PESQUIMAT, Revista de la Fac.CC.MM. de la
UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Vol.IV, $N^\circ 2$, pág.1-6, LIMA-PERÚ. Diciembre 2001

DECAIMIENTO EXPONENCIAL PARA MATERIALES PARCIALMENTE TERMOESLÁTICO

Alfonso Perez Salvatierra[1]

ABSTRACT. *En el presente trabajo se obtiene el decaimiento exponencial del sistema,*

$$\left| \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + div\,(a\,(x)\,\nabla\theta) & = 0 \quad en\ \Omega \times \langle 0, +\infty\rangle \\ \theta_t - \Delta\theta + div\,(a\,(x)\,\nabla u_t) & = 0 \quad en\ \Omega \times \langle 0, +\infty\rangle \end{array} \right.$$

con las condiciones iniciales:

$$(u_0,u_1,\theta_1) \in \left[H_0^1\,(\Omega) \cap H^2\,(\Omega)\right] \times \left[H_0^1\,(\Omega)\right] \times \left[H_0^1\,(\omega) \cap H^2\,(\omega)\right]$$

donde ω es una vecindad de una parte de $\partial\Omega = \Gamma$

1. INTRODUCCIÓN

Estudiamos el sistema parcialmente termoelástico $(*)$ con sus respectivas condiciones iniciales y de frontera

$$(*) \qquad \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} u_{tt} - \Delta u + div\,(a\,(x)\,\nabla\theta) = 0 \quad \text{en } \Omega \times \langle 0, +\infty\rangle \\ \theta_t - \Delta\theta + div\,(a\,(x)\,\nabla u_t) = 0 \quad \text{en } \Omega \times \langle 0, +\infty\rangle \end{array} \right. \\ \left| \begin{array}{ll} u\,(x,0) = u_0\,(x) & \text{en } \Omega \\ u_t\,(x,0) = u_1\,(x) & \text{en } \Omega \quad \text{condiciones iniciales} \\ \theta\,(x,0) = \theta_1\,(x) & \text{en } \Omega \end{array} \right. \\ \left| \begin{array}{l} u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega = \Gamma \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{condiciones de frontera} \\ \theta = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega = \Gamma \end{array} \right. \end{array}$$

con las siguientes hipótesis; $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto bien regular, acotado, con frontera Γ de clase C^2, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 : \Gamma_1 = \{x \in \Gamma;\, m\,(x) \cdot \nu > 0\}$, $\Gamma_2 = \{x \in \Gamma;\, m\,(x) \cdot \nu < 0\}$, $m\,(x) = x - x_0$, ν normal unitário, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fijo. $a \in L^\infty\,(\Omega) \cap C^2\,(\Omega)$ tal que

[1]Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas.

$a(x) > 0$ en ω_ε y $a(x) = 0$ en $\Omega - \omega_{2\varepsilon}$ y satisface : $|\triangle a(x)|^2 \leq Ca(x)$, $|\nabla a(x)|^2 \leq Ca(x)$, $\forall x \in \omega_\varepsilon$; $\nabla\theta \cdot \nabla(\theta u) \geq 0$ en Ω.

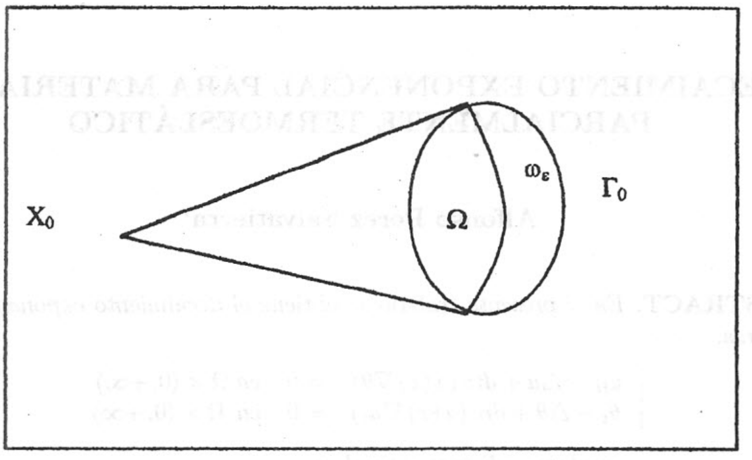

Figura 0.1

Además

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), u_1 \in H_0^1(\Omega), \theta_0 \in H_0^1(\omega) \cap H^2(\omega).$$

Ahora haciendo $v = u_t$ en $(*)$ se obtiene el sistema matricial, con sus condiciones iniciales siguientes:

$$(**) \quad \left| \begin{array}{l} U' = AU + G(U) \quad , \quad U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \\ U(0) = U_0 \end{array} \right.$$

donde $A : X \to X$ es un operador con las siguientes características:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ \triangle & 0 & -\nabla a \nabla \\ 0 & -\nabla a \nabla & \triangle \end{pmatrix}, \quad G(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -a\triangle\theta \\ -a\triangle v \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} D(A) &= (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \times (H_0^1(\omega) \cap H^2(\omega)), \\ X &= \overline{D(A)} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\omega). \end{aligned}$$

Se define el producto interno en X dado por

$$(U, V) \int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 dx + \int_\Omega v_1 v_2 dx + \int_\Omega \theta_1 \theta_2 dx$$

con

$$U=\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \quad V=\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \in X.$$

Luego aplicando el teorema de Lumer Philps y del hecho que $G(U)$ es localmente Lipschitziana, se deduce la existencia y la unicidad del sistema $(**)$ y por ende de $(*)$. Para su decaimiento, por el método de Liapunov se define la energía

$$E(t)=E_1(t)+E_2(t)$$

donde

$$\begin{aligned} E_1(t) &= \frac{1}{2}\left[\|u_t(t)\|^2+\|\nabla u(t)\|^2+\|\theta(t)\|^2\right], \\ E_2(t) &= \frac{1}{2}\left[\|u_t(t)\|^2+\|\nabla u_t(t)\|^2+\|\theta(t)\|^2\right]. \end{aligned}$$

Definimos

$$E_3(t)=\frac{1}{2}\left[\|\nabla u_t(t)\|^2+\|\Delta u(t)\|^2+\|\nabla\theta(t)\|^2\right]$$

Multiplicando $(*)_1$ por u_t y $(*)_2$ por (θ); luego sumando obtenemos:

$$\frac{d}{dt}E_1(t)=-\|\nabla\theta(t)\|^2+2\int_\Omega a(x)\nabla u_t\cdot\nabla\theta dx.$$

Derivando $(*)_1$ respecto a t y multiplicando por u_{tt} además derivando $(*)_2$ respecto a t y multiplicando por θ_t, luego sumando obtenemos:

$$\frac{d}{dt}E_2(t)=-\|\nabla\theta(t)\|^2+2\int_\Omega a(x)\nabla u_{tt}\cdot\nabla\theta_t dx.$$

Multiplicando $(*)_1$ por $-\Delta u_t$ y $(*)_2$ por $-\Delta\theta$; luego sumando obtenemos:

$$\frac{d}{dt}E_3(t)=-\|\Delta\theta(t)\|^2-\int_\Omega \Delta a\nabla\theta\cdot\nabla u_t\cdot\nabla\theta_t dx.(x)+2\int_\Omega a(x)\Delta\theta\Delta u_t dx.$$

Se puede observar que en $E_3(t)$ aparece un término con derivada de segundo orden, el cual no es posible acotar usando las desigualdades de Sobolev. Para ello se hace uso de la siguiente proposición

Proposición 1.

Sea $v\in C(0,T;H^2(\Omega))\cap C^1(0,T;H^1(\Omega))\cap C^2(0,T;L^2(\Omega))$.
La solución de la ecuación

$$\left| \begin{array}{r} v_{tt} - \triangle v = f \quad \text{en}\, Q \\ v = 0 \quad \text{sobre} \sum \end{array} \right.$$

y $g = (g_1, ..., g_n) \in [C^2(\Omega)]^n$. Entonces v satisface:

$$-\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} v_t g_k \frac{\partial v}{\partial x_k} dx =$$

$$-\int\limits_{\Omega} f g_k \frac{\partial v}{\partial x_k} dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial g_k}{\partial x_k} \left[|v_t|^2 - |\nabla v|^2 \right] dx + \int\limits_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla g_k \frac{\partial v}{\partial x_k} dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma} g_k v_k \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma.$$

De donde se puede deducir para un N bastante grande, el operador de Liapunov :

$$K(t) = NE(t) + E_3(t) + \int\limits_{\Omega} a(x) \nabla \theta \cdot \nabla u_t dx$$

$$-C \int\limits_{\Omega} a(x)^2 u_t \triangle u dx - \varepsilon \int\limits_{\Omega} a(x)^3 \nabla u_t \nabla u_{tt} dx + 2\tilde{\varepsilon} \int\limits_{\Omega} \eta \nabla u_t \cdot \nabla u_{tt} dx,$$

$$N(t) =$$

$$\int\limits_{\Omega} (a + a^2) \left[|\nabla u_t|^2 + |\triangle u|^2 \right] dx + \int\limits_{\omega} \left[|\nabla \theta|^2 + |\triangle \theta|^2 \right] dx + \int\limits_{\Gamma} \left| \frac{\partial \nabla u_t}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma > 0, \forall t > 0.$$

Se prueba que:

$(***)$

$$\frac{d}{dt} K(t) \leq -CN(t) - C_0 \int\limits_{\omega} |\nabla \theta_t|^2 dx.$$

Con las hipótesis de regularidad para u, θ y de $a(x)$ obtenemos:

Proposición 2.

$$(1 - \frac{2L}{T\sqrt{\beta}}) \int_0^T E(t) dt \leq C \int_0^T \int\limits_{\Omega} a(x) (|\nabla u_t|^2 + |\triangle u|^2) dx dt +$$

$$C \int_0^T \int\limits_{\omega} (|\nabla \theta|^2 + |\triangle \theta_t|^2) dx dt + \int\limits_{\Gamma} \left| \frac{\partial \nabla u_t}{\partial v} \right|^2 d\Gamma > T > \frac{2L}{\sqrt{\beta}}.$$

Con las hipótesis de la proposición (2) obtenemos el teorema central.

Teorema

Existen, $C\gamma < 0$ tal que $E(t) \leq CE(0) \leq e^{-\gamma t}$.

2. DEMOSTRACIÓN

Es fácil ver: $\exists\, C_0, C_1 > 0$ tal que

(1)

$$C_0 E(t) \leq K(t) \leq C_1 E(t).$$

De $(***)$ para N bastante grande:

$$\frac{d}{dt}K(t) \leq -CN(t)$$

integrando de 0 a T:

(2)

$$K(t) \leq K(0) - C\int_0^T N(t)dt.$$

De la proposición (2) y de la definición de $N(t)$:

(3)

$$\int_0^T E(t)dt \leq C\int_0^T N(t)dt.$$

Además de la definición de $N(t)$ y $(***)$ se tiene $\frac{d}{dt}K(t) < 0, \forall t > 0$, entonces $K(t)$ es decreciente; entonces,

(4)

$$\int_0^T K(t)dt \geq TK(T).$$

De (1),(2),(3) en (4)
obtenemos:

$$\frac{T}{C_1}K(T) \leq \frac{1}{C_1}\int_0^T K(t)dt \leq \int_0^T E(t)dt \leq C\int_0^T N(t)dt \leq K(0) - K(T).$$

Por lo tanto $\frac{T}{C_1}K(T) \leq K(0) - K(T)$,

$$(1 + \frac{T}{C_1})K(T) \leq K(0); \alpha = 1 + \frac{T}{C_1} > 1, K(T) \leq \alpha^{-1}K(0).$$

Luego, por la propiedad del semigrupo:

$$K(t) \leq K(0)e^{-\gamma t}, \gamma = \frac{1}{T_0}Ln\, \alpha > 0, T_0 \text{ fijo.}$$

Finalmente de (1):

$$E(t) \leq \frac{1}{C_0}K(0)e^{-\gamma t} \leq \frac{C_1}{C_0}E(0)e^{-\gamma t},$$

es decir,

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\gamma t}, \gamma = \frac{1}{T_0}Ln\, \alpha.$$

3. CONCLUSIONES

Corolario.

Bajo las condiciones del teorema si

$$(u_0, u_1, \theta_0) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\omega)$$

entonces $\exists C > 0, \gamma > 0$ tal que $E_1(t) \leq CE_1(0)e^{-\gamma t}$.

4. BIBLIOGRAFíA

[1] R. MUÑOZ , E. J. BISOGNIN, *Exponential decay to partially thermoelastc materials.* To appear.

[2] E. ZUAZUA, *Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distribuited damping.* Comm PDE 15, (1990), p. 205-235.

[3] A. PEREZ SALVATIERRA, *Decaimiento de soluciones de ecuaciones Parcialmente Viscoelástico.* Tesis Doctorado. 1993. Rio de Janeiro.

[4] R. J. MUÑOZ, *Asymptotic behaviour in linear viscoelasticity.* Quaterly on. Appl. Math., Vol.III,(1994), p.629-648.

[5] J. R. MUÑOZ, *Global smooth solution and uniform rate of decay in nonlinear viscoelasticity.* Reviews in Math. Phys., (1994), Vol 5,6. pp 855-868.