PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. VII, N° 1, pág. 30 - 42, LIMA - PERÚ. Junio 2004

ESTABILIDAD EXPONENCIAL DEL SEMIGRUPO C_0 ASOCIADO A UN SISTEMA TERMOELÁSTICO

Yolanda Santiago Ayala[1]

RESUMEN.- *Se prueba que el semigrupo C_0 asociado a un sistema Termoelástico es analítico y exponencialmente estable.*

PALABRAS CLAVE: *Analiticidad, Decaimiento exponencial, Termoelasticidad, Semigrupos C_0*

EXPONENTIAL STABILITY OF THE C_0 SEMIGROUP ASSOCIATED TO A THERMOELASTIC SYSTEM

ABSTRACT.- *We prove that the C_0 semigroup, associated to a thermoelastic system is analitic and exponential stable.*

KEYWORDS: *Analiticity, Exponential decay, Termoelasticity, C_0 Semigroups.*

1. INTRODUCCIÓN

Estudiamos el siguiente sistema disipativo:

$$u_{tt} + \Delta^2 u + \Delta\theta = 0 \text{ , en } \Omega \times]0, T[\tag{1}$$

$$\theta_t - \Delta\theta - \Delta u_t = 0 \text{ , en } \Omega \times]0, T[\tag{2}$$

$$u = \Delta u = \theta = 0 \text{ , en } \partial\Omega \times]0, T[$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ , } u_t(x, 0) = u_1(x) \text{ , } \theta(x, 0) = \theta_0(x) \text{ , } x \in \Omega \text{ ,}$$

donde Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$ suave.

El sistema Modela el movimiento transversal de una placa Termoelástica presa en la frontera $\partial\Omega$, sin movimiento longitudinal. Las funciones $u(x, t)$ y $\theta(x, t)$ representan la posición y diferencia de temperatura de la placa en el instante t y Δ^2, Δ, ∇ son los operadores Biármonico, Laplaciano y Gradiente respectivamente.

[1]Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: yssa@lycos.com

La energia asociada al sistema es

$$E(t):=\frac{1}{2}\int_{\Omega}|u_t|^2+|\Delta u|^2+|\theta|^2\,dx\,.$$

$E(t)$ es no creciente, desde que

$$\frac{\partial E(t)}{\partial t}=-\int_{\Omega}|\nabla\theta|^2\,dx\leq 0\,.$$

Asi $0\leq E(t)\leq E(0)$.

Entonces surge la interrogante ¿a dónde tiende $E(t)$ cuando $t\longrightarrow+\infty$? y ¿con qué tasa de decaimiento lo hace?.

En respuesta, probaremos que el semigrupo C_0 de contracción asociado al sistema es analítico, utilizando técnicas multiplicativas con multiplicadores adecuados y el Teorema 2 (Santiago [3]) que involucra al operador resolvente. Es decir, pasaremos por Analiticidad para obtener el decaimiento exponencial.

En contraste con está técnica, en la sección 4 estudiaremos el decaimiento de la ecuación de la onda con disipación; la cual es de tipo exponencial y como el Semigrupo C_0 asociado a la ecuación no es analítica usaremos directamente el Teorema 3 (Santiago [3]).

Existen trabajos de estabilidad via Semigrupos, citamos Liu-Zheng [1], Wyler [4] y Santiago [3].

2. PRELIMINARES

Usaremos las definiciones y resultados que aparecen en Santiago [3], Liu-Zheng [1] y Pazy [2]. Ponemos en evidencia los teoremas 2 y 3 de Santiago [3], respectivamente.

Teorema 1.

Sea $S(t)$ un semigrupo C_0 de contracción en un Espacio de Hilbert. Suponga que

$$\rho(A)\supset\{i\beta,\beta\in\mathbb{R}\}\equiv i\mathbb{R}\,;$$

entonces $S(t)$ es analítica

$$\Leftrightarrow\ \overline{\lim_{|\beta|\to\infty}}\left\|\beta(i\beta I-A)^{-1}\right\|<\infty$$

acontece.

Teorema 2.

Sea $S(t)=e^{At}$ es un C_0 semigrupo de contracciones en un Espacio de Hilbert, entonces, $S(t)$ es exponencialmente estable

$$\Leftrightarrow\left\{\rho(A)\supseteq i\mathbb{R}\,,\ \overline{\lim_{|\beta|\to\infty}}\left\|(i\beta I-A)^{-1}\right\|<\infty\right\}.$$

3. ESTABILIDAD EXPONENCIAL DEL SISTEMA TERMOELÁSTICO

De la ecuación (1), haciendo $\upsilon = u_t$, obtenemos

$$\begin{pmatrix} u \\ \upsilon \\ \theta \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} u_t \\ \upsilon_t \\ \theta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{tt} \\ \theta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ -\Delta^2 u - \Delta\theta \\ \Delta\theta + \Delta u_t \end{pmatrix};$$

entonces,

$$\begin{pmatrix} u \\ \upsilon \\ \theta \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -\Delta^2 & 0 & -\Delta \\ 0 & \Delta & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \upsilon \\ \theta \end{pmatrix}.$$

Se define el Operador A, en un arreglo 3 x 3 de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -\Delta^2 & 0 & -\Delta \\ 0 & \Delta & \Delta \end{pmatrix}$$

(1) – (2) es equivalente a

$$\left| \begin{array}{l} Y_t = AY \\ Y_0 = (u_0, u_1, \theta_0) \end{array} \right. \tag{3}$$

Construimos la Energía asociada al sistema. Multiplicando (1) por u_t e integrando sobre Ω tenemos

$$\int_\Omega u_{tt} \, . \, u_t + \Delta^2 u \, . \, u_t + \Delta\theta \, . \, u_t \, dx = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |u_t|^2 \, dx + \int_\Omega \Delta^2 u \, . \, u_t + \int_\Omega \Delta\theta \, . \, u_t = 0 \, .$$

Usando la Identidad de Green, obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |u_t|^2 \, dx + \int_\Omega \Delta u \, . \Delta u_t + \int_\Omega \Delta\theta \, . \, u_t = 0,$$

es decir,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{ \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2 + |\Delta u|^2 \, dx \right\} + \int_\Omega \Delta\theta \, . \, u_t = 0 \, . \tag{4}$$

Multiplicando (2) por θ e integrando sobre Ω tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |\theta|^2 + \int_\Omega |\nabla\theta|^2 - \underbrace{\int_\Omega \Delta u_t \,.\, \theta}_{=\int_\Omega u_t \Delta\theta} = 0 \tag{5}$$

De (4) y (5) obtenemos.

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2 + |\Delta u|^2 + |\theta|^2\, dx\right\}}_{E(t):=} = -\int_\Omega |\nabla\theta|^2 \leq 0$$

i.e. $E(t)$ es no creciente y $0 \leq E(t) \leq E(0)$, $\forall t > 0$.

Ahora consideremos

$$X = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

$$D(A) = \left\{ (u, v, \theta) \in H^2 \cap H_0^1 \times L^2 \times L^2 ;\ \text{tal que } A\begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \in X \right\}$$

i.e. $D(A) = (H_\Delta^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H_\Delta^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$.

Donde

$$H_\Delta^2 = \left\{ u \in H^2 \ ,\ \Delta u = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\}$$

$$H_\Delta^4 = \left\{ u \in H^4 \ ,\ \Delta u = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\},$$

Donde $A : D(A) \subset X \to X$. A es el generador infinitesimal de un semigrupo $S(t)$ de contracción, debido al Teorema de Lummer-Phillips (ver Santiago [3]) e $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$.

Probaremos que

$$\overline{\lim_{|\tau| \to +\infty}} \left\| \tau R(i\tau, A) \right\| < +\infty \tag{6}$$

i.e. $S(t)$ es analítico. En efecto,

$$(i\beta I - A)\, W = F, \text{ donde } W = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix},\quad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \in X$$

$$i\beta u - v = F_1 \tag{7}$$

$$i\beta v + \Delta^2 u + \Delta\theta = F_2 \tag{8}$$

$$i\beta\theta - \Delta v - \Delta\theta = F_3 \tag{9}$$

Tomando Laplaciano a (7) y multiplicando por $\Delta\bar{u}$ obtenemos

$$i\beta \int_\Omega |\Delta u|^2\, dx - \int_\Omega \Delta v\, \Delta\bar{u} = \int_\Omega \Delta F_1\, \Delta\bar{u} \tag{10}$$

Multiplicando (8) por $\bar{v}$ tenemos

$$i\beta \int_\Omega |v|^2\, dx + \int_\Omega \Delta^2 u \,.\, \bar{v} + \int_\Omega \Delta\theta\, \bar{v} = \int_\Omega F_2\, \bar{v}$$

$$\text{ie.}\quad i\beta \int_\Omega |v|^2 + \int_\Omega \Delta u \,.\, \Delta\bar{v} + \int_\Omega \Delta\theta\, \bar{v} = \int_\Omega F_2\, \bar{v} \tag{11}$$

Multiplicando (9) por $\bar{\theta}$ conseguimos

$$i\beta \int_\Omega |\theta|^2\, dx - \int_\Omega \Delta v\, \bar{\theta} + \int_\Omega |\nabla\theta|^2 = \int_\Omega F_3\, \bar{\theta}\,. \tag{12}$$

Sustituyendo (7) en (9) tenemos

$$\begin{aligned} &i\beta\theta - \Delta\{ i\beta u - F_1 \} - \Delta\theta = F_3 \\ &i\beta\theta - i\beta\, \Delta u - \Delta\theta = F_3 - \Delta F_1\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Multiplicando la ecuación (13) por $-\Delta\bar{u}$ obtenemos

$$-i\beta \int_\Omega \theta \Delta\bar{u} + i\beta \int_\Omega |\Delta u|^2 + \int_\Omega \Delta\theta\, \Delta\bar{u} = - \int_\Omega (F_3 - \Delta F_1)\, \Delta\bar{u}\,. \tag{14}$$

Sumando las ecuaciones (10), (11) y (12) conseguimos

$$\begin{aligned} &i\beta \int_\Omega |\Delta u|^2 + |v|^2 + |\theta|^2 + 2i\, Im \left\{ \int_\Omega \Delta u\, \Delta\bar{u} \right\} + 2i\, Im \left\{ \int_\Omega \Delta\theta\bar{v} \right\} \\ &+ \int_\Omega |\nabla\theta|^2\, dx = \int_\Omega \Delta F_1\, \Delta\bar{u} + F_2\bar{v} + F_3\bar{\theta}. \end{aligned} \tag{15}$$

Tomando la parte real de la igualdad (15), obtenemos

$$\int_\Omega |\nabla\theta|^2\, dx = Re \int_\Omega \Delta F_1\, \Delta\bar{u} + F_2\bar{v} + F_3\bar{\theta}\, dx\,. \tag{16}$$

Multiplicando (8) por $\overline{\theta}$ tenemos

$$
\begin{aligned}
&i\beta v\overline{\theta} + \Delta^2 u\overline{\theta} + \Delta\theta\overline{\theta} = F_2\overline{\theta} \\
&i\beta\int_\Omega v\overline{\theta} + \int_\Omega \Delta^2 u\overline{\theta} - \int_\Omega |\nabla\theta|^2 = \int_\Omega F_2\overline{\theta}\,.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Multiplicando (9) por $\overline{v}$

$$
\begin{aligned}
&i\beta\theta\overline{v} - \Delta v\,.\,\overline{v} - \Delta\theta\overline{v} = F_3\overline{v} \\
&i\beta\int_\Omega \theta\overline{v} + \int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega \Delta\theta\overline{v} = \int_\Omega F_3\overline{v}\,.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Sustituyendo (7) en (8)

$$
\begin{aligned}
&i\beta\{i\beta u - F_1\} + \Delta^2 u + \Delta\theta = F_2 \\
&-\beta^2 u - i\beta F_1 + \Delta^2 u + \Delta\theta = F_2 \\
&-\beta^2 u + \Delta^2 u + \Delta\theta = i\beta F_1 + F_2\,.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Multiplicando la ecuación (19) por $(-\Delta\overline{u})$, tenemos

$$
+\beta^2 u\Delta\overline{u} - \Delta^2 u\Delta\overline{u} - \Delta\theta\Delta\overline{u} = -(i\beta F_1 + F_2)\,\Delta\overline{u}\,.
$$

Integrando sobre Ω

$$
\begin{aligned}
&-\beta^2\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega \nabla(\Delta u)\,\nabla(\Delta\overline{u}) - \int_\Omega \Delta\theta\Delta\overline{u} = -\int_\Omega (i\beta F_1 + F_2)\,\Delta\overline{u} \\
&-\beta^2\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |\nabla\Delta\overline{u}|^2 - \int_\Omega \Delta\theta\Delta\overline{u} = -\int_\Omega (i\beta F_1 + F_2)\,\Delta\overline{u}\,.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Tomando la parte Imaginaria a las expresiones (20) y (17) respectivamente obtenemos

$$
Im\left\{\int_\Omega \Delta\theta\Delta\overline{u}\right\} = Im\left\{\int_\Omega (i\beta F_1 + F_2)\,\Delta\overline{u}\right\}
\tag{21}
$$

$$
Im\left\{i\beta\int_\Omega v\overline{\theta}\right\} + Im\int_\Omega \Delta u\Delta\overline{\theta} = Im\int_\Omega F_2\overline{\theta}\,.
\tag{22}
$$

Usando (21) en (22) tenemos

$$
Im\left\{i\beta\int_\Omega v\overline{\theta}\right\} = Im\left\{\int_\Omega F_2\overline{\theta} + (i\beta F_1 + F_2)\,\Delta u\right\}.
\tag{23}
$$

Tomando la parte Imaginaria a la ecuación (18) conseguimos

$$
\begin{aligned}
&Im\left\{i\beta\int_\Omega \theta\overline{v}\right\} - Im\int_\Omega \Delta\theta\overline{v} = Im\int_\Omega F_3\overline{v} \\
&Im\left\{i\beta\int_\Omega \theta\overline{v}\right\} + Im\int_\Omega \nabla\theta\nabla\overline{v} = Im\int_\Omega F_3\overline{v}\,.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Usando (23) y (24) obtenemos

$$Im\int_{\Omega}\nabla\theta\nabla\bar{v} = Im\left\{\int_{\Omega}F_3\bar{v} - F_2\bar{\theta} - (i\beta F_1 + F_2)\Delta u\right\}. \tag{25}$$

Sustituyendo (23) en la parte imaginaria de (12) conseguimos

$$\begin{aligned}
\beta\int_{\Omega}|\theta|^2 \quad &- Im\int_{\Omega}\Delta v\,\overline{\theta} = Im\int_{\Omega}F_3\overline{\theta}\\
\beta\int_{\Omega}|\theta|^2\,dx &= Im\int_{\Omega}\Delta v\,\overline{\theta} + Im\left(\int_{\Omega}F_3\overline{\theta}\right)\\
&= Im\left(\int_{\Omega}F_3\overline{\theta} + F_3\bar{v} - F_2\overline{\theta} - (i\beta F_1 + F_2)\,\Delta\overline{u}\right)\\
&= \ldots\ldots\ldots - Im\left\{i\beta\int_{\Omega}F_1\Delta\overline{u}\right\}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Por otro lado,

$$i\beta\int_{\Omega}F_1\Delta\bar{u} = i\beta\int_{\Omega}\Delta F_1\bar{u} = \int_{\Omega}\Delta F_1 i\,\beta\bar{u}\ , \tag{27}$$

tomando la conjugada a la ecuación (7) obtenemos

$$i\beta\bar{u} - \bar{v} = \overline{F_1}\,,$$

luego

$$i\beta\bar{u} = -\bar{v} - \overline{F_1}\,. \tag{28}$$

Sustituyendo (28) en (27) obtenemos

$$\begin{aligned}
i\beta\int_{\Omega}F_1\,\Delta\bar{u} = \int_{\Omega}\Delta F_1\left\{-\bar{v} - \overline{F_1}\right\} = -\int_{\Omega}\Delta F_1\bar{v} - &\underbrace{\int_{\Omega}\Delta F_1\,\overline{F_1}}\\
&= -\int_{\Omega}\left|\nabla F_1\right|^2
\end{aligned}$$

y tomando su parte Imaginaria se consigue

$$\begin{aligned}
Im\left\{i\beta\int_{\Omega}F_1\,\Delta\bar{u}\right\} &= Im\left\{-\int_{\Omega}\Delta F_1\bar{v}\right\}\\
\left|Im\left\{i\beta\int_{\Omega}F_1\,\Delta\bar{u}\right\}\right| &\leq \|F\|\,\|W\|\,.
\end{aligned} \tag{29}$$

Por lo tanto, la ecuación (26) queda mayorada de modo que,

$$|\beta|\int_{\Omega}|\theta|^2\,dx \leq C\,\|F\|\,\|W\|\,. \tag{30}$$

Tomando la parte Imaginaria a la ecuación (14) y usando (21) se consigue

$$-Im\left(i\beta \int_\Omega \theta \Delta \overline{u} \right) + \beta \int_\Omega |\Delta u|^2 + Im\left(\int_\Omega \Delta\theta \Delta \overline{u} \right) = Im\left(-\int_\Omega (F_3 - \Delta F_1)\, \Delta \overline{u} \right).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \beta \int_\Omega |\Delta u|^2\, dx &= Im\left(i\beta \int_\Omega \theta \Delta \overline{u} \right) - Im\left(\int_\Omega \Delta\theta \Delta \overline{u} \right) \\ &\quad + Im\left(-\int_\Omega (F_3 - \Delta F_1)\, \Delta \overline{u} \right) \\ &= Im\left(i\beta \int_\Omega \theta \Delta \overline{u} \right) - Im \int_\Omega \left(i\beta F_1 + F_2 \right) \Delta \overline{u} \\ &\quad + Im\left(-\int_\Omega \left(F_3 - \Delta F_1\right) \Delta \overline{u} \right). \end{aligned} \tag{31}$$

Sustituyendo (29) en (31) se obtiene

$$\begin{aligned} \beta \int_\Omega |\Delta u|^2\, dx &= \mathrm{Im}\left(i\beta \int_\Omega \theta\, \Delta \overline{u} \right) + \mathrm{Im}\left(\int_\Omega \Delta F_1 \overline{v} \right) \\ &\quad + \mathrm{Im}\left(\int_\Omega (-F_2 - F_3 + \Delta F_1)\, \Delta \overline{u} \right). \end{aligned} \tag{32}$$

Tomando $|.|$ a la ecuación (32) se tiene

$$|\beta| \int_\Omega |\Delta u|^2\, dx \leq 2\, \| F \|\, \| W \| + \frac{|\beta|}{2} \int_\Omega |\Delta u|^2 + \theta^2\, dx .$$

Usando (30) tenemos

$$\frac{|\beta|}{2} \int_\Omega |\Delta u|^2\, dx \leq 3\, \| F \|\, \| W \| . \tag{33}$$

Tomando la parte Imaginaria a la ecuación (10) obtenemos

$$\left| Im\left(\int_\Omega \Delta \overline{u}\ \Delta v \right) \right| \leq 8\, \| F \|\, \| W \| . \tag{34}$$

Análogamente, tomando la parte Imaginaria a la ecuación (11) y usando (34) tenemos

$$|\beta| \int_\Omega |v|^2\, dx \leq C\, \| F \|\, \| W \| . \tag{35}$$

Sumando las desigualdades (30), (33) y (35) tenemos

$$|\beta|\int_{\Omega}|\Delta u|^2+|v|^2+|\theta|^2 \leq C\,\|F\|\,\|W\|_H$$

$$|\beta|\ \|W\|_H^2 \leq C\,\|F\|\,\|W\|_H$$

$$|\beta|\ \|W\|_H \leq C\,\|F\|$$

$$\|\beta R(i\beta, A)\,F\| \leq C\,\|F\|$$

$$\|\beta R(i\beta, A)\| \leq C\,.$$

Tomando límite superior a la expresión anterior tenemos,

$$\overline{\lim_{|\beta|\to+\infty}}\ \|\beta R(i\beta, A)\| \leq C < +\infty$$

lo cual prueba (6).

4. DECAIMIENTO EXPONENCIAL DE LA ECUACIÓN DE LA ONDA CON DISIPACIÓN

Probaremos que el semigrupo C_0 de contracción asociado a la ecuación de la onda es exponencialmente estable.

Considerando $r > 0$, el modelo de una ecuación de la onda con disipación que estudiaremos es

$$\left|\begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + r u_t = 0 & \text{en } \ \Omega\times(0,+\infty) \\ u(x,t) = 0 & \text{en } \ \partial\Omega\times(0,+\infty) \\ u(x,0) = u_0(x)\ ,\ u_t(x,0) = u_1(x)\ x\in\Omega\,. & \end{array}\right. \tag{36}$$

Construiremos la energía asociada al sistema. Multiplicando (36) por u_t e integrando sobre Ω, tenemos, tenemos

$$\int_{\Omega} u_{tt}u_t - \Delta u u_t + r|u_t|^2\,dx = 0\,.$$

Usando la Identidad de Green se tiene

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_{\Omega}|u_t|^2+|\nabla u|^2\,dx\right\} = -r\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx\,.$$

Definiendo la energía asociada al sistema tenemos

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\Omega}|u_t|^2+|\nabla u|^2\,dx\,,$$

tenemos que $E(t)$ es no creciente, desde que

$$\frac{\partial E(t)}{\partial t} = -r\int_{\Omega}|u_t|^2\, dx \leq 0\,.$$

Así, $0 \leq E(t) \leq E(0)$.

Entonces, ante la interrogante ¿a dónde tiende la energía $E(t)$ cuando $t \longrightarrow +\infty$? y ¿con qué tasa de decaimiento lo hace?, probaremos que el semigrupo de contracción asociado al sistema decae exponencialmente. Lo abordaremos utilizando técnicas multiplicativas y el Teorema 3 de Santiago [3] que involucra al Operador Resolvente.

De la ecuación (36) haciendo $\upsilon = u_t$ obtenemos,

$$\begin{pmatrix} u \\ \upsilon \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} u_t \\ \upsilon_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ \Delta u - ru_t \end{pmatrix}.$$

Definimos el operador

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & -rI \end{pmatrix}.$$

Así (36) es equivalente a

$$\left| \begin{array}{ll} Y_t & = AY \\ Y(0) & = (u_0\,, u_1). \end{array} \right. \tag{37}$$

Para lo cual,

$$X \quad = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\,,$$

entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracción e $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$.

Ahora probaremos que,

$$\overline{\lim_{|\beta| \to +\infty}} \| R(i\beta, A) \| < +\infty\,.$$

Es decir, que el semigrupo decae para cero, cuando t va para infinito (i.e. decae exponencialmente).

En efecto, sea $(i\beta I - A)\, W = F$, donde $W = \begin{pmatrix} u \\ \upsilon \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$

$$i\beta u - \upsilon = f_1 \tag{38}$$

$$i\beta\upsilon - \Delta u + r\upsilon = f_2\,. \tag{39}$$

Multiplicando (38) por $-\Delta\overline{u}$, tenemos

$$-i\beta\int_{\Omega}u\Delta\overline{u}+\int_{\Omega}v\Delta\overline{u}=\int_{\Omega}f_1\Delta\overline{u}$$
$$i\beta\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx+\int_{\Omega}v\,.\,\Delta\overline{u}=\int_{\Omega}f_1\Delta\overline{u}\,. \tag{40}$$

Multiplicando por v al conjugado de (39) se tiene

$$-i\beta\overline{v}\,.\,v-\Delta\overline{u}v+r\overline{v}\,.\,v=\overline{f_2}v$$
$$-i\beta\int_{\Omega}|v|^2\,dx-\int_{\Omega}\Delta\overline{u}\,v\,dx+r\int_{\Omega}|v|^2\,dx=\int_{\Omega}\overline{f_2}v\,dx. \tag{41}$$

Tomando la parte real de la suma de las ecuaciones: (40) y (41) se tiene

$$r\int_{\Omega}|v|^2\,dx=Re\left\{\int_{\Omega}f_1\Delta\overline{u}+\int_{\Omega}\overline{f_2}\,v\,dx\right\}\leq|F|_H\,|W|_H\,. \tag{42}$$

Ahora, de (38) tenemos,

$$i\beta u=v+f_1$$

tomando $|.|$ se tiene

$$|\beta|\,|u|\leq|v|+|f_1|\,.$$

Elevando al cuadrado e integrando sobre Ω se consigue

$$|\beta|^2\int_{\Omega}|u|^2\leq 2\int_{\Omega}|v|^2+|f_1|^2\,dx\,. \tag{43}$$

Usando (42) en (43) tenemos

$$|\beta|^2\int_{\Omega}|u|^2\leq\frac{2}{r}\,Re\left\{-\int_{\Omega}\nabla f_1\,\nabla\overline{u}+\int_{\Omega}\overline{f_2}v\,dx\right\}+2\int_{\Omega}|f_1|^2\,dx\,. \tag{44}$$

Multiplicando (39) por $\overline{u}$ y usando la Identidad de Green, se consigue

$$i\beta\int_{\Omega}v\overline{u}-\int_{\Omega}\Delta u\overline{u}+r\int_{\Omega}v\,.\,\overline{u}=\int_{\Omega}f_2\overline{u}$$
$$i\beta\int_{\Omega}v\overline{u}+\int_{\Omega}|\nabla u|^2+r\int_{\Omega}v\,.\,\overline{u}=\int_{\Omega}f_2\overline{u}\,.$$

Despejando y mayorando esta última expresión obtenemos

$$
\begin{aligned}
0 \le \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx &= \int_\Omega f_2\bar{u} - r\int_\Omega v\bar{u} - i\beta\int_\Omega v\bar{u} \\
&\le \left|\int_\Omega f_2\bar{u}\right| + r\left(\int_\Omega |v|^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\bar{u}|^2\, dx\right)^{1/2} + \\
&\quad \frac{|\beta|^2}{2}\int_\Omega |u|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |v|^2\, dx \\
&\le \left|\int_\Omega f_2\bar{u}\right| + rc\left(\int_\Omega |v|^2\, dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2} + \\
&\quad \frac{|\beta|^2}{2}\int_\Omega |u|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |v|^2\, dx .
\end{aligned}
$$

Usando (42) y (44) tenemos

$$
\begin{aligned}
(1-\varepsilon)\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx &\le \left|\int_\Omega f_2\bar{u}\right| + r^2C\int_\Omega |v|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |v|^2\, dx + \\
&\quad \frac{1}{r}\, Re\left\{-\int_\Omega \nabla f_1\, \nabla\bar{u} + \int_\Omega \overline{f_2}\, v\right\} + \int_\Omega |f_1|^2\, dx \\
&\le |F|_H\, |W|_H + 2C|F|_H^2 .
\end{aligned}
\tag{45}
$$

De (42) y (45) conseguimos

$$
\min\{r, 1-\varepsilon\}\underbrace{\int_\Omega |\nabla u|^2 + |v|^2\, dx}_{|W|_H^2} \le |F|_H\, |W|_H + |F|_H^2 .
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
|W|_H^2 &\le C_1|F|_H\, |W|_H + C_2|F|_H^2 \\
&\le C_3|F|_H^2 + \frac{1}{2}|W|_H^2 + C_2|F|_H^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}|W|_H^2 &\le (C_3 + C_2)\,|F|_H^2 \\
|W|_H^2 &\le \tilde{C}|F|_H^2 \\
|W|_H &\le \tilde{C}|F|_H .
\end{aligned}
$$

Esto permite concluir que

$$
\begin{aligned}
|R(i\beta, A)\, F|_H &\le \hat{C}|F|_H \\
\|R(i\beta, A)\| &\le \tilde{C} \\
\overline{\lim_{\beta\to+\infty}}\, \|R(i\beta, A)\| &\le \tilde{C} .
\end{aligned}
$$

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Liu-Zheng. *Semigroups Associated with Dissipative Systems.* Chapman-Hall / CRC (1999).

[2] Pazy, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer, New York (1983).

[3] Santiago, Y. *Sobre la Analiticidad del Semigrupo C_0 asociado a un Sistema Viscoelástico.* PESQUIMAT. UNMSM. Vol. VI, Nº 2, págs. 27- 36 (2003).

[4] Wyler, A. *Stability of Wave Equations with Dissipative Boundary Conditions on a Bounded Domain.* Differential and Integral Equations, Vol. 7, number 2, pp 345 - 366. (1994).