PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. VI, N° 1, pag. 32 - 48, LIMA-PERÚ. Julio 2003

# UNICOHERENCIAS EN ESPACIOS SÓLIDOS

**William C. Olano Díaz**[1]

**RESUMEN.-** *Se da una implicación entre la "solidez" y la «unicoherencia» en espacios normales y localmente conexos por caminos usando los métodos de la Topología Algebraica que consiste en asociar a cada espacio topológico $X$ un grupo $B(X)$ denominado «Grupo de Bruschlinsky».*

## 1. INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se da una implicación entre la "solidez" y la "unicoherencia" en espacios normales y localmente conexos por caminos usando los métodos de la Topología Algebraica que consiste en asociar a cada espacio topológico $X$ un grupo $B(X)$ denominado "Grupo de Bruschlinsky".

Los espacios sólidos están intimamente relacionados con los retractos absolutos, este resultado tiene uso frecuente en problemas de *"extensión y homotopías"*; aún más para los espacios métricos separables.

## 2. PRELIMINARES

Sean $X$ e $Y$ espacios topológicos y consideremos el conjunto

$$C(X,Y)=\{f;\, f\colon X \to Y \text{ es una función continua}\}.$$

Si $X=Y$, el símbolo $id_X$ significa que $id_X \in C(X,X)$ es la función identidad.

**Definición 1.**

*1)* $1_a \in C(X,Y)$ *significa que* $1_a(x)=a \ \forall x \in X;\ a \in Y$ *(a fijo).*

*2)* $A \subset X$ *es un retracto de* $X$ *si existe* $r \in C(X,A)$ *tal que* $r_{\setminus A}=id_A$.

*3)* $f \in C(X,Y)$ *es un homeomorfismo entre* $X$ *e* $Y$, *denotado por* $f: X \approx Y$; *si existe* $g \in C(Y,X)$ *tal que* $f \circ g = id_Y$ *y* $g \circ f = id_X$. *En este caso denotemos* $f^{-1}=g$, $f^{-1}\colon X \approx Y$.

*4)* $X$ *e* $Y$ *son espacios homeomorfos, denotado por* $X \approx Y$; *si existe* $f \in C(X,Y)$ *tal que* $f\colon X \approx Y$.

[1] Universidad Nacional Mayor de San Marcos - Facultad de Ciencias Matemáticas - Instituto de Investigación.

5) *Sean* $f, g \in C(X,Y), f$ *es homotópico a* $g$, *denotado por* $f \simeq g$ *si existe* $h \in C(X \times \mathbb{I}, Y)$ *tal que:*

$$h(x,0) = f(x) \text{ y } h(x,1) = g(x) \quad \forall x \in X; \; \mathbb{I} = [0,1].$$

6) $f \in C(X,Y)$ *es una equivalencia homotópica; si existe* $g \in C(Y,X)$ *tal que* $f \circ g \simeq id_Y$ *y* $g \circ f \simeq id_X$.

7) $X$ *e* $Y$ *tienen el mismo tipo de homotopía; denotado por* $X \simeq Y$; *si existe una equivalencia homotópica* $f \in C(X,Y)$.

8) $X$ *es contráctil si existe* $x \in X$ *tal que* $X \simeq \{x\}$.

9) *Sea* $I \neq \emptyset$ *y para cada* $\lambda \in I, X_\lambda$ *un conjunto. El conjunto*

$$\prod_{\lambda \in I} X_\lambda = \left\{ x : I \to \bigcup_{\lambda \in I} X_\lambda \,;\, x(\lambda) = x_\lambda \in X_\lambda, \; \forall \; \lambda \in I \right\},$$

*se denomina "producto cartesiano de la familia* $A_\lambda, \lambda \in I$*".*

10) *Sean* $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ *un conjunto de funciones y sea una familia no vacía de conjuntos no vacíos* $X_\lambda, Y_\lambda$. *Para cada* $\lambda \in I$, *la función ,*

$$f = \prod_{\lambda \in I} f_\lambda : \prod_{\lambda \in I} X \to \prod_{\lambda \in I} Y_\lambda$$

*dado por*

$$f((x_\lambda)) = (f_\lambda(x_\lambda)), \forall (x_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} X_\lambda$$

*se denomina "función producto".*

**Observación.-** Como consecuencia de la definición 1, tenemos que $X \simeq Y$ si $X \approx Y$.

**Teorema 1.** *Las afirmaciones siguientes son equivalentes :*

1) $X$ *es contráctil*

2) *Existe* $a \in X$ *tal que* $id_X \simeq 1_a$.

**Demostración.** Si $X$ es contráctil, existe $a \in X$ tal que $X \simeq \{a\}$. Luego existe

$$(f, g) \in C(X, \{a\}) \times C(\{a\}, X)$$

tal que

$$f \circ g \simeq id_{\{a\}}\,,\ 1_{g(a)} = g \circ f \simeq id_X$$

de aquí existe $b = g(a) \in X$ tal que $id_X \simeq 1_b$.

Inversamente, si existe $a \in X$ tal que, $id_X \simeq 1_a$, $id_X \simeq 1_a = i \circ 1_a$ y $1_a \circ i = 1_a \simeq 1_a$ ; donde $i \in C(\{a\}, X)$ es la inclusión.

Luego $i \circ 1_a \simeq id_X$ y $1_a \circ i \simeq 1_a$, existe $a \in X$ tal que $X \simeq \{a\}$.

**Lema 1.** *Sean* $f, \varphi \in C(X,Y)$ *y* $g, \psi \in C(Y,Z)$. *Si* $f \simeq \varphi$ *y* $g \simeq \psi$, *entonces* $f \circ g \simeq \varphi \circ \psi$.

**Demostración.** Si $f \simeq \varphi$ y $g \simeq \psi$, existe $(h,k) \in C(X \times \mathbb{I}, Y) \times C(Y \times \mathbb{I}, Z)$ tal que

$$h(x,0) = f(x),\ h(x,1) = \varphi(x)\ \forall x \in X \qquad \text{y}$$

$$k(y,0) = g(y),\ k(y,1) = \psi(y)\ \forall y \in Y\,.$$

Sea $\Delta \in C(\mathbb{I}, \mathbb{I} \times \mathbb{I})$ la diagonal dada por

$$\Delta(t) = (t,t)\ \ \forall t \in \mathbb{I} \text{ y } r \in C(X \times (\mathbb{I} \times \mathbb{I}), (X \times \mathbb{I}) \times \mathbb{I})$$

dado por

$$r(x,(m,n)) = ((x,m),n),\quad \forall\,(x,m,n) \in X \times \mathbb{I} \times \mathbb{I}\,.$$

Luego de los diagramas

$$h : X \times \mathbb{I} \to Y,\ \ k : Y \times \mathbb{I} \to Z \ \text{ y } \ \Delta : \mathbb{I} \to \mathbb{I} \times \mathbb{I},\ \ id_X : X \to X\,,$$

tenemos el diagrama

$$X \times \mathbb{I} \xrightarrow{id_X \times \Delta} X \times (\mathbb{I} \times \mathbb{I}) \overset{r}{\approx} (X \times \mathbb{I}) \times \mathbb{I} \xrightarrow{h \times id_{\mathbb{I}}} Y \times \mathbb{I} \xrightarrow{k} Z$$

Luego,

$$w = k \circ (h \times id_{\mathbb{I}}) \circ r \circ (id_X \times \Delta) \in C(X \times \mathbb{I}, Z) \text{ y}$$

$$w(x,t) = (k \circ (h \times id_{\mathbb{I}}) \circ r \circ (id_X \times \Delta))(x,t) = k(h(x,t),t),$$

entonces

$$w(x,0) = k(h(x,0),0) = k(f(x),0) = g(f(x)) = g \circ f(x) \quad \text{y}$$

$$w((x,1)) = k(h(x,1),1) = k(\varphi(x),0) = \psi(\varphi(x)) = \psi \circ \varphi(x).$$

Por lo tanto, $f \circ g \simeq \varphi \circ \psi$.

**Proposición 1.** *Sea* $(f,g)\in C(X,Y)\times C(Y,Z)$ *con* $f\circ g$ *y* $g$ *equivalencias homotópicas, entonces,* $f$ *es una equivalencia homotópica.*

**Demostración.** Si existe $(\varphi,\psi)\in C(Z,Y)\times C(Z,X)$ tal que,

$$\varphi\circ g\simeq id_Y,\quad g\circ\varphi\simeq id_Z \text{ y } \psi\circ(g\circ f)\simeq id_X,\ (f\circ g)\circ\psi\simeq id_Z.$$

Luego,

$$(\psi\circ g)\circ f=\psi\circ(g\circ f)\simeq id_X \text{ y}$$

$$f\circ(\psi\circ g)=(id_Y\circ f)\circ(\psi\circ g)\simeq((\varphi\circ g)\circ f)\circ(\psi\circ g)=(((\varphi\circ g)\circ f)\circ\psi)\circ g$$

$$=((\varphi\circ g)\circ(f\circ\psi))\circ g=(\varphi\circ(g\circ(f\circ\psi)))\circ g$$

$$=(\varphi\circ((g\circ f)\circ\psi))\circ g\simeq(\varphi\circ id_Z)\circ g=\varphi\circ g\simeq id_Y.$$

**Corolario 1.** *Sea* $X\simeq Y$. *Si* $X$ *es contráctil,* $Y$ *también lo es.*

**Demostración.** Si $X$ es contráctil, existe $a\in X$ tal que $id_X\simeq 1_a$ y como $X\simeq Y$, existe , tal que,

$$f\circ g\simeq id_Y \quad \text{y} \quad g\circ f\simeq id_X.$$

Pongamos $b=f(a)$ y del diagrama

$$X \xrightarrow[1_a]{id_X} X \xrightarrow[f]{f} Y$$

tenemos que $f=f\circ id_X\simeq f\circ 1_a=1_b$.

Luego del diagrama,

$$Y \xrightarrow[g]{g} X \xrightarrow[1_b]{f} X$$

tenemos que $id_Y\simeq f\circ g\simeq 1_b\circ g=1_b$ entonces $Y$ es contráctil.

**Corolario 2.** *Si* $X\simeq Y$ *y* $Y\simeq Z$, *entonces* $X\simeq Z$.

**Demostración.** Si $X\simeq Y$ y $Y\simeq X$, existen

$$(f,\varphi)\in C(X,Y)\times C(Y,X) \text{ y } (g,\psi)\in C(Y,Z)\times C(Z,Y)$$

tal que

$$\varphi\circ f\simeq id_X,\ f\circ\varphi\simeq id_Y \text{ y } \psi\circ g\simeq id_Y,\ g\circ\psi\simeq id_Z.$$

Luego el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f\simeq f} & Y & \xrightarrow{g\simeq g} & Z \\ \varphi\circ f\simeq id_X \uparrow & & f\circ\varphi\simeq id_Y\simeq\psi\circ g\uparrow & & \uparrow id_Z\simeq g\circ\psi \\ X & \xleftarrow[\varphi\simeq\varphi]{} & Y & \xleftarrow[\psi\simeq\psi]{} & Z \end{array}$$

tenemos que

$$id_X = id_X \circ id_X \simeq (\varphi\circ f)\circ(\varphi\circ f) = \varphi\circ(f\circ\varphi)\circ f$$
$$\simeq \varphi\circ(\psi\circ g)\circ f = (\varphi\circ\psi)\circ g\circ f \qquad \text{y}$$
$$id_Z = id_Z\circ id_Z \simeq (g\circ\psi)\circ(g\circ\psi) = g\circ(\psi\circ g)\circ\psi$$
$$\simeq g\circ(f\circ\varphi)\circ\psi = g\circ f\circ(\varphi\circ\psi)$$

Por tanto $X \simeq Z$.

**Corolario 3.** *Sea* $f\in C(X,Y)$. *Si* $X \circ Y$ *es contráctil, entonces existe* $b\in Y$ *tal que* $f\simeq 1_b$.

**Demostración.** Si $X$ es contráctil, existe $a\in X$ tal que $id_X \simeq 1_a$.

Del diagrama

$$X \xrightarrow[1_a]{id_X} X \xrightarrow[f]{f} Y$$

tenemos que

$$f = f\circ id_X \simeq f\circ 1_a = 1_a,$$

existe $b = f(a)\in Y$ tal que $f\simeq 1_b$.

Si $Y$ es contráctil, existe $b\in Y$ tal que $id_Y \simeq 1_b$. Del diagrama

$$X \xrightarrow[f]{f} Y \xrightarrow[1_b]{id_Y} Y$$

tenemos que $f = id_Y\circ f \simeq 1_b\circ f = 1_b$, existe $b\in Y$ tal que $f\simeq 1_b$.

**Proposición 2.** *Sean* $1_a, 1_b \in C(X,Y)$, *las relaciones siguientes son equivalentes:*

*1)* $1_a \simeq 1_b$
*2)* $a$ *y* $b$ *están en la misma componente conexa por caminos de* $Y$.

**Demostración.** Si $1_a \simeq 1_b$, existe , tal que

$$h(x,0) = a \text{ y } h(x,1) = b \quad \forall\, x\in X.$$

Luego $h \in C(\{x\} \times \mathbb{I}, Y)$ y como $f : \mathbb{I} \approx \{x\} \times \mathbb{I}$ dado por $f(t) = (x, t)$ $\forall t \in \mathbb{I}$,

entonces existe $g = h \circ f \in C(\mathbb{I}, Y)$ tal que $g(0) = a$ y $g(1) = b$.

Inversamente, si existe $f \in C(\mathbb{I}, Y)$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$, definimos $h = f \circ p: X \times \mathbb{I} \to Y$; donde $p \in C(X \times \mathbb{I}, \mathbb{I})$ es la proyección en $\mathbb{I}$.

Luego

$$h \in C(X \times \mathbb{I}, Y) \text{ con } h(x,0) = a \text{ y } h(x,1) = b, \text{ entonces } 1_a \simeq 1_b.$$

**Corolario 4.** *Sean* $f, g \in C(X, Y)$. *Si* $X$ *es contráctil y* $Y$ *es conexo por caminos entonces* $f \simeq g$.

**Demostración.** Si $X$ es contráctil, existen $a, b \in Y$ tal que $f \simeq 1_a$, $g \simeq 1_b$ y si $Y$ es conexo por caminos, $a$ y $b$ están en la misma componente conexa por conexos de $Y$. Luego, $f \simeq 1_a \simeq 1_b \simeq g$.

**Teorema 2.** *Si* $X$ *es contráctil, entonces es conexo por caminos.*

**Demostración.** Si $X$ es contráctil, existe $a \in X$ tal que $id_X \simeq 1_a$.
Luego existe $h \in C(X \times \mathbb{I}, X)$ tal que $h(x,0) = id_X(x)$ y $h(x,1) = a$ $\forall x \in X$.

Sea $x \in X$, $h \in C(\{x\} \times \mathbb{I}, X)$ y como $f: \mathbb{I} \approx \{x\} \times \mathbb{I}$ dado por $f(t) = (t, x)$ $\forall t \in \mathbb{I}$, entonces

$$\alpha_x = h \circ f \in C(\mathbb{I}, X) \text{ y } \alpha_x(0) = x,\ \alpha_x(1) = a.$$

Sea $y \in X$, $\alpha_y \in C(\mathbb{I}, X)$ y $\alpha_y(0) = y$, $\alpha_y(1) = a$. Definamos, $\alpha: \mathbb{I} \to X$ por

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_x(2t) & , \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \alpha_y(2 - 2t) & , \quad \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Para $t = \frac{1}{2}$, $\alpha_x\left(2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \alpha_x(1) = a = \alpha_y\left(2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, entonces

$$\alpha \in C(\mathbb{I}, X) \text{ y } \alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y.$$

Por lo tanto, $X$ es conexo por caminos.

**Corolario 5.** *Sea* $a \in X$. *Si* $X$ *es contráctil, entonces* $id_X = 1_a$.

**Corolario 6.** *Sean* $f, g \in C(X, Y)$. *Si* $Y$ *es contráctil, entonces* $f \simeq g$.

**Demostración.** Si $Y$ es contráctil, existe $b \in Y$ tal que $f \simeq 1_b$.

Del diagrama

$$X \xrightarrow[g]{g} Y \xrightarrow[1_b]{id_Y} Y$$

tenemos que $g = id_Y \circ g \simeq 1_b \circ g = 1_b \simeq f$.

**Proposición 3.** *Sea* $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ *una familia de espacios topológicos. Entonces*

$$X = \prod_{\lambda \in L} X_\lambda \simeq \prod_{\lambda \in L} Y_\lambda = Y, \quad \textit{siempre que} \quad X_\lambda \simeq Y_\lambda \quad \forall \lambda \in L.$$

**Demostración.** Sea $\lambda \in L$ con $X_\lambda \simeq Y_\lambda$, existe

$$(f_\lambda, g_\lambda) \in C(X_\lambda, Y_\lambda) \times C(Y_\lambda, X_\lambda)$$

tal que

$$f_\lambda \circ g_\lambda \simeq id_{Y_\lambda} \text{ y } g_\lambda \circ f_\lambda \simeq id_{X_\lambda}.$$

Luego existe

$$h_\lambda \in C(X_\lambda \times \mathbb{I}, X_\lambda)$$

tal que $h_\lambda(x, 0) = x$ y $h_\lambda(x, 1) = g_\lambda \circ f_\lambda(x)$ $\forall x \in X_\lambda$, entonces,

$$\prod_{\lambda \in L} (h_\lambda) \in C\left(\prod_{\lambda \in L} (X_\lambda \times \mathbb{I}), \prod_{\lambda \in L} X_\lambda\right).$$

Definimamos

$$\Delta : \mathbb{I} \to \mathbb{I}^L \text{ por } \Delta(t) = (t_\lambda)_{\lambda \in L} \; \forall t \in \mathbb{I}; \; t_\lambda = t \; \forall \lambda \in L$$

$$f : \left(\prod_{\lambda \in L} X_\lambda\right) \times \mathbb{I}^L \approx \prod_{\lambda \in L} (X_\lambda \times \mathbb{I})$$

dada por

$$f\left((a_\lambda)_{\lambda \in L}, (r_\lambda)_{\lambda \in L}\right) = \left((a_\lambda, r_\lambda)_{\lambda \in L}\right) \; \forall \left((a_\lambda)_{\lambda \in L}, (r_\lambda)_{\lambda \in L}\right) \in \left(\prod_{\lambda \in L} X_\lambda\right) \times \mathbb{I}^L \quad \text{y}$$

$$(id_X \times \Delta) : X \times \mathbb{I} \to X \times \mathbb{I}^L$$

dado por

$$\left(id_X \times \Delta\right)(x,t) = \left(x, (t_\lambda)_{\lambda \in L}\right) \forall (x,t) \in X \times \mathbb{I}.$$

Del diagrama

$$X \times \mathbb{I} \xrightarrow{(id_X \times \Delta)} X \times \mathbb{I}^L \overset{f}{\approx} \prod_{\lambda \in L} (X_\lambda \times \mathbb{I}) \xrightarrow{\prod_{\lambda \in L} h_\lambda} X$$

tenemos

$$h = \left(\prod_{\lambda \in L} h_\lambda\right) \circ f \circ (id_X \times \Delta) \in C(X \times \mathbb{I}, X) \quad \text{y}$$

$$h\left((a_\lambda)_{\lambda \in L}, 0\right) = \left(\prod_{\lambda \in L} h_\lambda\right) \circ f\left(\prod_{\lambda \in L} a_\lambda, \prod_{\lambda \in L} 0_\lambda\right) = \left(\prod_{\lambda \in L} h_\lambda (a_\lambda, 0)\right) = (a_\lambda)_{\lambda \in L},$$

$$h\left((a_\lambda)_{\lambda \in L}, 1\right) = \left(\prod_{\lambda \in L} h_\lambda\right) \circ f\left((a_\lambda)_{\lambda \in L}, (1_\lambda)_{\lambda \in L}\right) = \prod_{\lambda \in L} h_\lambda (a_\lambda, 1) =$$

$$\prod_{\lambda \in L} (g_\lambda \circ f_\lambda)(a_\lambda) = \left(\prod_{\lambda \in L} g_\lambda\right) \circ \left(\prod_{\lambda \in L} f_\lambda\right)\left((a_\lambda)_{\lambda \in L}\right).$$

Luego

$$\left(\prod_{\lambda \in L} g_\lambda \; g_\lambda\right) \circ \left(\prod_{\lambda \in L} f_\lambda \; f_\lambda\right) \simeq id_X.$$

Análogamente se tiene que

$$\left(\prod_{\lambda \in L} f_\lambda\right) \circ \left(\prod_{\lambda \in L} g_\lambda\right) \simeq id_Y$$

Por lo tanto, $X \simeq Y$.

**Lema 2.** *Si $X$ es contráctil, entonces $X \times Y \simeq Y$.*

**Demostración.** Si $X$ es contráctil, existe $a \in X$ tal que $X \simeq \{a\}$. Luego $X \times Y \simeq \{a\} \times Y$ y como $\{a\} \times Y \simeq Y$ (ya que $\{a\} \times Y \approx Y$), por lo tanto, $X \times Y \simeq Y$.

***Teorema 3.*** *Sea $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ una familia de espacios topológicos. Son equivalentes:*

*1)* $X = \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$ *contráctil*

*2)* $X_\lambda$ *es contráctil* $\forall \lambda \in L$.

**Demostración.** Sea $a_\beta \in X_\beta$ y para $\lambda \neq \beta$ en $L$, definamos $i_\lambda : X_\lambda \to X$ por $i_\lambda(x_\lambda) = (y_\lambda)_{\alpha \in L}$;

$$y_\alpha = \begin{cases} a_\beta & , \quad \alpha \neq \lambda \\ x_\beta & , \quad \alpha = \lambda \end{cases}$$

Sea $p_\lambda : X \to X_\lambda$ la proyección y $(i_\lambda \circ id_{\mathbb{I}}) : X_\lambda \times \mathbb{I} \to X \times \mathbb{I}$ dado por

$$(i_\lambda \circ id_{\mathbb{I}})(x,t) = (i_\lambda(x), t) \quad \forall\, (x,t) \in X_\lambda \times \mathbb{I}.$$

Si $X$ es contráctil, existe $b \in X$ tal que $id_X \simeq 1_b$. Luego, existe

$$h \in C(X \times \mathbb{I}, X) \quad \text{tal que} \quad h(x,0) = x \text{ y } h(x,1) = b \ \ \forall x \in X.$$

Del diagrama

$$X_\lambda \times \mathbb{I} \xrightarrow{(i_\lambda \times id_{\mathbb{I}})} X \times \mathbb{I} \xrightarrow{h} X \xrightarrow{p_\lambda} X_\lambda$$

tenemos $\quad k = p_\lambda \circ h \circ (i_\lambda \times id_{\mathbb{I}}) \in C(X_\lambda \times \mathbb{I}, X_\lambda)$ y

$$k(x_\lambda, 0) = p_\lambda \circ h(i_\lambda(x_\lambda), 0) = p_\lambda \circ i_\lambda(x_\lambda) = x_\lambda,\ k(x_\lambda, 1) =$$
$$= p_\lambda \circ h \circ (i_\lambda(x_\lambda), 1) = p_\lambda(b) = c \quad \forall x_\lambda \in X_\lambda .$$

Luego existe $c \in X_\lambda$ tal que $id_{X_\lambda} \simeq 1_c$, entonces $X_\lambda$ es contráctil. Inversamente, sea $\lambda \in L$ con $X_\lambda$ contráctil, existe $b_\lambda \in X$ tal que $X_\lambda \simeq \{b_\lambda\}$. Entonces $X = \prod_{\lambda \in L} X_\lambda \simeq \prod_{\lambda \in L} \{b_\lambda\}$ y como $\prod \{b_\lambda\} = \{(b_\lambda)_{\lambda \in L}\}$, se sigue que $X$ es contráctil.

**Proposición 4.** *Las afirmaciones siguientes son equivalentes :*

*1)* *A es un retracto de* $X$

2) *Existe* $r \in C(X,X)$ *tal que* $r \circ r = r$ y $A = r(X)$.

**Demostración.** Si $A$ es un retracto de $X$, existe $r \in C(X,A)$ tal que $r_{\setminus A} = id_A$. Luego $r \circ r = r$ y $A = r(X)$. Inversamente, si $r \in C(X,X)$ tal que $r \circ r = r$ y $A = r(X)$, entonces existe $r \in C(X,X)$ tal que $r_{\setminus A} = id_A$.

**Teorema 4.** *Sea $A$ un retracto de $X$. Entonces:*

*1) $A$ es un cerrado si $X$ es de Hausdorff.*

*2) $A$ es conexo si $X$ lo es.*

*3) $A$ es localmente conexo si $X$ lo es.*

*4) $A$ es localmente conexo por caminos si $X$ lo es.*

*5) $A$ es conexo por caminos si $X$ lo es.*

*6) $A$ es contráctil si $X$ lo es.*

**Demostración.** Sea $r \in C(X, A)$ la retracción.

(1) $A = r(X) = \{y \in X; \ r(y) = y\}$ es cerrado ya que $X$ es de Hausdorff.

(2) Es obvio.

(3) Sea $a \in A$ y $V \in \nu_A(a)$, por la continuidad de $r$, existe $W \in \nu_X(a)$ tal que $r(W) \subset V$ y por la hipótesis, existe $M \in \nu_X(a)$ conexo tal que $M \subset W$. Luego, $a \in r(W) \subset V$ y $r(M)$ es conexo. Como

$$M \cap A \in \nu_A(a) \text{ y } M \cap A = r(M \cap A) \subset r(M), \ r(M) \in \nu_A(a).$$

Por lo tanto $A$ es localmente conexo.

4) Sea $a \in A$ y $V \in \nu_A(a)$, por la continuidad de $r$ existe $W \in \nu_X(a)$ tal que $r(W) \subset V$ y por hipótesis, existe $M \in \nu_X(a)$ conexo por caminos tal que $M \subset V$, luego $a \in r(W) \subset V$ y $r(M)$ es conexo. Como

$$M \cap A \in \nu_A(a) \quad \text{y} \quad M \cap A = r(M \cap A) \subset r(M), \ r(M) \in \nu_A(a)$$

es conexo por caminos. Por lo tanto, $A$ es localmente conexo por caminos.

5) Sea $f \in C(\{0,1\}, A)$ y como $X$ es localmente conexo por caminos, existe $g \in C(\mathbb{I}, X)$ tal que $g_{\setminus\{0,1\}} = f$. Tomando $h = r \circ g \in C(\mathbb{I}, A), h_{\setminus\{0,1\}} = f$. Por lo tanto $A$ es conexo por caminos.

6) Si $X$ es contráctil, existe $a \in X$ tal que $id_X \simeq 1_a$ y como $A$ es un retracto de $X$ existe $r \in C(A, X)$ tal que $r_{\setminus A} = id_A$. Pongamos $i: A \to X$ la conclusión y del diagrama

$$A \underset{i}{\overset{i}{\longrightarrow}} X \underset{1_a}{\overset{id_X}{\longrightarrow}} X \underset{r}{\overset{r}{\longrightarrow}} A$$

tenemos que $id_A = r \circ i = r \circ id_X \circ i \simeq r \circ 1_a \circ i = 1_a$ , entonces $A$ es contractil.

**Proposición 5.** *Sea $X = A \bigcup B$ con $A \bigcap B = \{p\}$. Si $A$ y $B$ son cerrados, entonces $A$ y $B$ son retractos de $X$.*

**Demostración.** Si $A$ y $B$ son cerrados, definamos $f\colon X \to A$ por

$$f = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in A \\ p & \text{si} \quad x \in B \end{cases}$$

Dado que $id_A$ y $1_p$ coinciden en $A \bigcap B = \{p\}$, $f \in C(X, A)$ y $f_{\setminus A} = id_A$. Luego $A$ es un retracto de $X$. Haciendo $B = A$, se demuestra que $B$ es un retracto de $X$.

**Proposición 6.** *Sean $A \subset X$ y $Y \neq \emptyset$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes :*

1) *$A$ es un retracto de $X$.*

2) *$A \times Y$ es un retracto de $X \times Y$.*

**Demostración.** Denotemos $i\colon A \to X$, $j\colon A \times Y \to X \times Y$ las inclusiones. Además, para $b \in Y$, definamos $g\colon X \to X \times Y$ dado por $g(x) = (x, b)\ \forall x \in X$ y $p\colon X \times A \to A$ la proyección en $A$.

Si $A$ es un retracto de $X$, existe $r \in C(X, A)$ tal que $r \circ i = id_A$. Luego $(i \times id_X,\ \ r \times id_Y) \in C(A \times X, X \times Y) \times C(Y \times X, A \times Y)$ y $(r \times id_Y) \circ i \times id_X$, AxY es un retracto de $X \times Y$. Inversamente, si $A \times Y$ es un retracto de $X \times Y$, existe $r \in C(X \times Y, A \times X)$ tal que $r \circ j = id_{A \times Y}$. Luego

$$(p \circ id_{A \times Y} \circ g)(a) = p(id_{A \times Y}(g(a))) = p(id_{A \times Y}(a, b)) = a \ \ \forall a \in A \qquad \text{y}$$
$$(p \circ r \circ g)(a) \ = p \circ r(g(a)) = p(r(a, b)) = p(a, b) = a \ \ \forall a \in A.$$

Entonces

$$(p \circ r \circ g) \in C(X, A) \quad \text{y} \quad p \circ r \circ g \circ i = id_A$$

lo que demuestra que $A$ es un retracto de $X$.

**Proposición 7.** *Sean $A \subset B$ y $B \subset X$. Si $A$ es un retracto de $B$ y $B$ es un retracto de $X$, $A$ es un retracto de $X$.*

## 2. ESPACIOS SÓLIDOS

Decimos que un espacio de Hausdorff $Y$ es «sólido», si para cada subconjunto cerrado $A$ de un espacio normal de Hausdorff $X$ y $\forall f \in C(A,Y)$, existe $g \in C(X,Y)$ tal que $g_{\setminus A} = f$.

El siguiente es un resultado clásico para la topología de conjuntos.

**Teorema de Tietze**

*Sea $X$ un espacio de Hausdorff. Las afirmaciones siguientes son equivalentes :*

1) $X$ *es normal*

2) $\forall A \subset X$ *cerrado* y $\forall f \in C(A,\mathbb{I})$, *existe* $g \in C(X,\mathbb{I})$ *tal que* $g_{\setminus A} = f$.

**Ejemplos de espacios sólidos**

Por el teorema de Tietze, $\mathbb{I}$ es sólido y por ([1]; pags. 134 - 135) se tiene que $(-1,1)$ y $(-1,1]$ son sólidos.

**Observación.**

1) Como consecuencia de la definición, tenemos que la solidez es invariante bajo homeomorfismo.

2) $\mathbb{R}$ y los intervalos en $\mathbb{R}$ son espacios sólidos..

**Proposición 8.** *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Las afirmaciones siguientes son equivalentes :*

1) $X = \prod_{i\in I} X_i$ *es sólido*

2) *Para cada* $i \in I, X_i$ *es sólido.*

**Demostración.** Sea $a_\beta \in X_\beta$ y para $\lambda \neq \beta$ en I, definamos $i_\lambda : X_\lambda \to X$ por $i_\lambda(x_\lambda) = (y_\lambda)_{\alpha\in L}$;

$$y_\alpha = \begin{cases} a_\beta & , \quad \alpha \neq \lambda \\ x_\lambda & , \quad \alpha = \lambda \end{cases}$$

Sea $p_\lambda : X \to X_\lambda$ la proyección, $p_\lambda \circ i_\lambda = id_{x_\lambda}$. Sea $A$ un subconjunto cerrado de un espacio de Hausdorff normal $Y$ y $i : A \to Y$ la inclusión. Si

$f \in C(A, X_\lambda)$ y $X$ es sólido, existe $g \in C(Y, X)$ tal que $g \circ i = i_\lambda \circ f$.

Entonces existe $h = p_\lambda \circ g \in C(Y, X_\lambda)$ tal que $h \circ i = p_\lambda \circ g \circ i = p_\lambda \circ i_\lambda \circ f$ $= id_{X_\lambda} \circ f = f$. Por lo tanto, $X_\lambda$ es sólido; $\forall \lambda \in I$. Inversamente, si $X_\lambda$ es sólido y si $f \in C(A, X)$, $\exists_{g_\lambda} \in C(Y, X_\lambda)$ tal que $g_\lambda \circ i = p_\lambda \circ f$. Luego, existe $\prod_{i \in I} g_\lambda \in C(Y, X)$ tal que

$$\left(\prod_{i \in I} g_\lambda\right) \circ i = \left(\prod_{i \in I} (g_\lambda \circ i)\right) = \prod_{i \in I} (p_\lambda \circ f) = f$$

pues, $a \in A$ y $f(a) = (f_\lambda(a))_{i \in I}$, $p_\lambda(f(a)) = f_\lambda(a)$. De aquí

$$\left(\prod_{i \in I} (p_\lambda \circ f)\right)(a) = \prod_{i \in I} (p_\lambda(f(a))) = \prod_{i \in I} (f_\lambda(a)) = (f_\lambda(a))_{i \in I} = f(a).$$

Luego existe $h = \prod_{i \in I} g_\lambda \in C(Y, X)$ tal que $h \circ i = \prod (p_\lambda \circ f) = f$, entonces $X$ es sólido.

**Corolario 7.** *El $n$ – cubo unidad, $\mathbb{I}^n$, y el $n$ - espacio euclideano, $\mathbb{R}^n$, y sus* interiores son espacios sólidos.

**Teorema 5.** *Sea $A$ un subconjunto de un espacio normal sólido $X$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes :*

1) *$A$ es un retracto de $X$*
2) *$A$ es sólido y cerrado.*

**Demostración.** Si $A$ es un retracto de $X$, existe $r \in C(X, A)$ tal que $r_A = id_A$ y $A$ es cerrado ($X$ es sólido).

Sea $B$ un subconjunto de un espacio normal $Y$ y $f \in C(B, A)$.

Sea $(i, j) \in C(B, Y) \times C(A, X)$ las inclusiones y como $X$ es sólido, existe $h \in C(Y, X)$ tal que $j \circ f = h \circ i$.

Tomando $\varphi = id_A \circ r \circ h \in C(B, A)$, entonces $\varphi \circ i = f$. Inversamente, si $A$ es sólido y cerrado, existe $r \in C(X, A)$ tal que $r_A = id_A$. Por lo tanto, $A$ es un retracto de $X$.

**Corolario 8.** *La $n$ - esfera, $\mathbb{S}^n$ no es sólido.*

**Proposición 9.** Sea $A$ *un subconjunto de un espacio de Hausdorff* $X$. Si $A$ *es cerrado y sólido, entonces* $A$ *es un retracto de* $X$.

**Demostración.** Es la recíproca del teorema anterior.

**Proposición 10.** *Si* $X$ *es sólido, entonces* $X$ *es conexo por caminos* .

**Demostración.** Sean $a,b\in X$, definamos $f:\{0,1\}\to X$ por $f(0)=a$, $f(1)=b$ y si $X$ es sólido, existe $g\in C(\mathbb{I},X)$ tal que $g_{\setminus\{0,1\}}=f$. Por lo tanto, $X$ es conexo por caminos.

**Corolario 9.** *Sean* $f,g\in C(X,Y)$. *Si* $X$ *es binormal y* $Y$ *es sólido, entonces* $f\simeq g$.

**Demostración.** Sea $M=X\times\{0\}\cup X\times\{1\}$, definamos $k:M\to Y$ por

$$k(x,t)=\begin{cases} f(x) & , \quad t=0 \\ g(x) & , \quad t=1 \end{cases}.$$

y como $Y$ es sólido, existe $h\in C(X\times\mathbb{I},Y)$ tal que $h_{\setminus M}=k$. Por lo tanto $f\simeq g$.

**Teorema 6.** $X$ *es localmente conexo por caminos si* $X$ *es sólido compacto.*

**Demostración.** Si $X$ es sólido compacto y por ([2]; 7, 118), $X$ se identifica a un subespacio de un cubo $\mathbb{I}^L$, es decir, existe $A\subset\mathbb{I}^L$ tal que $f:X\approx A$. Como $X$ es sólido, $A$ es sólido compacto y de aquí $A$ es un retracto de $\mathbb{I}^L$, entonces $A$ es localmente conexo por caminos. Por lo tanto $X$ es localmente conexo por caminos.

**Teorema 7.** $X$ *es contráctil si es sólido binormal (* $X\times\mathbb{I}$ *es normal y* $X$ *es paracompacto).*

**Demostración.** Sea $M\subset X\times\mathbb{I}$ y $a\in X$ con $M=X\times\{0,1\}\cup\{a\}\times\mathbb{I}$, definamos $f:M\to X$ por

$$f(x,t)=\begin{cases} x & , \quad t=0 \\ a & , \quad x=a \\ .a & , \quad t=1 \end{cases}$$

Si $X$ es sólido, existe $g\in C(X\times\mathbb{I},X)$ tal que $g_{\setminus M}=f$ y de aquí existe $a\in X$ tal que $g\simeq 1_a$. Por lo tanto $X$ es contráctil.

**Proposición 11.** *Todo espacio sólido paracompacto es sólido binormal.*

**Demostración.** Sea $X$ un espacio sólido paracompacto y por ([3]; $x$.1.12, 20), ([4]; 2.2; 163) se tiene que $X \times \mathbb{I}$ es normal paracompacto y se concluye del teorema anterior.

**Corolario 10.** *Todo espacio sólido paracompacto es contráctil.*

Demostraremos simultáneamente que el espacio proyectivo $P_n$ sobre el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, los números complejos $\mathbb{C}$ y los cuaterniones $\mathbb{H}$ no son espacios sólidos.

**Proposición 12.** *$P_nF$ no es un espacio sólido.*

**Demostración.** *Por ([5]; vii, 9.8, 224), tenemos que para $n > k > 0$, $P_kF$ no es retracto de $P_nF$ y se concluye de la proposición 2.2.*

## 3. Unicoherencias en Espacios Sólidos

Cerramos en esta parte con una implicación entre la «*solidez*» y la «*unicoherencia*» en espacios normales y localmente conexos por caminos. Pero la recíproca no es válida. Por ejemplo $\mathbb{C}P^n$, $n-$espacio proyectivo complejo y $\mathbb{R}P^n$, $n-$espacio proyectivo real $(n \geq 2)$ son normales, localmente conexos por caminos, unicoherentes ([6]; ) y no son sólidos.

Denotemos el plano complejo por $\mathbb{C}$, el plano complejo sin el origen por $\mathbb{C}*$, y la función exponencial compleja por $e : \mathbb{C} \to \mathbb{C}*$. Escribiremos $\mathcal{F}(X) = C(X, \mathbb{C}*)$ y para $f, g \in \mathcal{F}(X)$, definimos

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x), \\ (f / g)(x) &= f(x) / g(x), \\ 1(x) &= 1, \end{aligned}$$

para cada $x \in X$. Así, $\mathcal{F}(X)$ se convierte en un grupo abeliano. Escribiremos

$$\varepsilon(X) = \left\{ f \in \mathcal{F}(X) \text{ ; existe } \varphi \in C(X, \mathbb{C}) \text{ tal que } f(x) = e^{\varphi(x)} \ \forall \ x \in X \right\}.$$

Se ve que $\varepsilon(X)$ es un subgrupo abeliano de $\mathcal{F}(X)$.

Al grupo cociente

$$B(X) = \mathcal{F}(X) / \varepsilon(X)$$

se le denomina el grupo de Bruschlinsky de $X$. Además, $B(X) \simeq 1$ significa que $\mathcal{F}(X) = \varepsilon(X)$.

**Proposición 13.** Si $X$ *es contráctil, entonces* $B(X) \simeq 1$. Ver ([6]; II.1.23,20)

Sea $X$ un espacio conexo. Se dice que $X$ es un espacio unicoherente si para cada par de cerrados conexos $A, B$ tal que $X = A \cup B$ se tiene que $A \cap B$ es conexo.

**Teorema 7.** *Sea* $X$ *un espacio conexo. Si* $X$ *es normal y* $B(X) \simeq 1$ *entonces* $X$ *es unicoherente. Ver ([6]; ).*

**Proposición 14.** *Todo espacio sólido paracompacto es unicoherente.*

**Demostración.** Si $X$ es sólido paracompacto entonces $X$ es normal, conexo y contráctil. Se sigue de proposición 13 y teorema 7 que $X$ es unicoherente.

**Corolario 10.** *Sean* $f, g \in C(X, Y)$. *Si* $X$ *es contráctil y* $Y$ *es conexo por caminos,* $f \simeq g \simeq 1_b$ $\forall b \in Y$.

**Proposición 15.** $X$ *es simplemente conexo si es sólido.*

**Demostración.** Sean $\alpha, \beta \in C(\mathbb{I}, X)$ con $\alpha(0) = \alpha(1) = b = \beta(0) = \beta(1)$ y si $X$ es sólido, $X$ es conexo por caminos y como $\mathbb{I}$ es contráctil, se tiene que $\alpha \simeq \beta \simeq 1_b \simeq 1_a$, $\forall a \in X$.

**Teorema 8.** *Sea* $Z$ *un espacio localmente conexo por caminos y* $p \in C(Y, X)$ *un recubridor universal. Si* $f \in C(Z, X)$ *y* $Z$ *es simplemente conexo, existe* $g \in C(Z, Y)$ *tal que* $p \circ g = f$. *([7])*

**Corolario 11.** *Sea* $X$ *un espacio normal. Si* $X$ *es localmente conexo por caminos y simplemente conexa, entonces es unicoherente.*

**Demostración.** Sea $f \in \mathcal{F}(X)$ y como la función exponencial compleja $e: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ es un recubridor, existe $\varphi \in C(X, \mathbb{C})$ tal que $f(x) = e^{\varphi(x)}$, $\forall x \in X$. De aqui $f \in \varepsilon(X)$ entonces $\mathcal{F}(X) = \varepsilon(X)$, y por teorema 8, se tiene que $X$ es unicoherente.

**Corolario 12.** *Sea* $X$ *un espacio normal y localmente conexo por caminos. Si* $X$ *es sólido entonces* $X$ *es unicoherente.*

Finalmente, mencionamos para espacios métricos separables una relación entre espacios sólidos y los espacios retractos absolutos.

Un espacio metrizable Y es un retracto absoluto si para todo espacio metrizable E que contenga a Y como subespacio cerrado, Y es un retracto de E.

**Proposición 16.** *Sea Y un espacio métrico separable. Las afirmaciones siguientes son equivalentes ( Ricabarra [8]. v.7.21; 235) :*

1. *Y es sólido*
2. *Y es un retracto absoluto y* $G_g$ *absoluto.*

## BIBLIOGRAFIA


[1] **Ayala Gómez, Rafael.** *Elementos de topología,* Addison -Wesley, España, (1997).

[2] **Kelley, J.L .** *Topología General,* Argentina, Eudeba, (1962).

[3] **Margalet Roig, J.** *Topología* ****. Editorial Alhambra, España, (1980).

[4] **Dugundi, J.** *Topología,* Allyn and Bacon, (1996).

[5] **Dold, A .** *Lecture on Algebraic Topology,* Berlin - Heideberg, New York, Springer-Verlag, (1972).

[6] **Olano Díaz, William C.** *Segundo Teorema Fundamental de Eilenberg.* Tesis para optar título de Licenciado en Matemática, UNMSM, Lima-Perú, (2002).

[7] **Lages Lima, Elon;** *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento,* IMPA-Brasil, (1993).

[8] **Riacabarra, R.A., Larotonda, A.R.** *Notas sobre Topología Algebraica.*