PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. VII, N° 1, pág. 44 - 53, LIMA - PERÚ. Junio 2004

ECUACIONES DIFERENCIALES DE CUARTO ORDEN CON SOLUCIONES POLINOMIALES ORTO GONALES

Santiago Rojas Romero

RESUMEN.- *Se proporciona las condiciones para la ortogonalidad de soluciones polinomiales de ecuaciones diferenciales de cuarto orden con coeficientes polinomiales. Adicionalmente, se presenta una clase de este tipo de ecuaciones cuyas soluciones son los polinomios de Legendre, Laguerre y Hermite.*

PALABRAS CLAVE: *E.D.O. de cuarto orden, soluciones ortogonales, polinomios de Legendre, polinomios de Laguerre, polinomios de Hermite.*

DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FOURTH ORDER WITH ORTHOGONAL POLYNOMIAL SOLUTIONS

ABSTRACT.- *In this paper we developed conditions for orthogonality of polynomial Solutions of the fourth order differential equations with polynomial coefficients. Also, we present the fourth order equations with Legendre polynomials, Laguerre polynomials and Hermite polynomials solutions.*

KEYWORDS: *The fourth order O.D.E. orthogonal solutions, Legendre polynomials, Laguerre polynomial, Hermite polynomials.*

1. INTRODUCCIÓN

Sea la ecuación diferencial

$$P(x)\, y_n^{iv} + Q(x)\, y_n''' + R(x)\, y_n'' + S(x)\, y_n' + \lambda_n\, y_n = 0\,, \tag{1}$$

donde $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ y $S(x)$ son polinomios en x y λ_n es un polinomio en n, con $\lambda_0 = 0$. Buscamos condiciones para la ortogonalidad de las soluciones de la forma

$$y_n = \sum_{j=0}^{n} a_{jn}\, x^{n-j}\ ,\ a_{0n} \neq 0\,. \tag{2}$$

de la ecuación (1).

[1]Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: .

El estudio de soluciones polinomiales ortogonales para ecuaciones de segundo orden fue realizado por Brenke [1]. En la sección preliminar se presenta un resumen de sus resultados.

Siguiendo las ideas de Brenke, primero vemos condiciones necesarias para la existencia de soluciones polinomiales de la ecuación (1). Luego, los Teoremas 1 y 2 brindan condiciones suficientes para la ortogonalidad respecto a una función peso W de estas soluciones polinomiales. Estos resultados nos llevan a la forma autoadjunta de (1)

$$(W P y_n'')'' + \left\{ \left[WR - (WP)'' \right] y_n' \right\}' + \lambda_n W y_n = 0 .$$

Posteriormente, los Teoremas 3 - 4, 5 - 6, 7 - 8 dan condiciones para la descripción de los coeficientes de la ecuación autoadjunta anterior para los casos de intervalos finitos, intervalos semi-finitos e intervalos infinitos, respectivamente.

Finalmente, como ejemplo de aplicación de los casos anteriores, proporcionamos ecuaciones de la forma (1) cuyas soluciones polinomiales ortogonales son los clásicos polinomios de Legendre, Laguerre y Hermite.

2. PRELIMINARES

Soluciones Ortogonales

Una familia $\{ y_n(x) \}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ de soluciones de una ecuación diferencial es ortogonal respecto a una adecuada función peso $W(x)$ sobre un intervalo $\langle a, b \rangle$ si para $n \neq m$ se verifica

$$\int_a^b W(x)\, y_n(x)\, y_m(x)\, dx = 0 .$$

Soluciones Ortogonales para Ecuaciones de Segundo Orden.

Brenke [1] desarrolló dos condiciones para la ortogonalidad de soluciones polinomiales de ecuaciones de la forma

$$P(x)\, y_n'' + Q(x)\, y_n' + \lambda_n\, y_n = 0, \tag{3}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios en x y λ_n es un polinomio en n y $\lambda_0 = 0$. Este autor demostró la necesidad de las condiciones

$$\begin{aligned} P(x) &= \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\ Q(x) &= -\left(x + \frac{a_{11}}{a_{01}} \right) \\ \lambda_n &= n - n(n-1)\alpha , \end{aligned}$$

para que la ecuación (3) tenga soluciones de la forma (2). Además, demostró que el conjunto $\{ y_n(x) \}$ de soluciones de la ecuación (3) es ortogonal sobre $\langle a, b \rangle$ con respecto a una función peso $W(x)$ sí,

$$W(x)\ P(x) = 0 \text{ en } x = a \text{ y en } x = b$$

$$\left[W(x)\ P(x)\right]' \equiv W(x)\ Q(x).$$

Estas condiciones dan la forma autoadjunta de (3)

$$(W P y_n')' + \lambda_n W y_n = 0.$$

Brenke también obtuvo funciones peso para los casos de intervalos finitos, intervalos semi-infinitos e intervalos infinitos. Estas funciones peso son las mismas que aquellas para los polinomios ortogonales clásicos:

Polinomios de Jacobi: $W(x) = (1 - x)^{\alpha} (x + 1)^{\beta}$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$ en $\langle -1, 1 \rangle$;

Polinomiosde Laguerre: $W(x) = x^{\alpha} e^{-x}$, $\alpha > -1$ en $\langle 0, \infty \rangle$;

Polinomios de Hermite: $W(x) = e^{-x^2/2}$, $\alpha > -1$ en $\langle -\infty, \infty \rangle$;

Y para los subcasos de polinomios de Jacobi

Polinomios de Legendre: $W(x) = 1$ en $\langle -1, 1 \rangle$ y

Polinomios de Tchebichef: $W(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ en $\langle -1, 1 \rangle$.

3. PRINCIPALES RESULTADOS

Empezamos nuestro estudio con la siguiente

Proposición.

Para que la ecuación (1) tenga soluciones polinomiales de la forma (2) es necesario que $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ *sean de grado menor o igual que 4, 3 y 2, respectivamente,* $S(x)$ *sea de grado* 1 *y* λ_n *sea un polinomio en n.*

Demostración. Sean p, q, r y s los grados de $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ y $S(x)$, respectivamente y sea y_n de la forma (2); una solución de la ecuación (1). Las cuatro primeras derivadas de y_n tienen las formas

$$y_n'(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (n - j)\ a_{jn} x^{n-j-1}, \quad y_n''(x) = \sum_{j=0}^{n-2} (n - j)(n - j - 1)\, a_{jn} x^{n-j-2}$$

$$y_n'''(x) = \sum_{j=0}^{n-3} (n - j)\ (n - j - 1)(n - j - 2)\ a_{jn} x^{n-j-3} \qquad \text{y}$$

$$y_n^{iv}(x) = \sum_{j=0}^{n-4} (n - j)(n - j - 1)(n - j - 2)\ (n - j - 3)\ a_{jn}\, x^{n-j-4}, \tag{4}$$

con $a_{0n} \neq 0$. De ahí que,

$$grado\left[\ P(x)\, y_n^{iv}\right] = n + p - 4, \quad grado\left[\ Q(x)\, y_n'''\right] = n + q - 3$$

$$grado\left[\ R(x)\, y_n''\ \right] = n + r - 2 \ \ y\ grado\left[\ S(x)\, y_n'\ \right] = n + s - 1.$$

Pero de (1) tenemos que,

$$grado\left[\,P(x)\,y_n^{iv} + Q(x)\,y_n''' + R(x)\,y_n'' + S(x)\,y_n'\right] = grado[-\lambda_n y_n] = n\,.$$

Entonces $p \le 4$, $q \le 3$, $r \le 2$ y $s = 1$. Así,

$$\begin{aligned} P(x) &= A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2 + A_4x + A_5 \\ Q(x) &= B_1x^3 + B_2x^2 + B_3x + B_4 \\ R(x) &= C_1x^2 + C_2x + C_3 \\ S(x) &= D_1x + D_2\,, \quad D_1 \neq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Ahora, reemplazando estos polinomios y los de (4) en la ecuación (1), tenemos que el coeficiente de x^n al lado izquierdo de la ecuación es:

$$[\,A_1n(n-1)\,(n-2)\,(n-3) + B_1n(n-1)(n-2) + C_1n(n-1) + D_1n + \lambda_n\,]\,a_{0n}\,.$$

De donde

$$\lambda_n = -n\left\{D_1 + (n-1)\left\{C_1 + (n-2)\,[\,B_1 + A_1(n-3)\,]\right\}\right\}. \tag{6}$$

Los siguientes teoremas establecen condiciones suficientes para la ortogonalidad de la familia de soluciones (2) de la ecuación (1) sobre un intervalo $\langle a, b \rangle$ con respecto a una adecuada función peso $W(x)$.

Teorema 1.

Si $W(x)$ y sus tres primeras derivadas son continuas y diferenciables en $\langle a, b \rangle$ y sí

$$\begin{aligned} &(i) \quad 2\,(W\,P)' \equiv WQ \qquad \text{y} \\ &(ii) \quad WS \equiv (W\,R)' - (W\,P)'''. \end{aligned}$$

Entonces, luego de multiplicar por $W(x)$, la ecuación (1), presenta su forma autoadjunta:

$$(W\,Py_n'')'' + \left\{[\,W\,R - (W\,P)''\,]\,y_n'\right\}' + \lambda_n W y_n = 0\,. \tag{7}$$

Demostración. Multiplicando la ecuación (1) por $W(x)$ y aplicando las condiciones (i) y (ii) obtenemos

$$WPy_n^{iv} + 2(WP)'\,y''' + W\,Ry_n'' + [\,(W\,R)' - (W\,P)'''\,]\,y_n' + \lambda_n W y_n = 0\,.$$

Sumando y restando $(W\,P)''\,y_n''$ a la expresión anterior y agrupando términos, tenemos

$$\begin{aligned} &\left[\,WPy_n^{iv} + 2(WP)'\,y_n''' + (WP)''\,y_n''\right] + \\ &\qquad \left\{[\,WR - (WP)''\,]\,y_n'' + [\,(WR)' - (WP)'''\,]\,y_n'\right\} + \lambda_n W y_n = 0. \end{aligned}$$

De donde se obtiene la ecuación autoadjunta (7).

Teorema 2.

Si se cumplen las condiciones del Teorema 1 y si,

$$\begin{array}{lrl} (iii) & WP = 0 & en \;\; x = a \;\; y \;\; en \;\; x = b \\ (iv) & (WP)' = 0 & en \;\; x = a \;\; y \;\; en \;\; x = b \\ (v) & WR - (WP)'' = 0 & en \;\; x = a \;\; y \;\; en \;\; x = b \end{array}$$

y $\lambda_n \neq \lambda_m$. Entonces, las respectivas soluciones y_n e y_m de (1) son ortogonales.

Demostración. Consideremos

$$(WPy_n'')'' + \left\{ \left[(WR) - (WP)'' \right] y_n' \right\}' + \lambda_n W y_n = 0 \tag{8}$$

$$(WPy_m'')'' + \left\{ \left[(WR) - (WP)'' \right] y_m' \right\}' + \lambda_m W y_m = 0 \,. \tag{9}$$

Multiplicando (8) y (9) por (y_m) y $(-y_n)$, respectivamente, sumando las ecuaciones resultantes, y luego de integrar sobre $\langle a, b \rangle$ con respecto a x, tenemos

$$\int_a^b y_m \left\{ (WPy_n'')'' + \left\{ \left[(WR) - (WP)'' \right] y_n' \right\}' \right\} dx - \int_a^b y_n \left\{ (WPy_m'')'' \right. \\ \left. + \left\{ \left[(WR) - (WP)'' \right] y_m' \right\}' \right\} dx + (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b W y_n y_m dx = 0 . \tag{10}$$

Sea

$$I_m = \int_a^b y_m \left\{ (WPy_n'')'' + \left\{ \left[(WR) - (WP)'' \right] y_n' \right\}' \right\} dx \,.$$

Integrando por partes y aplicando las condiciones de frontera (iii) , (iv) y (v), tenemos

$$I_m = -\int_a^b y_m' (WPy_n'')' \, dx - \int_a^b \left[(WR) - (WP)'' \right] y_n' y_m' \, dx \,. \tag{11}$$

Similarmente, sí

$$I_n = \int_a^b y_n \left\{ (WPy_n'')'' + \left\{ \left[(WR) - (WP)'' \right] y_m' \right\}' \right\} dx,$$

entonces

$$I_n = -\int_a^b y_n' \, (WPy_m'')' \, dx - \int_a^b \left[(WR) - (WP)'' \right] y_m' y_n' \, dx \,. \tag{12}$$

Así, de (11) y (12)

$$I_m - I_n = \int_a^b y_n' (WPy_m'')' dx - \int_a^b y_m' (WPy_n'') \, dx. \tag{13}$$

Ahora, sea

$$J_n = \int_a^b y_n' (WPy_m'')' \, dx \,. \tag{12}$$

Nuevamente, integrando por partes y aplicando la condición de frotera (iii), tenemos

$$J_n = -\int_a^b WPy_m'' y_n'' \, dx \,.$$

Similarmente, si

$$J_m = \int_a^b y_m' (WPy_n'')' \, dx \,,$$

entonces,

$$J_m = -\int_a^b WPy_n'' \; y_m'' \, dx ,$$

de donde

$$I_m - I_n = J_n - J_m = 0. \tag{14}$$

Luego, de (10), (11), (12), (13) y (14) tenemos

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b Wy_n y_m \, dx = 0.$$

En consecuencia

$$\int_a^b Wy_n y_m dx = 0 \,,$$

pues $\lambda_n \neq \lambda_m$.

Los siguientes teoremas dan condiciones para la descripción de los coeficientes de la ecuación autoadjunta (7) para los casos en que el intervalo $\langle \, a \, , \, b \, \rangle$ es finito, semi-infinito e infinito.

El caso de Intervalo Finito

Teorema 3.

Si se cumplen las condiciones de los teoremas 1 y 2 en el intervalo $\langle -1, 1 \rangle$ *y si* $W(x) = (1-x)^{\alpha} (x+1)^{\beta}$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, *entonces el coeficiente* $P(x)$ *en la ecuación* (7) *es*

$$P(x) = (1-x)^2 (x+1)^2 \,.$$

Demostración. Aplicando la condición autoadjunta (i) tenemos,

$$\begin{aligned}(1-x)^{\alpha} (x+1)^{\beta} \, Q \equiv \; & 2(1-x)^{\alpha} (x+1)^{\beta} P' + \\ & 2P\Big[\beta (1-x)^{\alpha} (x+1)^{\beta-1} - \alpha (1-x)^{\alpha-1} (x+1)^{\beta} \Big] ,\end{aligned}$$

de donde

$$Q \equiv 2P' + 2P\left[\frac{\beta}{(x+1)} - \frac{\alpha}{(1-x)}\right].$$

Aquí, la naturaleza polinomial de $Q(x)$ exige que $(1-x)$ y $(x+1)$ sean factores de $P(x)$. Así

$$P(x) = (1-x)(x+1)\,U(x).$$

Aplicando la condición autoadjunta (ii) tenemos

$$(1-x)^{\alpha}(x+1)^{\beta} S \equiv \left[(1-x)^{\alpha}(x+1)^{\beta} R\right]' - \left[(1-x)^{\alpha+1}(x+1)^{\beta+1} U\right]'''.$$

Efectuando la derivación indicada y despejando S se tiene que la naturaleza polinomial de $S(x)$ exige que $(1-x)$ y $(x+1)$ sean factores de $U(x)$. Esto implica que -1 y 1 son ceros dobles de $P(x)$, y como $grado\,[P] \le 4$, entonces $P(x) = (1-x)^2\,(x+1)^2$.

Teorema 4.

Si se verifican las condiciones de los Teoremas 1, 2 y 3, entonces el coeficiente $R(x)$ en la ecuación (7) es un polinomio de grado 2, tal que,*

$$R(-1) = 4(\beta+1)(\beta+2) \quad y \quad R(1) = 4(\alpha+1)(\alpha+2).$$

Demostración. La condición de frontera (v) nos da

$$(1-x)^{\alpha}(x+1)^{\beta} R - \left[(1-x)^{\alpha+2}(x+1)^{\beta+2}\right]'' = 0 \ \ en\ x = -1 \text{ y en } x = 1.$$

De aquí

$$\begin{aligned} R(x) = {} & (\alpha+2)(\alpha+1)(x+1)^2 - 2(\alpha+2)(\beta+2)(1-x)(x+1) \\ & + (\beta+2)(\beta+1)(1-x)^2 \ \text{ en } x = -1 \text{ y en } x = 1, \end{aligned}$$

lo cual implica que $R(-1) = 4(\beta+2)(\beta+1)$ y $R(1) = 4(\alpha+2)(\alpha+1)$.

Ejemplo.

Para el caso de los polinomios de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}\, x^{n-2k}, \tag{15}$$

donde $\left[\frac{n}{2}\right]$ = máximo entero de $\frac{n}{2}$, tomamos $\alpha = \beta = 0$, de manera que $W(x) = 1$.

Por los teoremas 3 y 4 tenemos que

$$P(x) = (1-x)^2(x+1)^2 \quad y \quad R(x) = C_1x^2 + (8 - C_1).$$

De la condición autoadjunta (ii)

$$S \equiv R' - P''' \equiv 2C_1 x - 24x.$$

La elección de C_1 es arbitraria con la excepción de que C_1 debe elegirse de manera que $\lambda_n \neq \lambda_m$, $n \neq m$ y $C_1 \neq 12$, pues $S(x)$ debe ser de primer grado. De (6) y tomando $C_1 = 14$ tenemos

$$\lambda_n = -n^2 (n+1)^2.$$

Así la ecuación diferencial resultante es

$$\left[(1-x)^2 (x+1)^2 \, y_n'' \right]'' + \left[2(x^2-1) \, y_n' \right]' - n^2 (n+1)^2 y_n = 0. \tag{16}$$

La aplicación de las técnicas de solución en series de potencia a la ecuación (16) (ver por ejemplo Boyce [2]) nos lleva precisamente a los polinomios de Legendre (15) ya que la constante arbitraria es tomada de manera que $y_n(1) = 1$.

El caso de Intervalo Semi-infinito

Los siguientes resultados se enuncian sin demostración por su similitud con las pruebas de los Teoremas 3 y 4.

Teorema 5.

Si se verifican las condiciones de los teoremas 1 y 2 para el intervalo $\langle 0, \infty \rangle$ *y si* $W(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$, *entonces el coeficiente* $P(x)$ *en la ecuación (7) es*

$$P(x) = x^2.$$

Teorema 6.

Si se verifican las condiciones de los Teoremas 1, 2 y 5, entonces el coeficiente $R(x)$ *en la ecuación (7) es*

$$R(x) = x^2 + C_2 \, x + C_3,$$

donde $R(0) = (\alpha + 1)(\alpha + 2)$.

Ejemplo.

Consideremos los polinomios de Laguerre

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!(k!)^2} x^k, \tag{17}$$

haciendo $\alpha = 0$, de manera que $W(x) = e^{-x}$.

Por los teoremas 5 y 6 tenemos que

$$P(x) = x^2 \quad \text{y} \quad R(x) = x^2 + C_2 x + 2\,.$$

De la condición autoadjunta (ii) se ve que

$$S(x) = (4 + C_2)(1 - x).$$

La elección de C_2 está sujeta a las mismas restricciones que en el ejemplo precedente. De (6) y una adecuada elección de $C_2 = -5$ tenemos

$$\lambda_n = -n^2\,.$$

Así la ecuación diferencial resultante es

$$\left(x^2 e^{-x} y_n''\right)'' - \left(x e^{-x} y_n'\right)' - n^2 e^{-x} y_n = 0, \tag{18}$$

cuyas soluciones son precisamente los polinomios de Laguerre (17) ya que la constante arbitraria es tomada de manera que el coeficiente principal de cada polinomio sea la unidad.

El caso de Intervalo Infinito

Tomando $W(x) = e^{-x^2/2}$ sobre $\langle -\infty, \infty \rangle$ obtenemos los polinomios de Hermite

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}\,. \tag{19}$$

Donde $\left[\frac{n}{2}\right]$ = máximo entero de $\frac{n}{2}$.

Los teoremas correspondientes a los teoremas 3 y 4, respectivamente, son los siguientes.

Teorema 7.

Si se verifican las condiciones de los Teoremas 1 y 2, además, el intervalo es $\langle -\infty, \infty \rangle$ *y* $W(x) = e^{-x^2/2}$ *sobre* $\langle -\infty, \infty \rangle$, *entonces* P *en la ecuación (7) es* $P(x) = 1$.

Teorema 8.

Si se verifican las condiciones de los teoremas 1, 2 y 7, entonces $R(x)$ *en la ecuación (7) es*

$$R(x) = x^2 + C_3\,.$$

Ejemplo.

Por los Teoremas 7 y 8, tenemos

$$P(x) = 1 \quad \text{y} \quad R(x) = x^2 + C_3.$$

La condición autoadjunta (ii) exige que

$$S(x) = -(C_3 + 1)\, x.$$

La elección de C_3 está sujeta a las mismas restricciones que en los ejemplos precedentes. En este caso, una adecuada elección es $C_3 = -2$ de lo cual se tiene

$$\lambda_n = -n^2$$

Así la ecuación diferencial resultante es

$$\left(e^{-x^2/2}\, y_n''\right)'' - \left(e^{-x^2/2}\, y_n'\right)' - n^2 e^{-x^2/2} y_n = 0, \tag{20}$$

cuyas soluciones son precisamente los polinomios de Hermite ya que la constante arbitraria es tomada de manera que el coeficiente principal de cada polinomio sea la unidad.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Brenke W. C., "*On Polynomial Solutions of a class of Linear Differential Equation of the second order*". Bull. Amer. Math. Soc., 36, 77-84 (1930).

[2] Boyce W. E. y DiPrima R. C., "*Ecuaciones Diferenciales y Problemas con valores en la frontera*", tercera edición, (1991). Editorial Limusa.