PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. VI, N° 2, pags. 37 - 46, LIMA-PERÚ. Diciembre 2003

COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA NO LINEAL DE ORDEN n

Santiago César Rojas Romero[1]

RESUMEN.- *En este artículo demostramos que las soluciones de Ecuaciones Diferenciales Odinarias (EDO) no lineales con coeficientes continuos y términos no lineales tendiendo a cero en el infinito, tienen comportamiento asintótico similar a las soluciones de sus correpondientes ecuaciones lineales.*

PALABRAS CLAVE.- *Comportamiento asintótico, Desigualdad de Gronwall, E.D.O. no lineales.*

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF AN n-TH ORDER NONLINEAR O.D.E.

ABSTRACT.- *In this paper, we prove that the solution of non-linear Ordinary Differential Equations (ODE), with continuous coefficients and non-linear terms tending to zero at infinity, have an asymptotic behavior similar to the solution of there corresponding linear equations.*

KEYWORDS.- *Asymptotic behavior, Gronwall's inequality, Non-linear ODE.*

1. INTRODUCCIÓN

Sean las ecuaciones

$$x^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}(t) \left[x^{(i)} \right]^{r_{ij}} = 0 , \tag{1}$$

$$x^{(n)} + b_{n-1}(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + b_1(t)\, x' + b_0(t) x + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}(t) \left[x^{(i)} \right]^{r_{ij}} = 0 . \tag{2}$$

Donde $n \geq 2$, los m_i son arbitrarios pero finitos y todos los coeficientes a_{ij} y b_i son continuos; además cada r_{ij} tiene la forma p_{ij} / q_{ij} con p_{ij} entero positivo y q_{ij} entero positivo impar.

[1] Profesor de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. E-mail: santiagocesar2@hotmail.com

Asumiendo que los términos no tienden a cero cuando t tiende al infinito, veremos que las soluciones de (1) y (2) tienen comportamiento asintótico similar a las soluciones de las correspondientes ecuaciones lineales

$$x^{(n)} = 0, \tag{1*}$$

$$x^{(n)} + b_{n-1}(t)\,x^{(n-1)} + \ldots + b_1(t)\,x' + b_0(t)\,x = 0\,. \tag{2*}$$

Waltman [1] prueba los resultados fundamentales usando elaboradas herramientas. Aquí agregamos algunas hipótesis y en las pruebas usaremos una versión generalizada de la desigualdad de Gronwall, la cual también incluimos en el trabajo con el ánimo de hacerlo más completo.

2. DESIGUALDAD DE GRONWALL

Lema.

Sean $t_1 \geq t_0$, f y g continuas y no negativas para $t \geq t_1, t \geq t_0$, respectivamente. Supongamos que,

$$f(t) \leq \delta + \int_{t_1}^{t} g(\tau)\, f^{r}(\tau)\, d\tau\ , \quad \forall t \geq t_1 \geq t_0\,,$$

donde $\delta > 0$ y $r \geq 1$; además $\int_{t_0}^{\infty} g(\tau)\, d\tau < \infty$. Si $r > 1$ y ambos t_0 y δ satisfacen

$$\delta < \left[(r-1) \int_{t_0}^{\infty} g(\tau)\, d\tau \right]^{-1/(r-1)}, \tag{3}$$

entonces $f(t)$ es acotado en $[t_1, \infty)$. Si $r = 1$, la conclusión sigue siendo válida sin necesidad de la condición sobre t_0 y δ.

Prueba.

Pongamos $h(t) = \delta + \int_{t_1}^{t} g(\tau)\, f^{r}(\tau)\, d\tau$. De aquí $h'(t) = g(t)\, f^{r}(t)$ y por hipótesis $f(t) \leq h(t)$. Luego, $h'(t) \leq g(t)\, h^{r}(t)$ y de allí que

$$\int_{t_1}^{t} h^{-r}(\tau)\, h'(\tau)\, d\tau \leq \int_{t_1}^{t} g(\tau)\, d\tau \leq \int_{t_0}^{\infty} g(\tau)\, d\tau\,.$$

Si $r = 1$, tenemos

$$\ln \frac{h(t)}{h(t_1)} \leq \int_{t_0}^{\infty} g(\tau)\, d\tau\ , \quad t \geq t_1$$

de donde

$$h(t) \leq \delta \exp\left[\int_{t_0}^{\infty} g(\tau)\, d\tau\right],\ t \geq t_1.$$

Si $r > 1$, tenemos

$$-\frac{1}{r-1}\left[h^{1-r}(t) - h^{1-r}(t_1)\right] \leq \int_{t_0}^{\infty} g(\tau)\, d\tau\ ,\ t \geq t_1$$

o lo que es lo mismo

$$\delta^{-(r-1)} - (r-1)\int_{t_0}^{\infty} g(\tau)\, d\tau \leq h^{1-r}(t)\ ,\ t \geq t_1$$

de donde

$$h(t) \leq \left[\delta^{-(r-1)} - (r-1)\int_{t_0}^{\infty} g(\tau)\, d\tau\right]^{-1/(r-1)}\ ;\ t \geq t_1\,.$$

Usando (3) tenemos que $\left[\delta^{-(r-1)} - (r-1)\int_{t_0}^{\infty} g(\tau)\, d\tau\right] > 0$, *y , por tanto,* $h(t)$ *es acotada sobre* $\left[t_1, \infty\right)$. *Finalmente, como* $f(t) \leq h(t)$ *sobre* $[t_1, \infty)$, *se tiene el resultado.*

3. PRINCIPALES RESULTADOS

Teorema 1.

Si $\int_{t_0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m_i} \left|a_{ij}(t)\right| t^{(n-1-i)r_{ij}}\, dt < \infty$ *y* $r = \max\{r_{ij}\} > 1$ *verifica la desigualdad*

$$\max\left[1, \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1-p} \frac{\left|x^{(p+k)}(t_0)\right|}{k!\,t_0^{n-1-p-k}}\right] < \left[(r-1)\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p!}\int_{t_0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m_i} \left|a_{ij}(t)\right| t^{(n-1-i)r_{ij}}\, dt\right]^{-1/(r-1)} \tag{4}$$

para algún $t_0 > 0$. *Entonces la ecuación (1) tiene soluciones* $x(t)$ *tales que,*

$$\lim_{t\to\infty} x^{(n-1)}(t) = \alpha > 0 \quad (\alpha \textit{ finito}).$$

Si $r = \max\{ r_{ij} \} \leq 1$, la conclusión sigue siendo válida sin necesidad de que la desigualdad (4) se verifique.

Prueba.

Aplicando la fórmula de Taylor con resto integral, tenemos

$$x^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1-p} \frac{x^{(p+k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + \frac{1}{(n-1-p)!}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{n-1-p} x^{(n)}(\tau)\, d\tau$$

donde, $p = 0, 1, \ldots, n-1$, $t \geq t_0 > 0$

De aquí,

$$\frac{x^{(p)}(t)}{t^{n-1-p}} = \sum_{k=0}^{n-1-p} \frac{x^{(p+k)}(t_0)}{k!\, t^{n-1-p-k}}\left(\frac{t-t_0}{t}\right)^k - \frac{1}{(n-1-p)!}$$

$$\cdot \int_{t_0}^{t}\left(\frac{t-\tau}{t}\right)^{n-1-p} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}(\tau)\, \tau^{(n-1-i)r_{ij}} \left[\frac{x^{(i)}(\tau)}{\tau^{n-1-i}}\right]^{r_{ij}} d\tau ,$$

de donde obtenemos la desigualdad

$$\frac{\left| x^{(p)}(t)\right|}{t^{n-1-p}} \leq \sum_{k=0}^{n-1-p} \frac{\left| x^{(p+k)}(t_0)\right|}{k!\, t_0^{n-1-p-k}} + \frac{1}{(n-1-p)!}$$

$$\cdot \int_{t_0}^{t} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m_i} \left| a_{ij}(\tau)\right| \tau^{(n-1-i)r_{ij}} \left\{ \max\left[1, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left| x^{(k)}(\tau)\right|}{\tau^{n-1-k}} \right]\right\}^r d\tau .$$

Sumando sobre p tenemos

$$\max\left[1, \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\left| x^{(p)}(t)\right|}{t^{n-1-p}}\right] \leq \max\left[1, \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1-p} \frac{\left| x^{(p+k)}(t_0)\right|}{k!\, t_0^{n-1-p-k}}\right]$$

$$+ \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p!}\int_{t_0}^{t} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m_i} \left| a_{ij}(\tau)\right| \tau^{(n-1-i)r_{ij}} \left\{ \max\left[1, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left| x^{(k)}(\tau)\right|}{\tau^{n-1-k}} \right]\right\}^r d\tau . \quad (5)$$

Del lema previo, con

$$f(t) = \max\left[1, \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\left| x^{(p)}(t)\right|}{t^{n-1-p}}\right] \quad y \quad g(t) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p!}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m_i} \left| a_{ij}(t)\right| t^{(n-1-i)r_{ij}}$$

se sigue que $\max\left[1, \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\left|x^{(p)}(t)\right|}{t^{n-1-p}}\right]$ es acotado sobre $[t_0, \infty)$.

Ahora, como

$$x^{(n-1)}(t) = x^{(n-1)}(t_0) - \int_{t_0}^{t} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}(\tau)\, \tau^{(n-1-i)r_{ij}} \left[\frac{\left|x^{(i)}(\tau)\right|}{\tau^{n-1-i}}\right]^{r_{ij}} d\tau\,, \tag{6}$$

se tiene que $\lim_{t\to\infty} x^{(n-1)}(t)$ existe. Queda por demostrar que siempre existen soluciones $x(t)$ tales que este límite es mayor que cero.

Escogemos $t_0 > 0$, $\delta \geq 1$. Si $r > 1$ requerimos adicionalmente que t_0 y δ verifiquen

$$\delta < \left[(r-1) \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p!} \int_{t_0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m_i} \left|a_{ij}(t)\right| t^{(n-1-i)r_{ij}}\, dt\right]^{-1/(r-1)}.$$

Por el lema, existe una cota M tal que, si $y(t)$ es cualquier función continua no negativa verificando

$$y(t) \leq \delta + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p!} \int_{t_1}^{t} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m_i} \left|a_{ij}(\tau)\right| \tau^{(n-1-i)r_{ij}}\, y^r(\tau)\, d\tau$$

para todo $t \geq t_1 \geq t_0$, entonces $y(t) \leq M$ sobre $[t_1, \infty)$.

Escogemos t_1 suficientemente grande tal que,

$$\int_{t_1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m_i} \left|a_{ij}(t)\right| t^{(n-1-i)r_{ij}}\, dt < \frac{\delta}{M^r \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p!}}.$$

Sea $x(t)$ la solución de (1) satisfaciendo las condiciones iniciales $x(t_1) = x'(t_1) = \ldots = x^{(n-2)}(t_1) = 0$, $x^{(n-1)}(t_1) = \delta \Big/ \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p!}$. Procediendo como antes obtenemos la desigualdad (5) con t_1 en lugar de t_0. Puesto que

$$\max\left[1, \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1-p} \frac{\left|x^{(p+k)}(t_1)\right|}{k!\, t^{n-1-p-k}}\right] = \delta\,.$$

sigue del lema que $\max\left[1, \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\left|x^{(p)}(t)\right|}{t^{n-1-p}}\right]$ es acotado por M en $[t_1, \infty)$.

De aquí

$$\lim_{t\to\infty} x^{(n-1)}(t) = x^{(n-1)}(t_1) - \int_{t_1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}(\tau)\, \tau^{(n-1-i)\, r_{ij}} \left[\frac{x^{(i)}(\tau)}{\tau^{n-1-i}}\right]^{r_{ij}} d\tau$$

$$\geq \frac{\delta}{\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p!}} - M^r \int_{t_1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m_i} \left|a_{ij}(t)\right| t^{(n-1-i)\, r_{ij}}\, dt > 0.$$

Esto completa la prueba.

Ahora centramos nuestra atención en la ecuación más general dada en (2).

Teorema 2.

Consideremos la ecuación (2). Sean $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ *soluciones linealmente independientes de la ecuación lineal asociada (2*) y* $W(t)$ *su Wronskiano. Sea* $X_i(t) = \max_{1\leq k\leq n}\left|x_k^{(t)}\right|$, $i = 0, 1, ..., n-1$, *y sean*

$$W_k(t) = \text{Wronskiano}\left[x_1(t), ..., x_{k-1}(t),\ x_{k+1}(t), ..., x_n(t)\right],\ k = 1, 2, ..., n \quad \text{y}$$

$$Z(t) = \max_{1\leq k\leq n} \left|W_k(t)\right|.$$

Si

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{Z(t)}{|W(t)|} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m_i} \left|a_{ij}(t)\right| X_i^{r_{ij}}\, dt < \infty$$

Entonces, la ecuación (2) tiene soluciones $x(t)$ *(no triviales), tales que*

$$x^{(p)}(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k(t)\, x_k^{(p)}(t) \quad , \quad p = 0,1,...,n-1. \tag{7}$$

Donde las funciones $A_k(t)$ *son tales que*

$$\lim_{t\to\infty} A_k(t) = a_k \ (\textit{finito}),\ k = 1, 2, ..., n\ .$$

Si $r = \max\{r_{ij}\} > 1$, *adicionalmente necesitamos que se verifique la desigualdad*

$$\max\left[1, \sum_{p=1}^{n} |A_p(t_0)|\right]$$
$$< \left[n(r-1)\int_{t_0}^{\infty} \frac{Z(t)}{|W(t)|} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m_i} |a_{ij}(t)|\, X_i^{r_{ij}}(t)\, dt\right]^{-1/(r-1)}$$

para algún t_0.

Prueba.

Sea $x(t)$ una solución de (2). Sean $A_k(t)$ las funciones definidas (únicamente) en términos de $x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t)$ por las ecuaciones (7).

De las ecuaciones (7) y el hecho que $x(t)$ es una solución de (2) obtenemos las ecuaciones

$$\sum_{k=1}^{n} A_k'(t)\, x_k^{(p)}(t) = 0\,,\quad p = 0, 1, ..., n-2$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_k'(t)\, x_k^{(n-1)}(t) = -\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}(t)\left[\sum_{k=1}^{n} A_k(t)\, x_k^{(i)}(t)\right]^{r_{ij}}. \tag{9}$$

Resolviendo este sistema para $A_1'(t), A_2(t), ..., A_n'(t)$ e integrando de t_0 a t, tenemos

$$A_p(t) = A_p(t_0) + (-1)^{n+p+1}\int_{t_0}^{t} \frac{W_p(\tau)}{W(\tau)} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}(\tau)$$
$$\cdot\left[\sum_{k=1}^{n} A_k(\tau)\, x_k^{(i)}(\tau)\right]^{r_{ij}} d\tau\,,\quad p = 1,2,...,n \tag{10}$$

de donde obtenemos la desigualdad

$$\max\left[1, \sum_{p=1}^{n} |A_p(t)|\right] \le \max\left[1, \sum_{p=1}^{n} |A_p(t_0)|\right]$$
$$+\, n\int_{t_0}^{t} \frac{Z(\tau)}{|W(\tau)|} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m_i} |a_{ij}(\tau)|\, X_i^{r_{ij}}(\tau)$$
$$\cdot\left\{\max\left[1, \sum_{k=1}^{n} |A_k(\tau)|\right]\right\}^{-r} d\tau.$$

Por el lema tenemos que $\max\left[1, \sum_{p=1}^{n} |A_p(t)|\right]$ es acotado sobre $[t_0, \infty)$. De ahí que las integrales en las ecuaciones (10) son absolutamente convergentes cuando $t \to \infty$, de este modo concluimos que $\lim_{t\to\infty} A_p(t)$ existe (finito), $p = 1, 2, \ldots, n$.

Teorema 3.

Con las mismas hipótesis del teorema 2, y adicionalmente asumiendo que:

i) *Si $x_k^{(p)}(t)$ no es acotado cuando $t \to \infty$, entonces existe una función (positiva) continua y no decreciente $\overset{*}{x}_{kp}(t)$ tal que $\left|x_k^{(p)}(t)\right| \le \overset{*}{x}_{kp}(t)$ para t sufientemente grande.*

ii)
$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{\overset{*}{x}_{kp}(t)|W_k(t)|}{|W(t)|} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m_i} |a_{ij}(t)|\, X_i^{r_{ij}}(t)\, dt < \infty .$$

Entonces, la ecuación (2) tiene soluciones (no triviales) $x(t)$ tales que,

$$x^{(p)}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, x_k^{(p)}(t) + \varepsilon^{(p)}(t) \ , \ p = 0,1,\ldots,n-1,$$

donde los a_k son constantes y $\lim_{t\to\infty} \varepsilon^{(p)}(t) = 0$.

Prueba.

Usamos las notaciones y resultados del Teorema 3. En primer lugar, establecemos que

$$\lim_{t\to\infty} |A_k(t) - a_k|\,\left|x_k^{(p)}(t)\right| = 0.$$

Esto se da obviamente cuando $x_k^{(p)}(t)$ es acotado, así que asumimos que x_k^p no es acotado. Resolviendo para $A_k'(t)$ en (9) y luego integrando de t a ∞ tenemos

$$a_k = A_k(t) + (-1)^{n+k+1} \int_t^{\infty} \frac{W_k(\tau)}{W(\tau)} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}(\tau) \left[\sum_{k=0}^{n} A_k(\tau)\, x_k^{(i)}(\tau)\right]^{r_{ij}} d\tau.$$

De aqui se tiene que para t suficientemente grande,

$$\left| A_k(t) - a_k \right| \left| x_k^{(p)}(t) \right| \leq \int_t^{\infty} \frac{\overset{*}{x}_{kp}(\tau) \left| W_k(\tau) \right|}{\left| W(\tau) \right|} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m_i} \left| a_{ij}(\tau) \right| X_i^{r_{ij}}(\tau)$$

$$\cdot \left\{ \max \left[1, \sum_{k=1}^{n} \left| A_k(\tau) \right| \right] \right\}^r d\tau .$$

De lo anterior se tiene que

$$\lim_{t \to \infty} \left| A_k(t) - a_k \right| \left| x_k^{(p)}(t) \right| = 0 ,$$

donde

$$x^{(p)}(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k(t)\, x_k^{(p)}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, x_k^{(p)}(t) + \varepsilon_p(t) .$$

Donde $\lim_{t \to \infty} \varepsilon_p(t) = 0$. Poniendo $\varepsilon_0(t) = \varepsilon(t)$, tenemos $\varepsilon_p(t) = \varepsilon^{(p)}(t)$, con lo cual el teorema queda probado.

Aplicando el Teorema 3 a la ecuación (1) tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.

Si

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m_i} \left| a_{ij}(t) \right| t^{(n-1-i)\, r_{ij}}\, dt < \infty$$

entonces (1) tiene soluciones (no triviales) $x(t)$ tales que,

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, t^{k-1} + \varepsilon(t) ,$$

donde

$$\lim_{t \to \infty} \varepsilon^{(p)}(t) = 0 \quad , \quad p = 0,1,\ldots, n-1 .$$

Prueba.

Utilizando la notación de los Teoremas 2 y 3 tenemos $x_k(t) = t^{k-1}$, $k = 1,2,\ldots, n$ y $W(t) = \text{constante}$. Podemos tomar $X_i(t) = (n-1)!\, t^{n-1-i}$ para $t \geq 1$ $i = 0, 1, \ldots, n-1$. $W_k(t)$ es la forma $c_k\, t^{n-k}$ y $Z(t) = c\, t^{n-1}$ para $n \geq 1$. Facilmente se observa que, todas las hipótesis del Teorema 3 se verifican, por lo tanto, el teorema esta probado.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Waltman Paul . *On the asymptotic behavior of solutions of a nonlinear equation.* Proc. Amer. Math. Soc. 15, pag. 918 - 923 (1964).

[2] Locke Phill . *On the asymptotic behavior of solutions of an nth - order nonlinear equation* Proc. Amer. Math. Soc. 18, pag. 383 - 390 (1967).