PESQUIMAT, Revista de la Fac.CC.MM. de la
UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Vol.IV, $N°2$, pág.67-75, LIMA-PERÚ. Diciembre 2001

OBSERVACIONES SOBRE LA EXISTENCIA GLOBAL DE LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACION DE KIRCHOFF NO LINEAL VIA EL METODO DE TARTAR

E. Cabanillas, J. Bernui & Z. Huaringa[1]

ABSTRACT. *En el presente trabajo investigamos la existencia global de las soluciones de una Ecuación no Lineal, prescindiendo del "Potential well Method" y aplicamos el método del Tartar*

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo estudiamos la existencia global y el decaimiento de la enegía del Sistema no Lineal:

$$(P)\quad \left| \begin{array}{lll} u'' - M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + a(x)u' - u^3 = f & \text{en} & Q = \Omega\times\,]0,T[\\ u = 0 & \text{en} & \sum = \Gamma\times\,]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & \text{en} & \Omega \end{array} \right.$$

donde Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^3$, bien regular, de frontera Γ, $T > 0$, $M(s) = 1+s$, $\forall\, s \geq 0$, Δ es el operador de Laplace; a y f son funciones dadas.

La existencia global para el Sistema (P) en el caso $a(x) = c$ (constante positiva) ha sido investigado por diversos autores: Ono [3], Matsuyama-Ikehata [2], Feitosa-Dueñas [1], etc. Todos ellos usaron el método del "Potencial Well" en su análisis; nosotros usaremos el método de Tartar [4]. Nuestro estudio fue motivado al investigar la estabilización del Sistema (P) cuando el coficiente disipativo está localizado en una vecindad de la frontera por lo que creemos nuestro resultado es de importancia.

[1]Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas.

2. PRELIMINARES

Con (.,.) , | . | denotaremos el potencial el producto interno y la norma de $L^2(\Omega)$ respectivamente, $H^m(\Omega)$ es el espacio de Sobolev usual. Dotamos al espacio $H_0^1(\Omega)$ con la norma del gradiente

$$\|u\| = |\nabla u|, \ \forall u \in \ H_0^1(\Omega)$$

Lemma 1.1. (Sobolev). Sea $1 \leq q \leq 6$. Entonces se verifica

$$|u|_q \leq C_q\|u\| \ , \ \forall u \ \in H_0^1(\Omega)$$

donde $| \ |_q$ representa la norma usual de $L^2(\Omega)$

3. EL RESULTADO PRINCIPAL

Teorema 3.1.. Sea $a \ \in \ L^\infty(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ tal que:

(3.1) $\quad a(x) \geq a_0 > 0, \forall x \in \Omega; \ |\Delta a(x)| \in C_0 a(x), \ |\nabla a(x)|^2 \leq C_1 a(x)$

donde C_0 y C, son constantes positivas.

Si $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, con $\|u_0\| < \dfrac{1}{M^2}$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, $f \in L^2\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right)$

$$\alpha = \theta^{1/2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^T |f(s)|ds < \left(\frac{1}{4M^4}\right)^{1/2}$$

donde

$$\theta = \frac{1}{2} \ |u_1|^2 + \frac{1}{2} \ \|u_0\|^2 + \frac{1}{4} \ \|u_0\|^4 - \frac{1}{4} \ |u_0|_4^4 \ y$$

$$p \ (\lambda) = \frac{1}{2} \ \lambda^2 - \frac{|c_4 - 1|}{4} \ \lambda^4$$

entonces existe un número positivo ϵ_0 tal que si:

$$\|u_1\| + |\Delta u_0| \ < \ \epsilon_0$$

entonces existe una función $u : \Omega \times]0, T[\longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

(3.2) $u \in L^{\infty}(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$

(3.3) $u' \in L^{\infty}(0,T; H_0^1(\Omega))$

(3.4) $u'' \in L^{\infty}(0,T; L^2(\Omega))$

(3.5) $$\frac{d}{dt}(u'(t), w) + (1 + |\nabla u(t)|^2)(-\triangle u(t), w) + (a(x)u'(t), w)$$

$$-(u^3(t), w) = (f(t), w)\, \forall\, w \in H_0^1(\Omega), \text{ en el sentido de } D'(0,T)$$

(3.6) $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$

Demostración. Usaremos el método de Faedo-Galerkin.

Sea $\{w_1, w_2, \cdots, w_j, \cdots\}$ una base Hilbertiana de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ formada por los vectores propios de $-\triangle$ esto es:

$$\left|\begin{array}{ll} -\triangle w_j = \lambda_j w_j & \text{en } \Omega \\ w_j = 0 & \text{en } \Gamma \end{array}\right.$$

Consideremos $V_m = [w_1, w_2, \cdots, w_m]$ el subespacio de $H_0^1(\Omega)$ generado por $\{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$. Buscamos una solución $u_m(t)$ de la forma:

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{j_m}(t) w_j$$

donde g_{j_m} están determinadas por el sistema:

(3.7) $$(u''_m(t), w) - (1 + |\nabla u_m(t)|^2)(\triangle u_m(t), w) + (a(x)u'_m(t), w) - (u_m^3(t), w) = (f(t), w);\ \forall\, w \in V_m$$

(3.8) $u_m(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0$ en $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$

(3.9) $u'_m(0) = u_{1m} \longrightarrow u_1$ en $H_0^1(\Omega)$

Por el teorema de Caratheodory existe una solución local $u_m(t)$ en $[0, T_m[$. Las estimativas a priori permiten extender la solución al intervalo $[0, T]$ independiente de m

Estimativa a Priori I

Para $w = u_m'(t)$ en (3.7) se tiene:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\,|u_m'(t)|^2 + \frac{1}{2}\,\|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{4}\,\|u_m(t)\|^4 - \frac{1}{4}\,|u_m(t)\|_4^4\right\} + \int_\Omega a(x)[u_m'(t)]^2\,dx = (f(t), u_m'(t)) \tag{3.10}$$

Ahora

Si $C_4 \leq 1$ entonces $|u_m(t)|_4 \leq \|u_m(t)\|$ y asi:

$$0 \leq \|u_m(t)\|^4 - |u_m(t)|_4^4$$

Aplicando entonces el lema de Groñwall obtenemos:

$$|u_m'(t)| \leq M_1\ ,\ \|u_m(t)\| \leq M_1$$

Primero veamos un resultado previo.

Si $C_4 > 1$ entonces $|u(t)|^4 \leq C_4^4\,\|u(t)\|^4$ y se tiene:

$$\frac{1}{2}\,\|u(t)\|^2 - \frac{1}{4}\,(C_4 - 1)\|u(t)\|^4 \leq \frac{1}{2}\,\|u(t)\|^2 + \frac{1}{4}\,\|u(t)\|^4 - \frac{1}{4}\,|u(t)|_4^4 \tag{3.11}$$

Sea $M^4 = C_4 - 1 > 0$. Entonces el polinomio

$$p\,(a) = \frac{1}{2}\,\lambda^2 - \frac{M^4}{4}\,\lambda^4$$

tiene raíces en $\lambda = 0\,,\ \lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{M^2}$, los puntos de máximo son $\left(\pm\frac{1}{M^2}, \frac{1}{4M^4}\right)$, $p\,(\lambda) \geq 0, \forall\,\lambda \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{M^2}, \frac{\sqrt{2}}{M^2}\right]$ y $p\,(\lambda)$ es creciente en $\left]-\infty, -\frac{1}{M^2}\right] \cup \left[0, \frac{1}{M^2}\right]$

De (3.11) resulta en particular para $\|u(t)\| \in \left[0\,,\, \frac{1}{M^2}\right]$ que:

$$(3.12) \qquad 0 \leq p\,(\|u(t)\|) \leq \frac{1}{2}\,\|u(t)\|^2 + \frac{1}{4}\,\|u(t)\|^4 - \frac{1}{4}\,|u(t)|_4^4$$

Vayamos ahora a la obtención de la estimativa. Por hipótesis

$$\alpha^2 < \frac{1}{4M^4}$$

Así, de la continuidad de p , existe $0 < \beta < \frac{1}{M^2}$ tal que

$$\frac{1}{2}\,\beta^2 - \frac{1}{4}\,\beta^4 = p\,(\beta) = \alpha^2.$$

También $p\,(\|u_0\|) \geq 0$ y

$$(3.13) \qquad \|u_m(0)\| < \frac{1}{M^2}\ , \text{ para } m \text{ suficientemente grande.}$$

Probamos que:

$$(3.14) \qquad \|u_m(t)\| < \frac{1}{M^2}\,,\ \forall\, t \in [0, T_m[$$

Supongamos que existe $t_0 \in [0, T_m[$ tal que:

$$\|u_m(t_0)\| \geq \frac{1}{M^2}$$

Sea entonces:

$$t^* = inf \left\{ t \,/\, \|u_m(t)\| \geq \frac{1}{M^2} \right\}$$

De (3.13): $t^* > 0$ y de la continuidad de las soluciones aproximadas obtenemos

$$(3.15) \qquad \|u_m(t^*)\| = \frac{1}{M^2}$$

$$(3.16) \qquad \|u_m(t)\| \leq \frac{1}{M^2}\,,\ \forall\, t \in [0, t^*]$$

Hagamos

$$Z_m = \frac{1}{2}|u_{1m}|^2 + \frac{1}{2}\|u_{0m}\|^2 + \frac{1}{4}\|u_{0m}\|^4 - \frac{1}{4}|u_{0m}|_4^4$$

De (3.8) y (3.9)

$$Z_m \longrightarrow \theta \tag{3.17}$$

Ahora de (3.10), (3.12), (3.16), (3.17) y $p(\lambda) \geq 0$ en $\left[-\frac{1}{M^2}, \frac{1}{M^2}\right]$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|u_m'(t)|^2 &\leq \frac{1}{2}|u_m'(t)|^2 + p(\|u_m(t)\|) + \int_0^t \int_\Omega a(x)\,[u_m'(s)]^2\,dxds \\
&\leq Z_m + \int_0^t (f(s), u_m'(s))ds \qquad (3.18)\\
&\leq \theta + \epsilon + \int_0^t |b(s)|\,|u_m'(s)|\,ds \equiv \varphi(t), \forall \epsilon > 0
\end{aligned}$$

De la definición de la φ se sigue que:

$$\varphi^{1/2}(t) \leq \sqrt{\theta+\epsilon} + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^T |f(s)|\,ds, \; \forall \epsilon > 0$$

lo que implica usando la hipótesis que:

$$\varphi(t) \leq \alpha^2 < \frac{1}{4M^4} \quad \forall t \in [0, t^\star] \tag{3.19}$$

De (3.18) y (3.19) se obtienen:

$$p\,(\|u_m(t)\|) \leq \alpha^2, \quad \forall t \in [0, t^\star]$$

De esto se sigue que

$$\|u_m(t)\| \leq \beta, \quad \forall t \in [0, t^\star]$$

y así

$$\|u_m(t^\star)\| \leq \beta < \frac{1}{M^2}$$

lo que contradice (3.15), por lo que vale (3.14).
De (3.14) y (3.18) resulta:

$$|u_m'(t)| \le \frac{\sqrt{2}}{2M^2}, \quad \forall\, t \in [0, T_m[$$

En resumen hemos mostrado que:

(3.20) $\quad |u_m{}'(t)| \le M_0$ y $\|u_m(t)\| \le M_0, \quad \forall\, t \in [0, T_m],\ M_0 > 0$

Estimativa a Priori II

Poniendo $w = -2\triangle u_m'(t)$ en (3.7) se tiene:

$$\frac{d}{dt}\left\{|\nabla u_m'(t)|^2 + (1 + |\nabla u_m(t)|^2)\,|\triangle u_m(t)|^2\right\} + 2\,|a^{1/2}\nabla u_m'(t)|^2 =$$
$$= -2\,(u_m'(t)\nabla a\,,\ \nabla u_m'(t)) + 2\,(\nabla u_m^3(t)\,,\ \nabla u_m'(t)) + 2\,(\nabla f(t)\,,\ \nabla u_m'(t))$$
$$+ \left(\frac{d}{dt}\,|\nabla u_m(t)|^2\right)|\triangle u_m(t)|^2$$

En adelante las letras α_i y β_j representan constantes positivas.

Integrando de 0 a t obtenemos:

$$\begin{aligned}(3.22)\quad & |\nabla u_m'(t)|^2 + (1 + |\nabla u_m(t)|^2)|\triangle u_m(t)|^2 + a_0^{1/2}\int_0^t |\nabla u_m'(t)|^2\,ds \\ & \le |\nabla u_1|^2 + (1 + |\nabla u_0|^2)\,|\triangle u_0|^2 + \alpha_0\int_0^t |a^{1/2}u_m'(s)|^2\,ds + \\ & \alpha_1\int_0^t |\triangle u_m(s)|^2\,|\nabla u_m'(s)|\,ds + \frac{3}{a_0}\int_0^t \|f(t)\|^2\,dt + \alpha_2\int_0^t |\triangle u_m(s)|^6\,ds \\ & \le |\nabla u_1|^2 + (1 + |\nabla u_0|^2)|\triangle u_0|^2 + \frac{3}{a_0}\int_0^t \|b(t)\|^2 dt + \alpha_0\,\alpha^2 + \\ & \alpha_1\int_0^t |\triangle u_m(s)|^2|\nabla u_m'(s)|ds + \alpha_2\int_0^t |\triangle u_m(s)|^6 ds\end{aligned}$$

Por otro lado haciendo $w = -\triangle u_m(t)$ en (3.7) resulta:

$$\frac{d}{dt}\left\{(u_m'(t)\,,\ -\triangle u_m(t) + \frac{1}{2}\,|a^{1/2}\nabla u_m(t)|^2\right\} + (1 + |\nabla u_m(t)|^2)\,|\triangle u_m(t)|^2$$
$$= |\nabla u_m'(t)|^2 - (u_m'(t)\nabla a\,,\ \nabla u_m(t)) + (\nabla u_m^3(t)\,,\ \nabla u_m(t)) + (f(t)\,,\ -\triangle u_m(t))$$

Ahora integrando de 0 o t

$$(\nabla u_m'(t)\,,\,\nabla u_m(t)) + \frac{1}{2}\,|a^{1/2}\nabla u_m(t)|^2 + \int_0^t |\triangle u_m(s)|^2 ds \leq \|u_1\|\|u_0\| +$$
$$+\frac{1}{2}\,|a|_\infty \|u_0\|^2 + \int_0^t |\nabla u_m'(s)|^2 ds + \beta_1 \int_0^t |a^{1/2} u_m'(s)|^2 ds \;+\; \frac{1}{4}\int_0^t |\triangle u_m(s)|^2 ds$$
$$+\beta_2 \int_0^t |\triangle u_m(s)|^4 ds + \int_0^t |f(t)|^2 dt + \frac{1}{4}\int_0^t |\triangle u_m(s)|^2 ds$$

$$(3.23)\qquad (\nabla u_m'(t)\,,\,\nabla u_m(t)) + \frac{1}{2}\,|a^{1/2}\nabla u_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t |\triangle u_m(s)|^2 ds$$
$$\leq \|u_1\|\|u_0\| + \frac{1}{2}\,|a|_\infty \|u_0\|^2 + \int_0^t |\nabla u_m'(s)|^2 ds \;+\; \beta_1\alpha^2 + \int_0^T |f(t)|^2 dt$$
$$+\beta_2 \int_0^t |\triangle u_m(s)|^4 ds$$

Pero notemos que para $\epsilon < \min\{a_0^{1/2}\,,\, a_0\}$.

$$(3.24)\qquad |\nabla u_m'(t)|^2 \;+\; |\triangle u_m(s)| + (a_0^{1/2} - \epsilon)\int_0^t |\nabla u_m'(s)|^2 + \epsilon\,(\nabla u_m'(t)\,,\,\nabla u_m(t))$$
$$+\frac{a_0}{2}\,|\nabla u_m|^2 \geq \theta_0(|u_m'(t)| + |\triangle u_m(t)|^2)$$

para algún $\theta_0 > 0$.

Luego de (3.22) , (3.23) y (3.24) se obtiene:

$$(3.25)\qquad \theta_0(|\nabla u_m'(t)|^2 \;+\; |\triangle u_m(t)|^2) \leq \|u_1\|\|u_0\| + \frac{1}{2}|a|_\infty \|u_0\|^2 + \beta_1\alpha^2$$
$$+\int_0^T |f(t)|^2 dt + \|u_1\|^2 + (1+\|u_0\|^2)|\triangle u_0|^2 + \frac{3}{a_0}\int_0^T \|f(t)\| dt$$
$$\int_0^t (\alpha_1|\nabla u_m'(s)| ds + \alpha_2|\triangle u_m(s)|^4 + \varepsilon\beta_2|\triangle u_m(s)|^2 - \epsilon)|\triangle u_m(s)|^2 ds$$

Sea:

$$F_0 = \|u_1\|\|u_0\| + \frac{1}{2}|a|_\infty \|u_0\|^2 + \beta_1\alpha^2 + \int_0^T |f(t)|^2 dt$$
$$+\frac{3}{a_0}\int_0^T \|f(t)\|^2 dt + \|u_1\|^2 + (1+\|u_0\|^2)|\triangle u_0|^2$$

Impongamos la condición:

$$(3.26)\qquad \alpha_1|\nabla u_1| + \alpha_2|\triangle u_0|^4 \;+\; \epsilon\beta_2|\triangle u_0|^2 \leq \frac{\epsilon}{4}$$

$$(3.27)\qquad \alpha_1\left(\frac{F_0}{\theta_0}\right)^{1/2}+\alpha_2\left(\frac{F_0}{\theta_0}\right)^2+\epsilon\,\beta_2\,\frac{F_0}{\theta_0}<\frac{\epsilon}{2}$$

De (3.26) y (3.27), existe un $t^* \in [0, T_m[$ tal que:

$$(3.28)\qquad \alpha_1|\nabla u_1'(t^*)|+\alpha_2|\triangle u_m(t^*)|^4+\epsilon\,\beta_2\,|\triangle u_m(t^*)|^2<\frac{\epsilon}{2},\ \forall t\in[0,t^*[$$

$$(3.29)\qquad \alpha_1|\nabla u_m'(t^*)|+\alpha_2|\triangle u_m(t^*)|^4+\epsilon\,\beta_2\,|\triangle u_m(t^*)|^2=\frac{\epsilon}{2}$$

Seguimos de (3.25) con $t = t^*$ y (3.29) que:

$$(3.30)\qquad |\nabla u_m(t^*)|^2+|\triangle u_m(t^*)|^2\le\frac{F_0}{\theta_0}$$

Pero, entonces de (3.27) y (3.28) se sigue que:

$$\alpha_1|\nabla u_m'(t^*)|+\alpha_2|\triangle u_m(t^*)|^4+\epsilon\,\beta_2\,|\triangle u_m(t^*)|^2\le$$
$$\le\alpha_1\left(\frac{F_0}{\theta_0}\right)^{1/2}+\alpha_2\left(\frac{F_0}{\theta_0}\right)^2+\epsilon\,\beta_2\,\frac{F_0}{\theta_0}<\frac{\epsilon}{2}$$

Lo que contradice a (3.29).

La estimativa para $|u_m''(t)|$, se obtiene acotando primero $|u_m''(0)|$, derivando la ecuación aproximada (3.7), substituyendo aquí $w = 2u_m''(t)$, y finalmente aplicando el Lema de Gronwall.

Todas la anteriores estimativas permiten el pasaje al limite, verificando la existencia de la solución.

La verificación de las condiciones iniciales es de manera standard.

4. BIBLIOGRAFÍA

[1] J. R. FEITOSA, S. M. DURAES *Some Remarks on the Global Existence of Solutions and Energy Decay For a Class of Hyperbolic Equations*, SBA, 46 Seminario Brasileiro, 1997. p. 556 - 572.

[2] T. MASUYAMA, R. IKEHATA, *Energy Decay for the Wave Equations of Kirchoff type with linear damping terms Math*, Japanics, 45, 2 (1997) p.315 - 335.

[3] K. ONO, *Global Existence Decay and Blowup of Solutions for Some Midly Degenerate Nonlinear Kirchoff String*, J. of Diff. Eq. 137, 273 -301, (1997).

[4] L. TARTAR, *Topics in non linear Analysis, Publications Mathematiques D'Orsay.*