PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. V, N° 2, pag. 37 - 44, LIMA-PERÚ. Diciembre 2002

SOLUCIÓN LOCAL PARA UNA ECUACIÓN HIPERBÓLICA NO LINEAL

Oswaldo Ramos Chumpitaz

RESUMEN.- *Probamos la existencia de una solución local débil para el problema*

$$\left| \begin{array}{l} u' - M(u)\Delta u - u^3 = f \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \end{array} \right.$$

donde $M(u) = 1 + \sqrt{a(u)}$ *siendo* $a(u) = a(u,u)$ *donde* $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx$ *es la forma de Dirichlet,* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *es abierto acotado de frontera bien regular.*

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo probamos la existencia de una solución débil local para el problema asociado a la ecuación hiperbólica no lineal

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M(u)\Delta u - u^3 = f \tag{1}$$

donde

$$M(u) = 1 + \sqrt{a(u)}$$

siendo

$$a(u) = a(u,u), \ a(u,v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx$$

la forma de Dirichlet, ∇ y Δ son los operadores gradiente y laplaciano, respectivamente.

Si en la ecuación (1) se tuviera término no lineal $+u^3$, entonces se puede resolver aplicando el método de la energía por el comportamiento monótono del término no lineal, sin embargo debido al signo negativo del término cúbico este método no es aplicable, motivo por el cual hacemos uso del método «pozo de potencial» introducido por Sattinger [9], combinado con el método de Galerkin. La ecuación (1) describe las vibraciones transversales de una cuerda elástica.

Problemas similares fueron estudiados por Pohozaev [8], Lions [4], Medeiros [5], Dickey [2], Ebihara [3] y Medeiros - Milla [6] y [7].

2. PRELIMINARES

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto limitado de frontera Γ bien regular, $\|.\|$ norma en $H^1(\Omega)$; $|.|_q$ norma en $L^q(\Omega)$.

***LEMA 1** (Sobolev).- Si $1 \le q \le 6 \Rightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ es contínua. Definimos las energías cinética y potencial asociadas a nuestra ecuación por:*

$$K(\omega) = \tfrac{1}{2}|\omega|^2, \ \omega \in L^2(\Omega)$$
$$J(z) = \tfrac{1}{2}\| z \|^2 + \tfrac{1}{3}\| z \|^3 - \tfrac{1}{4}|z|_4^4, \ z \in H_0^1(\Omega)$$

Además, definimos el número d por

$$d = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \left\{ \max_{\lambda \ge 0} J(\lambda u) \right\}$$

d es la profundidad del «pozo de potencial», $\lambda_1(u)$ el primer valor para el cual $J(\lambda u)$ posee un máximo.

***LEMA 2.-** Sea d estrictamente positivo, esto es, $d > 0$. Definimos ahora nuestro pozo potencial W por:*

$$W = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) / J(\lambda u) < d, \forall\, 0 \le \lambda \le 1 \right\}$$

Observación.- si $u \in W$, se tiene que $J(\lambda u) \ge 0$ y $\lambda_1(u) > 1$.

***LEMA 3 (Sattinger).-** W es un conjunto abierto acotado de $H_0^1(\Omega)$.*

***TEOREMA 1.-** Sea Ω abierto acotado bien regular de $\mathbb{R}^3$, $T > 0$. Además,*

i) $f \in L^2\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right) \cap L^1\left(0,T; L^2(\Omega)\right)$

ii) $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \cap W$

iii) $u_1 \in H_0^1(\Omega)$

iv) $E_0 + 2\sqrt{E_0 + \left(\int_0^T |f(t)|\, dt\right)^2} \int_0^T |f(t)|\, dt < d; \ E_0 = K(u_1) + J(u_0)$

Entonces existen T_0 real tal que $0 < T_0 < T$ y una función u que satisfacen:

$$u \in L^{\infty}\left(0, T_0; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)$$
$$u' \in L^{\infty}\left(0, T_0; H_0^1(\Omega)\right)$$
$$u'' \in L^2\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right)$$

y u es solución débil de

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \left(1 + \sqrt{a(u)}\right)\Delta u - u^3 = f \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \end{array} \right.$$

Demostración

Etapa 1.- Soluciones aproximadas

Sea $\{w_1, w_2, \ldots\}$ base de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ formada por las funciones propias de $-\Delta$, esto es $-\Delta w_j = \lambda_j w_j$

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i \quad , \quad V_m = [w_1, \ldots, w_m], \; m \geq 1 \tag{2}$$

subespacio finito generado por $\{w_1, \ldots, w_m\}$.

Las funciones $g_{im}(t)$ son determinadas por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales

$$(S.A) \left| \begin{array}{l} \left(u_m''(t), w_j\right) + \left(1 + \sqrt{a(u_m(t))}\right) a\left(u_m(t), w_j\right) - \left(u_m^3(t), w_j\right) = \left(f(t), w_j\right), \\ \hfill 1 \leq j \leq m \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \quad \text{en} \quad H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ u_m'(0) = u_{1m} \to u_1 \quad \text{en} \quad H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

La existencia de las funciones $g_{im}(t)$ en un intervalo $[0, T_m]$ está garantizada por el Teorema de Caratheodory.

Las estimativas a priori que haremos permitirán extender estas funciones a un intervalo $[0, T]$ independiente de m.

Etapa 2.-

Estimativa a priori (i):

Como J y K son funcionales continuos, entonces $E_{0m} \to E_0$. Luego

$$E_{0m} + 2\sqrt{E_{0m} + \left(\int_0^T |f(t)|\,dt\right)^2}\int_0^T |f(t)|\,dt < d \tag{3}$$

para m grande multiplicando la ecuación de (S.A) por $g'_{jm}(t)$ y sumando de 1 a m obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left\{K\left(u'_m(t)\right) + J\left(u_m(t)\right)\right\} = \left(f(t), u'_m(t)\right)$$

luego

$$K\left(u'_m(t)\right) + J\left(u_m(t)\right) = K\left(u_{1m}\right) + J\left(u_{0m}\right) + \int_0^t \left(f(s), u'_m(s)\right)ds\,. \tag{4}$$

Probaremos que $u_m(t) \in W$, $\forall t \in [0, t_m]$.

Por reducción al absurdo, supongamos que $\exists\ t \in [0, t_m]$ tal que $u_m(t) \in W$.

Sea $t^* = \inf\left\{t / u_m(t) \notin W\right\}$, siendo $u_m(t)$ contínua tenemos que $u_m(t^*) \in \partial W$, esto es,

$$J\left(u_m(t^*)\right) = d \tag{5}$$

Por otro lado, sea $N = \sup\limits_{t\in[0,t^*]} \left|u'_m(t)\right|$, entonces (4) implica

$$\frac{1}{2}N^2 \le E_{0m} + N\int_0^T |f(t)|\,dt$$

de donde sigue que

$$N \le 2\sqrt{E_{0m} + \left(\int_0^T |f(t)|\,dt\right)^2}\,. \tag{6}$$

Ahora por (6) y (3)

$$\begin{aligned} J\left(u_m(t^*)\right) &\le K\left(u'_m(t^*)\right) + J\left(u_m(t^*)\right) = E_{0m} + \int_0^{t^*} \left(f(t), u'_m(t)\right)dt \\ &\le E_{0m} + N\int_0^{t^*} |f(t)|\,dt < d \end{aligned}$$

Así $J\left(u_m(t^*)\right) < d$ contradiciendo (5) luego $u_m(t) \in W$, $\forall\, t \in [0, t_m]$, entonces

$$\|u_m(t)\| \le C \text{ independiente de } m, \quad \forall t \in [0, t_m].$$

También

$$\frac{1}{2}|u_m'(t)|^2 \le K(u_m'(t)) + J(u_m(t)) \le E_{0m} + \int_0^t |f(s)||u_m'(s)|\, ds$$
$$\le C + \frac{1}{2}\int_0^t |u_m'(s)|^2\, ds,$$

luego por el lema de Gronwall

$$|u_m'(t)| \le C \text{ independiente de } m, \quad \forall t \in [0, t_m] \tag{8}$$

así podemos extender la solución $u_m(t)$ al intervalo $[0, T]$ y

$$\|u_m(t)\| \le C, \ |u_m'(t)| \le C \ \forall t \in [0, T] \tag{9}$$

Estimativa a priori (ii):

Multiplicando (S.A.) por $g_{jm}'(t)\lambda_j$, sumando de 1 a m, y usando el Lema 1 tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|^2 + \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{a(u_m(t))}\right)\frac{d}{dt}|\Delta u_m(t)|^2 = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} u_m^3(t) \frac{\partial}{\partial x_i} u_m'(t)\right) dx +$$
$$+ a(f(t), u_m'(t))$$
$$\le \|f(t)\|^2 + C\left\{\|u_m'(t)\|^2 + |\Delta u_m(t)|^2\right\}$$

Sean $\mu(t) = 1 + \|u_m(t)\|$, $\beta(t) = \|u_m'(t)\|^2$, $\gamma(t) = |\Delta u_m(t)|^2$.

Tenemos entonces la desigualdad

$$\beta'(t) + \mu(t)\gamma'(t) \le \|f(t)\|^2 + C\{\beta(t) + \gamma(t)\}$$

de donde obtenemos

$$\frac{\beta'(t)}{\mu(t)} + \gamma'(t) \le \|f(t)\|^2 + C\left\{\frac{\beta(t)}{\mu(t)} + \gamma(t)\right\}$$

Si $h(t) = \dfrac{1}{\mu(t)}\beta(t) + \gamma(t) \Rightarrow h'(t) = \dfrac{1}{\mu(t)}\beta'(t) + \gamma'(t)\dfrac{\mu'(t)\beta(t)}{\mu^2(t)}$

Luego

$$h'(t)+\frac{\mu'(t)}{\mu^2(t)}\beta(t)\leq\|f(t)\|^2+Ch(t)$$

$$h'(t)\leq\|f(t)\|^2+Ch(t)+\frac{|\mu'(t)|}{\mu^2(t)}\beta(t)$$

tenemos

$$h'(t)\leq\|f(t)\|^2+Ch(t)+C_1h^{\frac{3}{2}}(t)$$

Multiplicando por $e^{-t}, t\geq 0$, transponiendo y simplificando se tiene

$$h(t)\leq K_1+K_2\int_0^t h^{\frac{3}{2}}(s)\,ds\,,$$

donde

$$K_1=h(0)+e^{CT}\int_0^T\|f(s)\|^2\,ds\,,\quad K_2=C_1e^{CT}.$$

Sea

$$\varphi(t)=K_1+K_2\int_0^t h^{\frac{3}{2}}(s)ds$$

$$\varphi(t)=K_2h^{\frac{3}{2}}(t)ds \quad \text{y como} \quad h(t)\leq\varphi(t)$$

entonces

$$\varphi'(t)=K_2\varphi^{\frac{3}{2}}(t)\cdot$$

Luego transponiendo e integrando, sigue

$$\varphi^{-\frac{1}{2}}(t)=\varphi^{-\frac{1}{2}}(0)-\frac{1}{2}K_2t\geq 0 \qquad \forall t\in\left[0,\frac{2}{K_1^{\frac{1}{2}}K_2}\right].$$

Sea T_0 tal que

$$0<T_0<\frac{2}{K_1^{\frac{1}{2}}K_2}$$

entonces, $\forall t\in[0,T_0]$

$$h(t)\leq\varphi(t)\leq\frac{1}{\left(K_1^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}K_2T_0\right)^2}=K_3$$

luego

$$\frac{\beta(t)}{\mu(t)}+\gamma(t)\leq K_3, \text{ asi } \gamma(t)=\left|\Delta u_m(t)\right|^2\leq K_3, \; \forall t\in[0,T_0].$$

También

$$\frac{\beta(t)}{\mu(t)}\leq K_3 \Rightarrow \beta(t)\leq K_3\mu(t)\Rightarrow \left\|u_m'(t)\right\|^2\leq K_3\left(1+\left\|u_m\right\|\right)\leq K_3(1+C),$$

así

$$\left\|u_m'(t)\right\|\leq K_4 \quad \left\|u_m(t)\right\|_{H^2(\Omega)}\leq K_5, \; \forall t\in[0,T_0] \tag{10}$$

Etapa 3.- Pasaje al límite.

De las estimativas (9) y (10) tenemos que

$$\begin{aligned}
u_m &\to u \text{ débil estrella en } L^\infty\left(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Omega)\right)\\
u_m' &\to u \text{ débil estrella en } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\\
u_m &\to u \text{ débil estrella en } L^\infty\left(0,T_0;H^2(\Omega)\right)\\
u_m' &\to u' \text{ débil estrella en } L^\infty\left(0,T_0;H_0^1(\Omega)\right).
\end{aligned}$$

Como las inmersiones $H^2(\Omega)\hookrightarrow H^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ son compactas, por el Teorema de Lions - Aubin se sigue que

$$\begin{aligned}
u_m &\to u \text{ fuerte en } L^\infty\left(0,T_0;H_0^1(\Omega)\right)\\
u_m' &\to u' \text{ fuerte en } L^\infty\left(0,T_0;L^2(\Omega)\right).
\end{aligned}$$

Luego podemos pasar al límite en la ecuación aproximada y obtener la solución del problema. Las condiciones iniciales se verifican en forma estándar.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Aubin J. P. *Un Theorema de Compacité.* C. R. Acad. Science Paris, 256, 5042 - 5044 (1963).

[2] Dickey R. W. *The initial value problem for a non linear semi infinite string.* Proceding of the Royal Society of Edinbourg 82 A, 19 - 26 (1978).

[3] Ebihara Y. *On solutions of semilinear wave equations non linear analysis.* Vol 6 N° 5, 467 - 486 (1982).

[4] Lions J. L. *Quelques méthodes de resolutions de problémes aux limites non lineaires.* Dunod Paris (1969).

[5] Medeiros L. A. *On a new class of non linear wave equations.* J. of Math Anal and Appl. Vol 69, N° 1, 252 - 262 (1979).

[6] Medeiros L. A. Milla M.- *Local solutions for a nonlinear unilateral Problem* (to appear).

[7] Medeiros L. A. Milla M. *Remarks on a nonlinear model vibrations of string with damping.* 30° SBA, LNCC - R.J. (1989).

[8] Pohozaev S. *On a class of quasilinear hyperbolic equations.* Math. Sbornik, Vol. 96 (1975).

[9] Sattinger D. H. *On global solution of nonlinear hyperbolic equations,* Arch. Rat. Mech. Anal. 30, 148 - 172 (1968).