PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. V, N° 2, pag. 55 - 63, LIMA-PERÚ. Diciembre 2002

UN EJEMPLO DEL ESPECTRO DE FUCIK

Santiago César Rojas Romero

RESUMEN.- *En el presente trabajo presentamos el Espectro de Fucik del operador Laplaciano* $-\Delta$ *bajo condiciones de frontera tipo Dirichlet sobre un dominio* Ω *regular acotado en* R^n*, se demuestra el comportamiento asintótico de la primera curva contenida en él y se brinda una descripción completa del Espectro de Fucik para el caso* $n=1$.

1. ESPECTRO DE FUCIK DEL LAPLACIANO PARA EL PROBLEMA TIPO DIRICHLET

Sea Ω un dominio regular acotado en R^n. El espectro de Fucik del operador Laplaciano $-\Delta$ bajo condiciones de frontera tipo Dirichlet es definido como el conjunto $\sum$ de aquellos $(\alpha,\beta)\in R^2$; tales que el problema

$$\begin{cases} -\Delta u=\alpha u^+-\beta u^- & \text{en } \Omega \\ u=0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

tiene una solución no trivial. Aquí $u^+=\max\{u,0\}$ y $u^-=\min\{-u,0\}$.

Es claro que haciendo $\alpha=\beta$ en (1) se tiene el espectro usual (dado que, $u=u^+-u^-$) y en ese caso $\alpha=\beta$ viene a ser uno de los autovalores de $-\Delta$, lo cual prueba que

$$(\lambda,\lambda)\in\sum,\ \forall\,\lambda \text{ autovalor de} -\Delta.$$

Luego, $\sum\neq\phi$.

En adelante llamaremos λ_1 al primer autovalor de $-\Delta$ sobre $H_0^1(\Omega)$ y φ_1 a su correspondiente autofunción positiva. No es difícil verificar la igualdad (2) que se usará mas adelante:

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi_1|^2 = \lambda_1 \int_{\Omega} \varphi_1^2 \tag{2}$$

Algunas propiedades de $\sum$

i) $\sum$ es simétrico respecto a la diagonal, es decir $(\alpha, \beta) \in \sum$ s.s.s. $(\beta, \alpha) \in \sum$. En efecto, debido a que $(-u)^+ = u^-$ y $(-u)^- = u^+$, si existe u_0 no trivial tal que

$$-\Delta u_0 = \alpha u_0^+ - \beta u_0^- \quad \text{en } \Omega \quad \text{y} \quad u_0 = 0 \text{ en } \partial\Omega$$

entonces

$$-\Delta \hat{u}_0 = \beta \hat{u}_0^+ - \alpha \hat{u}_0^- \quad \text{en } \Omega \quad \text{y} \quad \hat{u}_0 = 0 \text{ en } \partial\Omega$$

para $\hat{u}_0 = -u_0$.

ii) Las rectas $\{\lambda_1\} \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \times \{\lambda_1\}$ estan contenidas en $\sum$. Por i), basta mostrar que $\{\lambda_1\} \times \mathbb{R} \subset \Sigma$. En efecto,

$$-\Delta \varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1^+ - \beta \varphi_1^- \quad \text{en} \quad \Omega, \forall \beta \in \mathbb{R}$$

pues $\varphi_1^+ = \varphi_1$ y $\varphi_1^- = 0$. Luego, $(\lambda_1, \beta) \in \Sigma \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$.

2. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LA PRIMERA CURVA EN EL ESPECTRO DE FUCIK DE $-\Delta$ PARA EL PROBLEMA TIPO DIRICHLET

Primero veamos la formulación variacional del problema (1). Si u es solución de (1), entonces

$$-\int_{\Omega} \Delta u . v = \alpha \int_{\Omega} u^+ v - \beta \int_{\Omega} u^- v, \quad \forall v \in D(\Omega)$$

luego

$$\int_{\Omega} \nabla u . \nabla v = \alpha \int_{\Omega} u^+ v - \beta \int_{\Omega} u^- v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3}$$

De otro lado, se sabe que $-\Delta\varphi_1 . u = \lambda_1\varphi_1\left(u^+ - u^-\right)$ y de ahí que

$$\int_\Omega \nabla\varphi_1 . \nabla u = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 u^+ - \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 u^- ,$$

haciendo $v = \varphi_1$ en (3) se tiene

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla\varphi_1 = \alpha \int_\Omega u^+\varphi_1 - \beta \int_\Omega u^-\varphi_1 ;$$

y, restando las últimas igualdades

$$\int_\Omega u^+\varphi_1 - \frac{\beta - \lambda_1}{\alpha - \lambda_1} \int_\Omega u^-\varphi_1 = 0 , \ \forall \alpha \neq \lambda_1 .$$

Ahora, para $r > 0$, se consideran los conjuntos

$$M_r = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \left(u^+\varphi_1 - r\, u^-\varphi_1\right) = 0 \right\}$$

$$N_r = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \left(u^+\right)^2 + r\left(u^-\right)^2 = 1 \right\} .$$

y se definen

$$\alpha = \alpha(r) = \lambda_1 + \inf \left\{ \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda_1 u^2\right) : \ u \in M_r \cap N_r \right\}$$

$$\beta = \beta(r) = \lambda_1 + r \inf \left\{ \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda_1 u^2\right) : \ u \in M_r \cap N_r \right\}$$

$$C_1 = \left\{ (\alpha(r), \beta(r)) \in \mathbb{R}^2 : \ r > 0 \right\} .$$

C_1 se denomina la primera curva en el espectro de Fucik.

Los siguientes resultados se demuestran adaptando los argumentos en [1]:

- α y β definidos en (4) son mayores que λ_1. Además (α, β) es el primer punto de intersección de $\sum$ con la recta de pendiente r y que pasa por (λ_1, λ_1).

- El ínfimo en (4) es alcanzado por las soluciones normalizadas (ie; soluciones en N_r) de (1).
- C_1 es una curva continua estrictamente decreciente y simétrica respecto a la diagonal.
- $\alpha(r) \to +\infty$ cuando $r \to 0$ y $\beta(r) \to +\infty$ cuando $r \to +\infty$.

Respecto al comportamiento asintótico de la curva C_1 se tiene el siguiente resultado

Proposición 1.

$\alpha(r) \to \lambda_1$ *cuando* $r \to +\infty$ *y* $\beta(r) \to \lambda_1$ *cuando* $r \to 0$.

Demostración. De la definición (4) se verifica directamente

$$\inf\left\{\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda_1 u^2\right) : u \in M_{1/r} \cap N_{1/r}\right\} = r \inf\left\{\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda_1 u^2\right) : u \in M_r \cap N_r\right\}$$

y de ahi que $\alpha(r) = \beta(1/r)$. Por ello, basta demostrar que $\alpha(r) \to \lambda_1$ cuando $r \to +\infty$, ie; $\forall \eta > 0\ \exists\ M > 0$ tal que $\alpha(r) - \lambda_1 < \eta$, $\forall\ r \geq M$. Supongamos por contradicción que $\exists\ \eta > 0$ tal que $\alpha(r) - \lambda_1 \geq \eta$, $\forall r > 0$, entonces

$$\inf\left\{\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda_1 u^2\right) : u \in M_r \cap N_r\right\} \geq \eta \tag{5}$$

lo cual implica que

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda_1 u^2\right) \geq \eta \tag{6}$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que, para algún $r > 0, u \in M_r \cap N_r$.

Ahora, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, descomponemos Ω en $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}_\varepsilon = \left\{x \in \Omega; dist\left(x, \Omega^c\right) > \varepsilon\right\}$, $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_\varepsilon = \left\{x \in \Omega; dist\left(x, \Omega^c\right) < \varepsilon\right\}$ y denotemos con $\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_{1,\varepsilon}$, $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_{1,\varepsilon}$ a los principales autovalores de $-\Delta$ sobre $H_0^1(\hat{\Omega}), H_0^1(\tilde{\Omega})$ respectivamente, y por $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_{1,\varepsilon}$, $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_{1,\varepsilon}$ a las correspondientes autofunciones positivas normalizadas en L^2, que se extienden con cero fuera de $\hat{\Omega}$, y $\tilde{\Omega}$, respectivamente. Para $\delta > 0$, definimos

$$u = u_{\varepsilon,\delta} = \begin{cases} \hat{\varphi}_1 & en\ \hat{\Omega}, \\ -\delta\tilde{\varphi}_1 & en\ \tilde{\Omega}. \end{cases}$$

Entonces $u = \hat{\varphi}_1 - \delta\tilde{\varphi}_1 \in H_0^1(\Omega)$ y se tiene

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda_1 u^2\right) = \int_{\hat{\Omega}} \left(|\nabla \hat{\varphi}_1|^2 - \lambda_1 \hat{\varphi}_1^2\right) + \delta^2 \int_{\tilde{\Omega}} \left(|\nabla \tilde{\varphi}_1|^2 - \lambda_1 \tilde{\varphi}_1^2\right) =$$
$$= \left(\hat{\lambda}_1 - \lambda_1\right) + \delta^2 \left(\tilde{\lambda}_1 - \lambda_1\right).$$

Como $\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_{1,\varepsilon} \to \lambda_1$ cuando $\varepsilon \to 0$ (vea [1] , Lema 2.5), elegimos $\varepsilon > 0$, tal que $\hat{\lambda}_1 - \lambda_1 < \eta/4$ y $\delta > 0$ tal que $\tilde{\lambda}_1 - \lambda_1 < \eta/4\delta^2$. Con estos valores de ε y δ, se tiene

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda_1 u^2\right) < \eta/2. \tag{7}$$

Por otro lado, se observa que $u \in M_r$ para algún $r = r(\varepsilon, \delta)$ apropiado pues u cambia de signo. Además

$$\int_\Omega \left(\left(u^+\right)^2 + r\left(u^-\right)^2\right) = \int_{\hat{\Omega}} \hat{\varphi}_1^2 + r\delta^2 \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\varphi}_1^2$$
$$= 1 + r\delta^2 > 1.$$

Entonces $u/\sqrt{1 + r\delta^2} \in N_r$. Por tanto, se ha construido una función que satisface las dos condiciones en el ínfimo (5) y verifica (7), lo cual es una contradicción con (6). ■

3. EJEMPLO DEL ESPECTRO DE FUCIK

En esta sección se dará una descripción completa del espectro de Fucik de para $\Omega = \langle 0, \pi \rangle \subset \mathbb{R}$; es decir, hallaremos el conjunto de puntos $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ para los cuales el problema

$$\begin{cases} -u'' = \alpha u^+ - \beta u^- & \text{en } \langle 0, \pi \rangle \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

tiene solución no trivial.

En primer lugar, calcularemos λ_1 y φ_1 obtener primer autovalor y su correspondiente autofunción positiva de $-\Delta$ respectivamente. Para hallar λ_1 resolvemos la ecuación

$$-u'' = \lambda u \quad \text{en} \quad \langle\, 0, \pi \,\rangle \tag{9}$$

Las soluciones de (9) tienen la forma

$$\begin{cases} u(x) = A\, sen\sqrt{\lambda}\, x + B\cos\sqrt{\lambda} x & \text{para } \lambda > 0 \\ u(x) = A\,x + B & \text{para } \lambda = 0 \\ u(x) = A\,e^{\sqrt{-\lambda}x} + B\,e^{-\sqrt{-\lambda}x} & \text{para } \lambda < 0 \end{cases} \tag{10}$$

De ahí que una solución no trivial de (9) con las condiciones de frontera del problema (8) debe tener la forma

$$u(x) = Asen\sqrt{\lambda}x, \quad \lambda = n^2, \; n \in \mathbb{N}, \quad A \neq 0 \tag{11}$$

Así, el primer autovalor de $-D^2$ es $\lambda_1 = 1$ y la correspondiente autofunción positiva normalizada es $\varphi_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, sen\, x$.

Lema. *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces el problema (8) tiene una solución no trivial si y sólo si, se verifica una de las siguientes condiciones:*

i) $\alpha = 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ arbitrario;

ii) $\beta = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario;

iii) $\alpha > 1, \beta > 1, \dfrac{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \in \mathbb{N}$;

iv) $\alpha > 1, \beta > 1, \dfrac{\sqrt{\beta}\left(\sqrt{\alpha} - 1\right)}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \in \mathbb{N}$;

v) $\alpha > 1, \beta > 1, \dfrac{\sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\beta} - 1\right)}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea u_0 una solución no trivial del problema (8).

Si u_0 no tiene ceros en el intervalo $\langle\, 0, \pi \,\rangle$, entonces u_0 es solución de la ecuación

$$-u'' - \lambda u = 0,$$

donde $\lambda = \alpha$ si $u_0(x) > 0,\ \forall x \in \langle\, 0, \pi \,\rangle$ o $\lambda = \beta$ si $u_0(x) < 0,\ \forall x \in \langle\, 0, \pi \,\rangle$.

Entonces, de acuerdo con (11), $\lambda = n^2$ y $u_0(x) = A\, sen\, nx$, pero como u_0 no tiene ceros en $\langle\, 0, \pi \,\rangle$, debe ser $\lambda = 1$ y $u_0(x) = A\, sen\, x$. En consecuencia, se verifican i) o ii).

Ahora veamos el caso en que u_0 tiene ceros en el intervalo $[0, \pi]$. Primero vemos que el número máximo de ceros es a lo más un número finito. Sea x_0 uno de los ceros de u_0, entonces $u_0'(x_0) \neq 0$ (de lo contrario tendríamos que $u_0 = 0$ en $\langle\, 0, \pi \,\rangle$, pues para cada $\lambda > 0$, la única solución del PVI

$$\begin{cases} -u'' - \lambda u = 0, & \text{en } \langle\, 0, \pi \,\rangle \\ u(x_0) = u'(x_0) = 0 \end{cases}$$

es trivial). Luego, existe una vecindad del punto x_0 que no contiene otro cero de u_0. De lo anterior, y por la compacidad de $[0, \pi]$, se concluye que $u_0(x)$ debe tener sólo un número finito de ceros en $[0, \pi]$. Sea $u_1(x)$ la parte positiva de $u_0(x)$, entonces $u_1(x)$ es solución de

$$-u'' - \alpha u = 0$$

y por ello, $u_1(x) = A\, sen \sqrt{\alpha}\,(x - \xi)$, con $A > 0,\ \alpha > 1,\ \xi$ cero de u_0.

Si $u_2(x)$ es la parte negativa de $u_0(x)$, entonces $u_2(x)$ es solución de

$$-u'' - \beta u = 0$$

y de ahí $u_2(x) = B\, sen \sqrt{\beta}\,(x - \omega)$, con $B < 0,\ \beta > 1,\ \omega$ cero u_0.

Mas exactamente; si $\alpha \geq \beta$

$$u_0(x) = \begin{cases} A\, sen \sqrt{\alpha}\, x & , x \in \langle\, 0, \,\rangle \\ -\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} A\, sen \sqrt{\beta}\left(x - \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}\right) & , x \in \left\langle \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}, \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} \right] \\ A\, sen \sqrt{\alpha}\left(x - \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\right) & , x \in \left\langle \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}, \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} \right] \\ -\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} A\, sen \sqrt{\beta}\left(x - \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\right) & , x \in \left\langle \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}, \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\beta}} \right] \\ \quad \vdots \end{cases} \tag{12}$$

con $A > 0$. Y si $\alpha < \beta$

$$u_0(x) = \begin{cases} B\ sen\sqrt{\beta}x & , x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} \right\rangle \\ -\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} B\ sen\sqrt{\alpha}\left(x - \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\right) & , x \in \left\langle \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}, \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} \right] \\ B\ sen\sqrt{\beta}\left(x - \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\right) & , x \in \left\langle \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}, \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\beta}} \right] \\ -\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} B\ sen\sqrt{\alpha}\left(x - \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{2\pi}{\sqrt{\beta}}\right) & , x \in \left\langle \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\beta}}, \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\beta}} \right] \\ \vdots & \end{cases} \tag{13}$$

con $B < 0$. En ambos casos, debe existir $k \in \mathbb{N}$ tal que se cumple una de las siguientes igualdades

$$k\left(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\right) = \pi \quad , \quad k\left(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\right) + \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} = \pi, \\ k\left(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\right) + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} = \pi\ , \tag{14}$$

lo cual significa que debe verificarse al menos una de las condiciones iii), iv) o v).

Recíprocamente, si se verifica i) o ii), $u(x) = A\ sen\ x$ es solución del problema (8), con $A > 0$ o $A < 0$. Si se verifica una de las condiciones iii), iv) o v), entonces se cumple (14) con $k \in \mathbb{N}$; luego $u(x)$ en una de las formas, (12) o (13) es solución del problema (8). ■

***Proposición* 2.** *El espectro de Fucik de* $-\Delta^2$ *con condiciones de frontera tipo Dirichlet en el intervalo* $\langle 0, \pi \rangle$ *esta formado por todos aquellos* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *que verifican una de las condiciones del lema anterior.*

***Proposición* 3.** *El espectro de Fucik de* $-\Delta^2$ *con condiciones de frontera tipo Dirichlet en el intervalo* $\langle 0, c \rangle$ *está formado por todos aquellos* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *que satisfacen una de las siguientes condiciones:*

i) $\alpha = \frac{\pi^2}{c^2}$, $\beta \in \mathbb{R}$ arbitrario;

ii) $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario, $\beta = \frac{\pi^2}{c^2}$;

iii) $\alpha > \frac{\pi^2}{c^2}$, $\beta > \frac{\pi^2}{c^2}$, $\exists\ k \in \mathbb{N} / k\left(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\right) = c$;

iv) $\alpha > \dfrac{\pi^2}{c^2}$, $\beta > \dfrac{\pi^2}{c^2}$, $\exists\ k \in \mathbb{N} / k\left(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\right) + \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} = c;$

v) $\alpha > \dfrac{\pi^2}{c^2}$, $\beta > \dfrac{\pi^2}{c^2}$, $\exists\ k \in \mathbb{N} / k\left(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\right) + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} = c.$

BIBLIOGRAFÍA

[1] De Figuereido, D.; J. P. Gossez. *On the first curve of the Fucik* Spectrum of an elliptic operator. Diff. int. eq., volume 7, 1285-1302 (1994).

[2] Espinoza, P. C. *Discrete Analogue of Fucik Spectrum of the Laplacian.* Journal of Computational and Applied Mathematics 103, 93 - 97 (1999).

[3] Fucik, S.; Kufner, A. *Nonlinear Differential Equations.* Elsevier Scientific Publishing Company. The Netherlands, (1980).