omega} w(\bar{y},t)k^{-n}(t)h(\bar{y},t)k^n(t)d\bar{y}dt$$

$$= \int_0^T\int_{\Omega} w(\bar{y},t)h(\bar{y},t)d\bar{y}dt.$$

Logo, por (4.3). Teorema 3 e densidade, conclui-se a demostração.

Observação 4.4. *Seja* $v^0(\bar{y}) = u^0(k(t)\bar{y},t)$ *com* $u^0 \in L^2(\Omega)$. *Então*

$$\langle x_i\frac{\partial u^0}{\partial x_i},\alpha\rangle_{H^{-2p}(\Omega_0)\times H_0^{2p}(\Omega_0)} = \langle\frac{x_i}{k(t)}\frac{\partial w^0}{\partial y_i},\alpha\rangle_{H^{-2p}(\Omega_0)\times H_0^{2p}(\Omega_0)}, \qquad \alpha \in H_0^{2p}(\Omega_0)$$

$com\ \alpha(\bar{x}) = k^{-n}(0)\beta\left(\frac{\bar{x}}{k(0)}\right).$

De fato

$$\langle x_i \frac{\partial u^0}{\partial x_i}, \alpha\rangle = \langle \frac{\partial u^0}{\partial x_i}, x_i\alpha\rangle = -\left(u^0 \frac{\partial(x,\alpha)}{\partial x_i}\right) = -\int_0^T \int_{\Omega_t} u^0\left[\alpha + x_i \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\right] d\bar{x}dt$$

$$= -\int_0^T \int_{\Omega_t} u^0\left(\frac{\bar{x}}{k(0)}\right)\left[k^{-n}(0)\beta\left(\frac{\bar{x}}{k(0)}\right) + k(0)y_i k^{-(n+1)}(0)\frac{\partial \beta}{\partial y_i}\right]k^n(0)d\bar{y}dt$$

$$= -\int_0^T \int_{\Omega} w^0(\bar{y},t)\left[\beta(\bar{y}) + y_i \frac{\partial \beta}{\partial y_i}(\bar{y})\right] d\bar{y}dt$$

$$= -\left(w^0, \frac{\partial(y_i\beta)}{\partial y_i}\right) = \langle y_i \frac{\partial w^0}{\partial y_i} \beta\rangle$$

Notemos que a partir do Teorema 4.2 mostra-se a unicidade do problema (4.24). Logo

$$u \in C([0,T]; L(\Omega_t)) \cap C^1([0,T]; H^{-2}(\Omega_t)')$$

e

$$\int_0^T \int_{\Gamma_t} k^{(n-1)}(t)\frac{\partial^{2p-1}\theta}{\partial \nu^{2p-1}}(\bar{x},t)\Delta^p\theta(\bar{x},t)d\bar{x}dt =$$

$$= \int_0^T \int_{\Gamma} k^{(n-1)}(t)k^{-(n+2p-1)}(t)\frac{\partial^{2p-1}z}{\partial \eta^{2p-1}}(\bar{y},t)k^{-(n+2p)}(t)\Delta^p z(\bar{y})k^n(t)d\bar{y}dt =$$

$$= \int_0^T \int_{\Gamma} k^{-4p}(t)\frac{\partial^{2p-1}z}{\partial \eta^{2p-1}}(\bar{y},t)\Delta^p z(\bar{y},t)d\bar{y}dt$$

Teorema 4.3. *Se $T > T_0$, então para cada par de dados iniciais $\{u^0, u^1\} \in L^2(\Omega_0) \times H^{-2p}(\Omega_0)$ existe um controle $v \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_t))$ tal que a solução ultrafraca v do problema (4.24) satisfaz*

$$u(T) = u'(T) = 0$$

e também o controles $v = \Delta^p\theta$, sendo que θ é solução de (4.6).

Demonstração: Consideremos o problema (4.24), onde o conjunto $\hat{Q}$ é definido para os $T > T_0$. Pelo Teorema 4.1 existe um isomorfismo G_1 tal que $G_1\{z^0, z^1\} = \{\theta^0, \theta^1\}$. Analogamente, pelo Teorema 4.2 temos un isomorfismo G_2 tal que $G_2\{w^0, w^1\} = \{u^0, u^1\}$. Definimos as aplicações isomorfas

$$\sigma\{w^0, w^1\} = \left\{w^1 - 2\frac{k'(0)}{k(0)}y_i \frac{\partial w^0}{\partial y_i} - w^0\right\} ,$$

$$\Lambda\{z^0,z^1\}=\left\{w^1-2\frac{k'(0)}{k(0)}y_i\frac{\partial w^0}{\partial y_i}-w^0\right\}.$$

Assim, definimos

$$\Lambda_1=G_1\Lambda^{-1}\sigma G_2^{-1};\qquad \Lambda_1:L^2(\Omega_0)\times H^{-2p}(\Omega_0)\to H_0^{2p}(\Omega_0)\times L^2(\Omega_0),\tag{4.31}$$

isto é,

$$\Lambda_1\{u^0,u^1\}=\{\theta^0,\theta^1\}$$

Seja $\{u^0,u^1\}\in L^2(\Omega_0)\times H^{-2p}(\Omega_0)$. Então por (4.31), obtemos $\{\theta^0,\theta^1\}\in H_0^{2p}(\Omega_0)\times L^2(\Omega_0)$.

Logo, podemos considerar o problema

$$\begin{cases}\theta''+\Delta^{2p}\theta=\hat{h} & \text{em } \hat{Q}\\ \theta=0,\quad \dfrac{\partial^i\theta}{\partial v^i}=0 & \text{sobre } \hat{\Sigma},\quad i=1,2,\cdots,2p-1\\ \theta(0)=\theta^0,\quad \theta'(0)=\theta^1 & \text{em } \Omega_0\end{cases}\tag{4.32}$$

Por outro lado, dado que $\{\theta^0,\theta^1\}\in H_0^{2p}(\Omega_0)\times L^2(\Omega_0)$ podemos obter

$$\{z^0,z^1\}=G_1^{-1}\{\theta^0,\theta^1\}\in H_0^{2p}(\Omega_0)\times L^2(\Omega_0).$$

Definimos o problema

$$\begin{cases}L^*z=h & \text{em } Q\\ \dfrac{\partial^i z}{\partial v^i}=0 & \text{sobre } \Sigma,\quad i=0,1,\cdots,2p-1\\ z(0)=z^0,\quad z'(0)=z^1 & \text{em } \Omega\end{cases}\tag{4.33}$$

Então, de (4.33) e o Teorema 3.2, existe uma única solução fraca z de (4.33) tal que $\Delta^p z\in L^2(\Sigma)$.

Consideremos o problema

$$\begin{cases}Lw=0 & \text{em } Q\\ \dfrac{\partial^i w}{\partial\eta^i}=0 & \text{sobre } \Sigma,\quad i=0,1,\cdots,2p-2\\ \dfrac{\partial^{2p-1}w}{\partial\eta^{2p-1}}=k^{-1}(t)\Delta^p z & \text{sobre } \Sigma\\ w(T)=w^0,\quad w'(T)=w^1 & \text{em } \Omega\end{cases}\tag{4.34}$$

Logo, por (4.34) e Teorema 3.3, existe uma única solução ultrafraca w de (4.34). Além disso, se $T > T_0$ então o Teorema 3.4 garante que a solução ultrafraca w de (4.34) satisfaz

$$w(\bar{y},t) = 0\,, \quad w'(\bar{y},T) = 0\,, \quad \bar{y} \in \Omega\,. \tag{4.35}$$

Então, pelo Teorema 4.2, existe uma solução ultrafraca para o problema (4.24). Mas, como $u(\bar{y},t) = w(\bar{y},t)$, de (4.35) segue que

$$u(\bar{x},T) = 0\,, \quad u'(\bar{x},T) = 0\,. \tag{4.36}$$

De (4.30) e (4.35) obtemos

$$v = k^{-(n+2p)}(t)\Delta^p z = \Delta^p \theta\,.$$

REFERÊNCIAS

1. FABRE, C. Et. PUEL, J., *Comportement au voisinage du bord des solutions de L'equations des ondes*, C. R. Acad. Sci. Paris, 310 série I (1990) pp. 621-625.
2. FUENTES, R., *Controlabilidade exata de uma equação de ondas com coeficientes variáveis*, Tese de Doutorado, IM-UFRJ, Río de Janeiro, RJ, Brasil, (1991).
3. GAMBOA, P.., *Controle exato para a equação Euler-Bernoulli num domínio não cilíndrico*, Tese de Doutorado, IM-UFRJ, Río de Janeiro, RJ, Dezembro, (1995), Brasil.
4. GAMBOA, P.., *Controle exato para um operador do tipo* Δ^{2p}, 46° Seminário Brasileiro de Análise, SBA, RJ, Brasil, Novembro, (1997).
5. MEDEIROS, L.A. and FUENTES, R., *Exact Controllability for a model of the one dimensional elasticity*, 36° Seminário Brasileiro de Análise, SBA, (1992).
6. MEDEIROS, L.A. e MILLA MIRANDA, M., *Introdução aos espaços de Sobolev e às equações diferenciais parciais*, IM-UFRJ, Río de Janeiro, RJ, Brasil (1989).
7. MILLA MIRANDA, M., *M. HUM and the wave equations with variant coefficient*, Asymptotic Analysis 11 (1996), pp. 317-341.
8. MILLA MIRANDA, M. and MEDEIROS, L. A., *Exact controllability for Schrödinger equations in non cylindrical domains*, 41° Seminário Brasileiro de Análise, RJ, 1995, Brasil.
9. PUEL, J. P., *Contrôlabilité Exacte et comportement au vosinage du bord des solutions de L'equations de ondes*, IM-UFRJ, Río de Janeiro, (1991).
10. LIONS, J. L. and MAGENES, E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol. 1, Dunod, (1968).
11. SORIANO, J. A., *Controlabilidade exata da equação de onda com coeficientes variáveis*, Tese de Doutorado, Río de Janeiro, RJ, Brasil, (1993).
12. ZUAZUA, E., *Lectures Notes on exact control and stabilization*, IM-UFRJ, Río de Janeiro, RJ, Brasil.