PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. VII, N° 1, pág. 64 - 79, LIMA - PERÚ. Junio 2004

MODELOS ARCH: UNA APLICACIÓN EN EL PRONÓSTICO DE LA VOLATILIDAD DE ACCIONES COTIZADAS EN LA BOLSA DE VALORES DE LIMA

Adolfo Elescano Rojas[1], Ysela Agüero Palacios[2]

RESUMEN.- *Se propone un esquema para realizar el análisis de datos generados por una familia de procesos estocásticos denominados Procesos con Heterocedasticidad Condicional Autoregresiva–ARCH, los cuales son ampliamente utilizados para la predicción de la volatilidad de series financieras. Se ajusta un modelo ARCH para pronosticar la volatilidad de las cotizaciones de las acciones de la empresa minera Atacocha, utilizando la serie de datos observados desde 1992 a 2003.*

PALABRAS CLAVE: *Modelos ARCH, series financieras, volatilidad, heterocedasticidad condicional, retornos financieros, riesgo.*

ARCH MODELS : AN APPLICATION TO FORECAST VOLATILITY IN THE LIMA STOCK MARKET

ABSTRACT.- *A method is proposed to analyze data generated by a family of stochastic processes called autoregressive conditional heteroscedastic processes (ARCH), which are widely used to predict volatility of financial time series. An ARCH model is used to predict the volatility of the Atacocha mining company stock price based on the data from 1992 to 2003.*

KEYWORDS: *ARCH models, financial time series, volatility, conditional heteroscedasticity, financial returns, risk*

1. INTRODUCCIÓN

La creciente inestabilidad de las principales variables económicas y financieras, así como de los mercados financieros bursátiles desde las últimas décadas del siglo pasado crearon la necesidad de una gestión activa del riesgo financiero.

Uno de los múltiples riesgos financieros que enfrentan los inversionistas son los riesgos de mercado; entendidas como la pérdida potencial que puede sufrir un inversionista debido a las variaciones en los precios que se registran en los mercados financieros; o en fluctuaciones de los factores de riesgo tales como las tasas de interés y los tipos de cambio.

Un indicador fundamental para la cuantificación de riesgos de mercado es la volatilidad o variabilidad de los rendimientos de un activo financiero la cual puede no ser directamente observable- por lo que, se hace necesario encontrar métodos que permitan estimar y predecir esta volatilidad.

[1] Licenciado en Estadística egresado UNMSM. *adolfoestat@hotmail.com*
[2] Docente de la FCM-UNMSM. *yagüerop@unmsm.edu.pe*

De acuerdo al tipo de información que utilizan, los métodos de estimación y/o predicción de la volatilidad se clasifican en dos grandes grupos: métodos basados en expectativas (no aplicables en el contexto peruano) y métodos basados en series de rentabilidades históricas. Este último grupo incluye aquellos métodos que van desde desarrollos sencillos tales como el cálculo de desviaciones estándar (volatilidad histórica), medias móviles y suavización exponencial (volatilidad dinámica), a métodos más complejos que incorporan el concepto de proceso estocástico.

En las últimas décadas se han desarrollado métodos estadísticos que intentan modelar series de tiempo discretas, es así que en los años 70 del siglo pasado; gracias a la difusión del libro Time Series Analysis Forecasting and Control. (Box, G. E. P. y G. M. Jenkins, 1976), la atención estaba centrada en una clase de modelos, denominados procesos Autoregresivos - Integrados - Media Móvil (ARIMA) y todas sus variantes. En este enfoque la identificación del proceso generador de una serie temporal se basa en su estructura de autocorrelación.

Los modelos ARIMA son relativamente fáciles de implementar y son exitosos en el pronóstico de una gran cantidad de fenómenos. Pero en el caso específico de las series financieras, estos modelos pueden no ser apropiados, cuando los datos no cumplen con los supuestos básicos de los modelos ARIMA.

En 1982 Robert Engle propuso una nueva clase de procesos estocásticos denominados *Procesos con Heterocedasticidad Condicional Autoregresiva (ARCH)*, cuyo objetivo era modelar y predecir la volatilidad presente en las series financieras. Estos procesos se caracterizan porque presentan varianzas condicionales no constantes; aún cuando sus varianzas incondicionales lo son.

Los modelos ARCH fueron naturalmente extendidos por Bollerslev [2]; quien propuso los *modelos con Heterocedasticidad Condicional Autoregresiva Generalizada (GARCH)* cuya función de varianzas condicionales corresponde a un proceso ARMA.

Si bien los procesos ARCH[3] tienen éxito en el modelamiento y predicción de series financieras, su aplicación se limita a un cierto grupo de procesos con determinadas características, esto ha llevado a proponer un gran número de variantes con nombres exóticos tales como modelos; ARCH-M (Engle, Lilien y Robins, [7]), TARCH Zakoian, [16]), EGARCH (Nelson, [11]), A-GARCH, y N-GARCH, IGARCH (Nelson, [12]), V-GARCH, entre otros. Todos estos modelos son conocidos como modelos X-ARCH, resaltando la importancia que ha tenido a través del tiempo el modelo básico ARCH.

La clave de estos modelos está en considerar la información pasada de la variable y su volatilidad como factores altamente explicativos de su comportamiento presente y por extensión lógica de su futuro predecible.

Algunas características que se encuentran con frecuencia en las variables financieras que motivan y justifican la modelización de la Heterocedasticidad Condicional Autoregresiva son:

1. Se produce un agrupamiento de la volatilidad. Esto significa que en estas variables, grandes cambios tienden a ser seguidos por grandes cambios, de cualquier signo, mientras que pequeños cambios en las variables son seguidos por pequeños cambios de cualquier signo. Justamente, los modelos para la varianza condicional tratan de replicar este fenómeno.

2. La validez de estos modelos para determinar los criterios de mantenimiento o venta de activos financieros. Los inversionistas deciden respecto a la rentabilidad promedio y la volatilidad (riesgo) de sus activos, basados en la información pasada.

Los modelos ARIMA no contemplan estas dos características pues - contrariamente a la característica 1- requieren del supuesto de varianza constante (homocedasticidad), y no consideran la modelización conjunta de la media y la varianza. Con los modelos ARCH teóricamente se tendrían en cuenta estas dos condiciones.

[3] De aquí en adelante, se denotará ARCH para hacer referencia a los modelos ARCH y GARCH a menos que se especifique lo contrario.

Aunque los modelos ARCH, son aplicables para el análisis de un número limitado de series financieras, haciéndose imprescindible la utilización de los otros modelos (X-ARCH), es importante su estudio para una mejor comprensión de sus extensiones.

El objetivo de este artículo es presentar un esquema de los pasos a seguir para realizar el análisis de una serie cronológica de datos financieros y presentar una aplicación con acciones de la empresa minera Atacocha las cuales se cotizan en la Bolsa de Valores de Lima. La aplicación consistirá en ajustar un modelo ARCH y realizar pronósticos de la volatilidad de está serie de acciones.

En la sección 2 definimos el modelo ARCH y revisamos algunas definiciones que serán de utilidad en las secciones siguientes. En la sección 3 proponemos un diagrama que muestra los pasos a seguir para modelar series cronológicas que presentan heterocedasticidad condicional. Finalmente, en la sección 4 se realiza el análisis de la serie de retornos de acciones de la empresa minera Atacocha S.A

2. MODELO PARA LA HETEROCEDASTICIDAD

En esta sección presentamos el Proceso con Heterocedasticidad Condicional Autoregresiva, pero previamente definimos algunos términos de uso común en la economía y las finanzas con los cuales no necesariamente están familiarizados la mayoría de los estadísticos.

Mercado de Valores. Es aquel mercado organizado para la compra y venta de activos financieros o títulos[4]. Está compuesto por varios mercados: Mercado de Capitales para inversión a largo plazo, Mercado de Dinero para inversión a corto plazo, Mercado Primario para la emisión de títulos y Mercado Secundario para la compra-venta de títulos ya emitidos.

Riesgo de Mercado. Se define como la pérdida potencial que puede sufrir un inversionista debido a las variaciones en los precios que se registran en los mercados financieros o en las fluctuaciones de los factores de riesgo (tasas de interés, tipo de cambio, etc.).

Volatilidad. Es un indicador fundamental para la cuantificación de riesgos de mercados, el cual puede ser definido de varias maneras. Generalmente, se expresa como la desviación estándar de los rendimientos de un activo financiero. El hecho de que el indicador este expresado en números absolutos facilita su interpretación pues presenta las mismas unidades que el rendimiento.

Series Financieras. En el contexto del análisis de series de tiempo, definimos una serie financiera como un conjunto de valores de cada uno de los instrumentos utilizados en los mercados financieros correspondientes a periodos consecutivos, dichos periodos tienen la misma amplitud y la serie tiene un carácter discreto.

Retornos *(tasas de rendimiento).* Son transformaciones interpretables de los precios de activos financieros. Denotemos con P_t el precio de un activo en el instante t. Para acciones supondremos que el precio es ajustado por pagos de dividendos[5], Luego la *Variación relativa de precios o Retorno Líquido Simple* entre los instantes t y t-1 está dado por

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}}. \tag{1}$$

Distribución de los Retornos. Durante mucho tiempo los investigadores en finanzas trabajaron con la hipótesis de que los retornos eran procesos gaussianos. El panorama cambió a partir de la década del 60 del siglo pasado, con el trabajo pionero de Mandelbrot (Peters [13]), el cual tuvo gran importancia para el modelamiento de series financieras, pues, introdujo una original aproximación, rechazando la hipótesis de normalidad y mostrando que la distribución de los retornos presenta colas más pesadas.

4. Una empresa necesita de una variedad de ***activos reales.*** Muchos de estos activos son tangibles, como máquinas, oficinas; otros son intangibles, como conocimientos técnicos y patentes. Todos ellos deben ser pagados. Para obtener el dinero necesario, la empresa vende ***activos financieros*** que son derechos sobre los activos reales de la empresa y los fondos que aquellos activos producirán.

5. Montos en dinero o en acciones que las empresas otorgan a los tenedores de este tipo de activos.

Hechos Estilizados de las series financieras. Las series de retornos financieros presentan características peculiares (denominadas hechos estilizados), estas son:

a) Los retornos no presentan autocorrelación.
b) Los cuadrados de los retornos están autocorrelacionados.
c) Los retornos presentan agrupamientos (clusters) con diferentes niveles de volatilidad a lo largo del tiempo.
d) La distribución incondicional de los retornos es aproximadamente simétrica, generalmente es leptocúrtica y tiene colas más pesadas comparada con una distribución normal.
e) La volatilidad reacciona de manera distinta si los precios están a la baja o al alza, por lo que, muchas series de retornos son no lineales. Se observa que generalmente, una caída en el mercado causa mayor volatilidad que un alza.
f) Los retornos raramente presentan estacionalidad con excepción de retornos intra-diarios (series continuas).

Dos conceptos conocidos y muy utilizados en el análisis de series temporales son los de *proceso estocástico* y *ruido blanco*, por lo que pasamos a definirlas.

Proceso estocástico. Se define un proceso estocástico, como una familia de variables aleatorias $\left\{X_t\ ; t \in \left\langle -\infty, \infty \right\rangle\right\}$, tal que para cada conjunto finito numerable de valores de t, esto es, $t_1, t_2, ..., t_n$ se define una distribución de probabilidades conjunta para las correspondientes variables aleatorias $X_{t1}, X_{t2}, ..., X_{tn}$.

Proceso de Ruido Blanco. El proceso de ruido blanco denotado como $\left\{\varepsilon_t\ ; t \in (-\infty, \infty)\right\}$ tiene las siguientes propiedades:

i) $E(\varepsilon_t) = 0\ ;\ \forall_t$

ii) $V(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2\ \ ;\ \ \forall t,\ \sigma^2 < \infty$

iii) $E(\varepsilon_t\, \varepsilon_{t-k}) = 0\ ;\ \ \forall\, t,\ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Una propiedad adicional es la condición fuerte de independencia a través del tiempo

iv) $E(\varepsilon_t\, \varepsilon_{t+k}) = E(\varepsilon_t)\, E(\varepsilon_{t+k})\quad \forall\, t, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

El proceso que satisface las condiciones (i) - (iii) se denomina proceso ruido blanco débil, mientras que aquel que satisface las condiciones (i), (ii) y (iv) es denominado *proceso ruido blanco fuerte* o *proceso ruido blanco independiente.* Note que (iv) implica (iii), pero lo contrario no necesariamente se verifica.

Finalmente, si se adiciona la condición de normalidad $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, tenemos el *proceso ruido blanco gaussiano.*

Observación.- En adelante, denotaremos los procesos ruido blanco débil y ruido blanco fuerte con $\left\{\varepsilon_t\right\}$ y $\left\{v_t\right\}$, respectivamente.

Modelos para la heterocedasticidad

En la literatura referida al análisis de series financieras se mencionan con frecuencia dos aproximaciones para modelar la heterocedasticidad presente en este tipo de series. La primera consiste en introducir explícitamente en el modelo una variable exógena (variable independiente) que ayude a predecir la volatilidad, esto es,

$$Y_t = X_{t-1}\, v_t . \tag{2}$$

Donde, Y_t es la respuesta (variable de interés), X_{t-1} es una variable exógena (variable explicativa) y . v_t es una perturbación aleatoria.

De la expresión (2), se tiene que la introducción del proceso $\{X_{t-1}\}$ podría explicar periodos de volatilidad en el proceso $\{Y_t\}$. Pero, ésta solución del problema parece no ser satisfactoria debido a que se asume una causa específica $\{X_{t-1}\}$ para el cambio en la varianza. Por otro lado, desde el punto de vista de la teoría económica, no existen evidencias sólidas que conduzcan a la selección de un candidato para el proceso $\{X_t\}$, más aun, el conocimiento de una posible variable explicativa no necesariamente garantiza que la varianza de los errores del modelo sea constante.

La segunda aproximación corresponde al modelo bilineal, en el cuál la varianza condicional depende de las realizaciones pasadas del mismo proceso.

$$Y_t = X_{t-1}\, v_t . \tag{2}$$

Sin embargo, en este modelo la varianza incondicional de Y_t podría ser infinita, lo cual hace que ésta sea una formulación poco atractiva.

En lugar de usar una variable independiente X_t como en (2) o hacer alguna transformación a los datos (transformaciones de Box & Cox) para estabilizar la varianza Engle [6] propone un modelo simultáneo para la media y la varianza. La idea básica aquí; es que los retornos en su gran mayoría son serialmente incorrelacionados, pero la volatilidad (varianza condicional) depende de los retornos pasados por medio de una función cuadrática.

Proceso con Heterocedasticidad Condicional Autoregresiva (ARCH)

La propuesta de Engle [6] es formular un modelo autoregresivo de orden adecuado en los cuadrados de los errores provenientes del proceso y_t, dado por

$$y_1 = \phi_0 + \phi_1\, y_{t-1} + \varepsilon_t . \tag{3}$$

Donde, ε_t es una perturbación aleatoria o error aleatorio.

La varianza condicional de ε_t dada la información pasada $\psi_{\tau-1}$ es

$$V(\varepsilon_t / \psi_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2 / \psi_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2 .$$

Si los parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ son todos iguales a cero, la varianza condicional es constante e igual a α_0. De otro modo, ε_t^2 evoluciona de acuerdo a un proceso autoregresivo de la forma

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2 + v_t . \quad (4)$$

Donde, v_t es un proceso ruido blanco fuerte.

En la práctica, el modelo (4) se construye sobre los residuos $(\hat{\varepsilon}_t)$ del ajuste del modelo (3). Entonces, la varianza condicional se expresará como,

$$Var\left(\hat{\varepsilon}_{t+1}/\psi_t\right) = E\left(\hat{\varepsilon}_{t+1}^2/\psi_t\right) = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_t^2 + \alpha_2 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \ldots . + \alpha_m \hat{\varepsilon}_{t+1-m}^2 . \quad (5)$$

El modelo aditivo (4) tiene algunos inconvenientes para su tratamiento analítico por lo que es más práctico incorporar v_t como un término ruido blanco multiplicativo de modo que,

$$\varepsilon_t^2 = (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_m \hat{\varepsilon}_{t-m}^2)\, v_t .$$

La expresión anterior puede ser escrita como

$$\varepsilon_t = v_t^* \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2} \quad (6)$$

La expresión (6) puede ser escrita como,

$$\begin{cases} \varepsilon_t = v_t^* \sqrt{h_t} \\ h_t = \alpha_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 . \end{cases} \quad (7)$$

Donde, $\varepsilon_t/\psi_{t-1} \sim N(0, h_t)$, además se verifica que:

(i) $\alpha_0 > 0$

(ii) $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0$

(iii) $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots . + \alpha_m < 1$.

La expresión (7) es denominada *Proceso con Heterocedasticidad Condicional Autoregresiva de orden m – ARCH(m).*

Es importante tener presente que, el modelo ARCH(m) queda completamente especificado con las ecuaciones (3) y (7).

Posteriormente, se han propuesto variantes para el modelo AR(1) presentado en la ecuación (3). Además, los residuos $\hat{\varepsilon}_t$ (ecuación (7)) pueden provenir del ajuste de un modelo ARIMA, de un modelo de regresión o podría tratarse de retornos financieros los cuales en la mayoría de los casos tienden a comportarse como procesos ruido blanco débil.

En una primera aplicación empírica del modelos ARCH (*m*), Engle encontró que era necesario especificar un modelo con un retardo «m» grande, esto es, la serie estudiada mostraba una elevada persistencia lo que implicaba estimar un número relativamente grande de parámetros, sujetos a un conjunto de restricciones. Las dificultades que se presentaron durante la estimación de los parámetros llevó a Engle a proponer ponderaciones para los términos $\{\varepsilon_t\}$ en la ecuación de varianza condicional (h_t).

En el enfoque de Box y Jenkins se demuestra que un modelo autoregresivo de orden alto puede ser representado como un ARMA de menor orden, por ejemplo; un ARMA(1,1). Bollerslev [2] parte de este principio y propone un modelo tentativo conocido como *Proceso con Heterocedasticidad Condicional Autoregresiva Generalizada - GARCH (r, m)* definido por,

$$\begin{cases} \varepsilon_t = v_t\sqrt{h_t} \\ h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{r}\beta_j h_{t-j}, \end{cases} \tag{8}$$

donde,

(i) $r \geq 0,\ m > 0$

(ii) $\alpha_0 > 0,\ \alpha_i \geq 0,\ i = 1, ..., m$

(iii) $\beta_j \geq 0,\ j = 1, ... r$

(iv) $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i + \sum_{j=1}^{r}\beta_j < 1.$

3. ANÁLISIS DE DATOS CON EL MODELO ARCH

Box y Jenkins [3] propusieron un conjunto de pasos a seguir para realizar el análisis de datos con modelos ARIMA. Siguiendo estas mismas ideas proponemos un diagrama de flujo que puede servir de guía para la realización del análisis de datos que presentan heterocedasticidad (Elescano [5]).

El diagrama ha sido dividido en bloques identificados por las letras del alfabeto, y que serán descritas a continuación

A. Trabajo previo con la Serie

La construcción de series de retornos para el análisis con modelos ARCH requiere de un tratamiento previo de las series de precios tal como : detectar datos faltantes, deflactar la serie, el ajuste por pago de dividendos en efectivo, etc.

B. Identificación, Estimación y Evaluación del Modelo ARIMA.

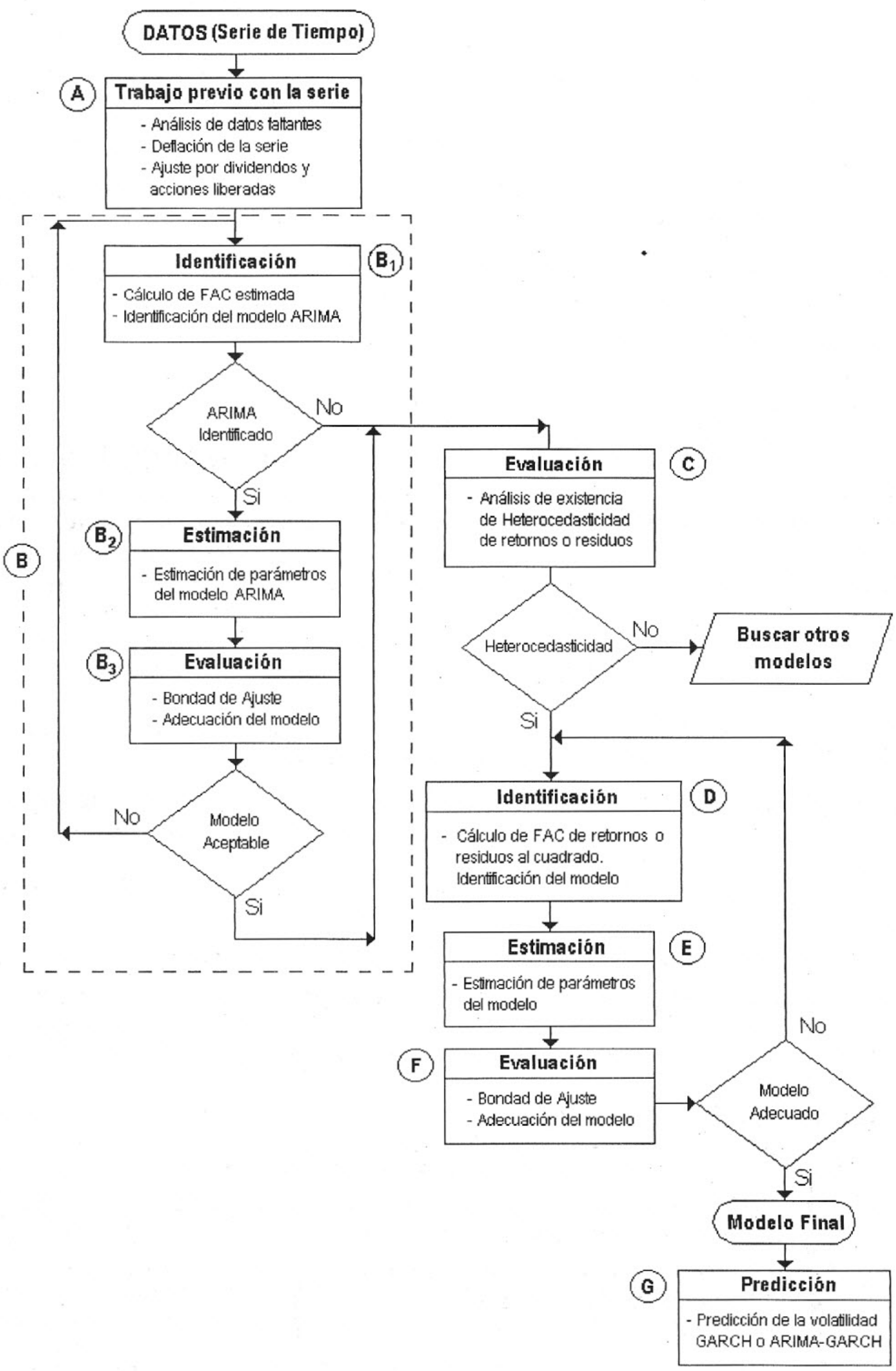
En primer lugar se tratará de identificar ***(B1)*** un modelo ARIMA a partir del análisis de la función de autocorrelación. Si es posible identificar un modelo procederemos a la estimación ***(B2)*** de parámetros y evaluación ***(B3)*** de la bondad del ajuste, siguiendo la metodología de Box & Jenkins, hasta encontrar un modelo ARIMA aceptable.

Según la metodología de Box y Jenkins una vez ajustado el modelo, la evaluación de la adecuación permitirá verificar que los residuos del ajuste correspondan a un proceso ruido blanco fuerte. Generalmente, el supuesto de varianza constante (homocedasticidad) no se verifica en el caso de las series de retornos, por lo que, el siguiente paso será evaluar la presencia de heterocedasticidad en los residuos del ajuste.

C. Evaluación de presencia de Heterocedasticidad. Para evaluar la presencia de heterocedasticidad podemos utilizar herramientas gráficas y pruebas de hipótesis, tales como:

- Gráfico de varianzas recursivas (Peters, [13]) .
- Gráfico de la función de autocorrelación simple de los cuadrados de los residuos del ajuste del modelo ARIMA. Si se observa algún patrón esto podría significar un indicio de presencia de heterocedasticidad condicional.
- Prueba de hipótesis de Ljung y Box [10] de los cuadrados de los residuos del ajuste del modelo ARIMA. Utilizaremos esta prueba para detectar autocorrelaciones significativas en los residuos al cuadrado $(\hat{\varepsilon}_t^2)$, lo que implicaría presencia de heterocedasticidad condicional.

Figura 1. Esquema de Análisis de datos mediante Modelos ARCH



- Prueba de Multiplicadores de Lagrange (Engle, [6]) . Es una prueba ampliamente usada para verificar presencia de heterocedasticidad condicional en los residuos.

Si al realizar los análisis anteriores se encuentra evidencia de heterocedasticidad condicional la siguiente tarea será identificar el orden del proceso ARCH o GARCH para los residuos al cuadrado .

D. Identificación del Modelo ARCH.

Es razonable el uso de las funciones de autocorrelación simple y parcial de los residuos al cuadrado ($\hat{\varepsilon}_t^2$), para identificar el orden del proceso ARCH[6]. El procedimiento es idéntico a la identificación de modelos ARIMA (***B1***).

Usualmente la identificación del orden del modelo GARCH(r,m) por medio de las FAC y FACP es difícil por lo que se recomienda probar con modelos de orden bajo tales como GARCH(1,1), GARCH(1,2), GARCH(2,1), GARCH(2,2) y luego escoger el modelo adecuado en base a algunos indicadores tales como los criterios de información AIC (Akaike [1]) y bayesiano BIC (Schwarz [14]) y el valor del log-verosimilitud obtenido después de la estimación del modelo.

Una vez identificado el proceso ARCH(m) o GARCH(r,m), el siguiente paso será la estimación de los parámetros del modelo.

Si la serie de retornos no muestra una estructura de autocorrelación que permita identificar un modelo ARIMA y seguir la secuencia de pasos del bloque B de la figura 1, realizaremos las tareas descritas en ***(C)*** y ***(D)*** sobre la serie de los cuadrados de los residuos.

E. Estimación de Parámetros del Modelo ARCH

El método de estimación de los parámetros de los modelos ARCH y GARCH diferirá dependiendo de que el modelo haya sido identificado : (i) sobre los residuos del ajuste de un ARIMA para los retornos o (ii) directamente sobre los cuadrados de los retornos.

Algunos paquetes computacionales econométricos y estadísticos tales como: EVIEWS, SPLUS, SAS y STATA incluyen módulos para la estimación de estos modelos.

F. Evaluación del Modelo ARCH.

Una vez estimados los parámetros procedemos a evaluar la bondad de ajuste y la adecuación del modelo. Este punto es similar al realizado con procesos ARIMA.

Un modelo estimado válido es el que cumple los siguientes requisitos:

i) Los residuos del ajuste se comportan aproximadamente como un proceso ruido blanco gaussiano.

ii) No se observa heterocedasticidad condicional en los residuos.

iii) El ajuste del modelo es estadísticamente significativo.

iv) Los coeficientes del modelo estimado son significativos y están débilmente correlacionados.

G. Predicción de la Volatilidad

La identificación, estimación y evaluación de los modelos de heterocedasticidad condicional ARCH, constituyen un proceso iterativo; cuyo objetivo final es la obtención de un modelo consistente con la estructura de los datos y que permita obtener predicciones de la volatilidad de los retornos, por lo que antes de utilizar el modelo para los pronósticos es importante evaluar la capacidad predictiva del modelo utilizando datos crudos.

---

[6]Dado que $\hat{\varepsilon}_t^2$ es un estimador insesgado de h_t y su valor actual depende de valores retardados $\hat{\varepsilon}_{t-1}^2$ (comportamiento similar al de un autoregresivo) es razonable usar la función de autorrelación simple de los residuos al cuadradro, $\hat{\varepsilon}_t^2$, para detectar la presencia de heterocedasticidad e identificar el orden del proceso ARCH. (La justificación del uso de la FAC estimada para la identificación de procesos GARCH es similar).

Si se están evaluando 2 o más modelos ajustados, será "mejor" aquel que produce menor error de pronóstico.

4. APLICACIÓN

Para ilustrar el proceso de identificación, estimación, validación y predicción utilizaremos la serie de retornos de acciones de la empresa minera Atacocha S.A.

DESCRIPCIÓN DE LA ACCIÓN

EMPRESA	:*COMPAÑÍA MINERA ATACOCHA S.A.*
ACTIVO FINANCIERO	: *Acciones de Inversión*
NEMÓNICO	: *ATACOI1*
MONEDA	: *Nuevo sol*
DEFLACTOR	: *IPC Enero 1992-Diciembre 2003 (INEI)*
DIVIDENDOS Y ACC. LIBERADAS	: *Estados Financieros Atacocha 1992-2003*
PERIODO DE COTIZACIÓN	: *Semanal*
PERIODO EN ESTUDIO	: *Del 03/01/1992 al 31/10/ 2003*
PERIODO DE PREDICCIÓN	: *Del 7 al 28 de Noviembre del 2003*

La aplicación se desarrollará siguiendo el esquema de análisis de datos presentado en la figura 1.

Paso A. Trabajo previo con la serie.

La serie de precios de las acciones fue corregida por inflación, dividendos en efectivo y acciones liberadas.

En la figura 2 se muestran los precios de cierre corregidos para el periodo en estudio. El comportamiento típico de este tipo de series es el de un «paseo aleatorio»; hecho que se refleja en su carácter no estacionario, por lo que no es posible visualizar la volatilidad de manera directa, resulta más conveniente calcular los retornos e identificar el modelo ARCH sobre esta nueva serie. En este caso, el periodo de cotización es semanal por lo que se calcularon retornos líquidos simples utilizando la ecuación (1). Los retornos y los precios de cierre se muestran en la figura 2.

El gráfico de la distribución de los retornos (Fig. 3) es leptocúrtica y presenta una ligera asimetría hacia a derecha.

Figura 2. Precios de Cierre y Retornos ATACOI1 (03/01/92-31/10/03)

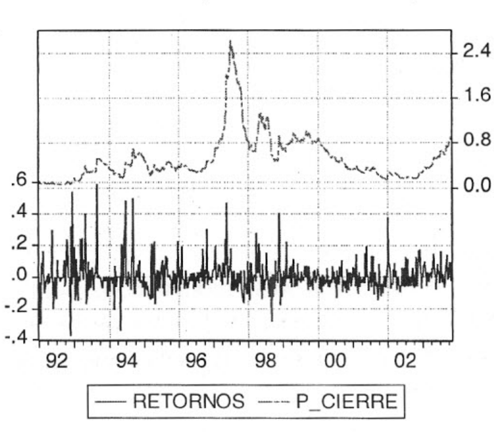
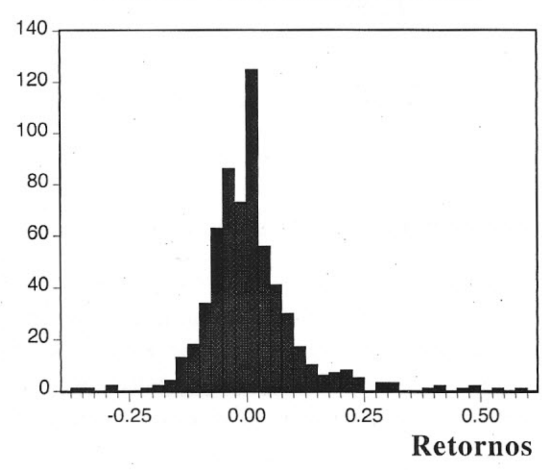


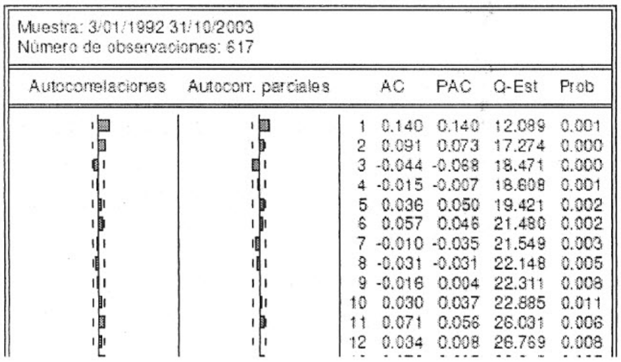
Figura 3. Distribución de Retornos



Paso B. Identificación, Estimación y Evaluación del Modelo ARIMA.

Una primera tarea en el proceso de identificación es observar si los retornos están autocorrelacionados linealmente. Una herramienta muy conocida para detectar autocorrelaciones es el gráfico de las FAC y FACP estimadas (Fig. 4). Notar que las primeras autocorrelaciones caen fuera de la banda. Por otro lado, la prueba de Ljung y Box (dos últimas columnas del lado derecho de la Fig. 4), muestra que las autocorrelaciones no corresponden a un proceso de ruido blanco (P<< 0.05). Luego, se requiere identificar un modelo ARIMA.

Figura 4. Correlograma de Retornos



Muestra: 3/01/1992 31/10/2003
Número de observaciones: 617

Autocorrelaciones	Autocorr. parciales		AC	PAC	Q-Est	Prob
		1	0.140	0.140	12.089	0.001
		2	0.091	0.073	17.274	0.000
		3	-0.044	-0.068	18.471	0.000
		4	-0.015	-0.007	18.608	0.001
		5	0.036	0.050	19.421	0.002
		6	0.057	0.046	21.480	0.002
		7	-0.010	-0.035	21.549	0.003
		8	-0.031	-0.031	22.148	0.005
		9	-0.016	0.004	22.311	0.008
		10	0.030	0.037	22.885	0.011
		11	0.071	0.056	26.031	0.006
		12	0.034	0.008	26.769	0.008

Un posible modelo identificado es un ARMA(0,2), pero se ajustaron también los modelos ARMA(0,1) y ARMA(1,0). Los criterios de bondad de ajuste (AIC, BIC, Log-Verosimilitud) confirman que el mejor modelo estimado es el ARMA(0,2).

Figura 5. Criterios de Bondad de Ajuste

Modelo Ajustado	AIC	BIC	Log Verosimilitud
ARMA (1,0)	-1.8062	-1.7990	557.3168
ARMA (0,1)	-1.8042	-1.7970	557.6152
ARMA (0,2)	***-1.8140***	***-1.7997***	***561.6383***

La figura 6 muestra los resultados de la estimación del modelo ARMA(0,2)

Figura 6. Resultados de la estimación del modelo ARMA(0,2)

	Coeficiente	Error Std.	Estadístico - t	Signific.
MA(1)	0.143546	0.04004	3.58504	0.0004
MA(2)	0.121452	0.040044	3.032944	0.0025

Paso C. Evaluación de la presencia de Heterocedasticidad.

Una vez ajustado el modelo sugerido por la estructura de autocorrelación de la serie de retornos, se procederá a evaluar la adecuación del modelo mediante el análisis de los residuos. Nuestro principal interés es averiguar si los residuos son condicionalmente heterocedásticos. Si lo son, procederemos a identificar un proceso ARCH o GARCH.

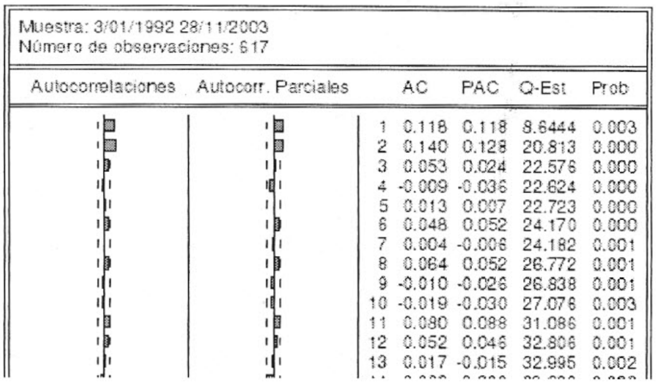
Los resultados de la prueba de Multiplicadores de Lagrange permiten concluir que los residuos del modelo ARMA(0,2) son condicionalmente heterocedásticos ($p < 0.05$), hecho que también se puede observar en el correlograma de los residuos al cuadrado (Fig. 7), el cuál presenta autocorrelaciones significativas ($p < 0.05$).

PASO D. Identificación del Modelo ARCH.

Usualmente, la identificación de modelos ARCH y especialmente de los GARCH mediante las FAC y FACP estimadas de los residuos al cuadrado (Fig. 7), es difícil y requiere cierta experiencia. Por lo general, se proponen varios modelos de orden bajo y se elige el mejor modelo ajustado.

Siguiendo este procedimiento y luego de evaluar varios modelos se eligió finalmente el modelo GARCH(2,2) con base en los criterios de bondad de ajuste AIC, BIC, Log-Verosimilitud.

Figura 7. Correlograma de Residuos del modelo ARMA(0,2) al cuadrado


Muestra: 3/01/1992 28/11/2003
Número de observaciones: 617

Autocorrelaciones	Autocorr. Parciales		AC	PAC	Q-Est	Prob
		1	0.118	0.118	8.6444	0.003
		2	0.140	0.128	20.813	0.000
		3	0.053	0.024	22.576	0.000
		4	-0.009	-0.036	22.624	0.000
		5	0.013	0.007	22.723	0.000
		6	0.048	0.052	24.170	0.000
		7	0.004	-0.006	24.182	0.001
		8	0.064	0.052	26.772	0.001
		9	-0.010	-0.026	26.838	0.001
		10	-0.019	-0.030	27.076	0.003
		11	0.080	0.088	31.086	0.001
		12	0.052	0.046	32.806	0.001
		13	0.017	-0.015	32.995	0.002

PASO E. Estimación de Parámetros del Modelo ARCH.

En adelante, la estimación, validación y predicción estarán referidos al mejor modelo identificado, esto es, al modelo ARMA (0,2)-GARCH(2,2).

El modelo GARCH(2,2) fue identificado sobre los residuos al cuadrado de un modelo ARMA(0,2) por lo que no es posible utilizar directamente la metodología de estimación descrita por Bollerslev [2]. En este caso utilizamos una variante propuesta por Weiss [15].

Los resultados se muestran en el siguiente cuadro.

Figura 8. Estimación[7] del modelo ARMA(0,2)–GARCH(2,2)

	Coeficientes	Error Est.	Estadística Z	Signific.
MA(1)	0.12974	0.055161	2.352046	0.0187
MA(2)	0.145929	0.046893	3.111982	0.0019
Constante	0.006751	0.000454	14.8684	0.0000
ARCH(1)	0.267749	0.041727	6.416699	0.0000
ARCH(2)	0.281743	0.039979	7.047307	0.0000
GARCH(1)	-0.412462	0.052775	-7.815441	0.0000
GARCH(2)	0.225889	0.043004	5.252704	0.0000

Todos los coeficientes estimados son significativos ($P < 0.05$) y cumplen con las restricciones impuestas al modelo (Fig. 8). Por otro lado, si comparamos los coeficientes estimados para la parte ARMA (Fig. 6) con los obtenidos en la figura 8 notamos leves diferencias debido a que el proceso de reestimación de parámetros incluye al modelo GARCH(2,2).

Paso F. Evaluación del Modelo ARCH El procedimiento de validación será realizado siguiendo el esquema dado en la sección 3 , el cuál considera los siguientes puntos que serán detallados a continuación:

[7] Método de estimación Máximo Verosímil. Software EVIEWS 4.1 ® Algoritmo BHHH (1974).

i) Los residuos del modelo estimado se aproximan al comportamiento de un proceso ruido blanco gaussiano.

Según la figura 9 ninguna de las autocorrelaciones de los residuos $(\hat{v}_t)$ del modelo ARMA(0,2)-GARCH(2,2) son significativas, éste hecho evidencia que la información relevante fue capturada por el modelo.

ii) No se observa heterocedasticidad condicional en los residuos.

Una herramienta que se utiliza para probar que ya no existe heterocedasticidad condicional en la serie de residuos es el correlograma de los residuos al cuadrado del modelo ajustado $(\hat{v}_t^2)$, el cuál no debe presentar ninguna autocorrelación significativa.

En la figura 10 observamos que todas las autocorrelaciones caen dentro de la banda de confianza por lo que se puede presumir ausencia de heterocedasticidad condicional en los residuos. Esto se confirma mediante la prueba de Ljung y Box.

Otra forma de evaluar la presencia de heterocedasticidad en los residuos es utilizando la prueba de multiplicadores de Lagrange la cual evidencia que no existe presencia de heterocedasticidad en los residuos del modelo ajustado.

iii) El grado de ajuste es elevado en comparación con otros modelos alternativos.

Ahora, es necesario elegir el mejor modelo en términos de bondad de ajuste. En la figura siguiente se muestran valores de los estadísticos AIC, BIC y el valor del Log-verosimilitud asociados con los posibles modelos ajustados a los datos.

Figura 11. Criterios de Bondad de Ajuste del modelo ARIMA-GARCH

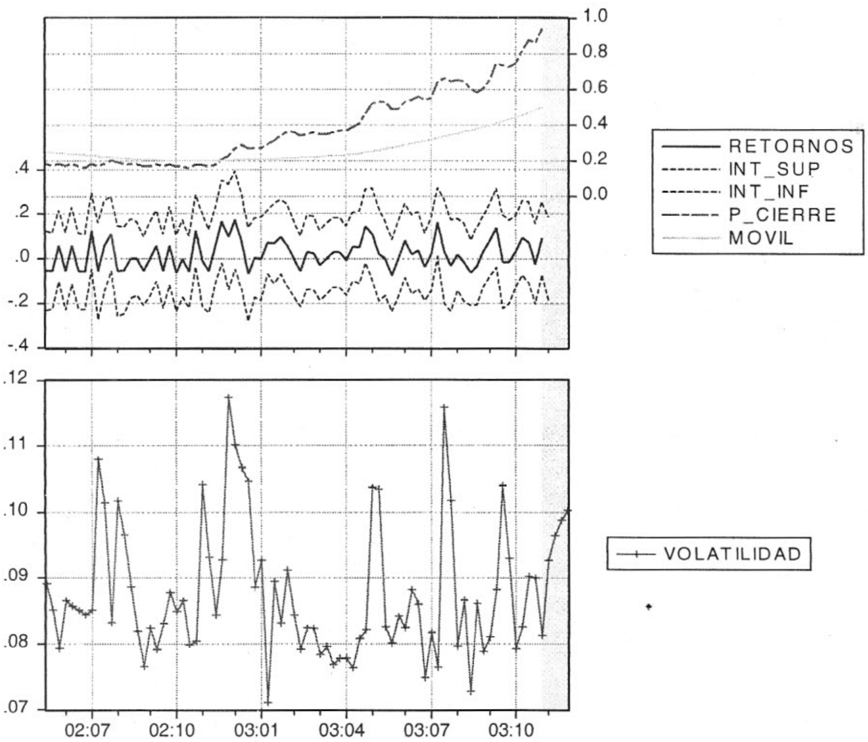
Modelo Ajustado	AIC	BIC	Log Verosimilitud
ARMA (0,2)-GARCH (1,1)	-1.9090	-1.8731	593.9131
ARMA (0,2)-GARCH (2,1)	-1.9071	-1.8641	594.3344
ARMA (0,2)-GARCH (2,2)	*-1.9234*	*-1.8832*	*600.3589*
ARMA (0,2)-GARCH (0,1)	-1.8632	-1.8345	578.7952
ARMA (0,2)-GARCH (0,2)	-1.9164	-1.8806	596.2224
ARMA (0,2)-GARCH (0,3)	-1.9137	-1.8707	596.3766

Observamos que el mejor modelo según los 3 criterios es el ARMA(0,2)–GARCH(2,2).

***Paso G.* Predicción de la Volatilidad.**

Luego de elegir el modelo ajustado ARMA(0,2)–GARCH(2,2) como el más adecuado estamos en condiciones de predecir la volatilidad futura para las acciones de la Compañía minera Atacocha (Fig. 13).

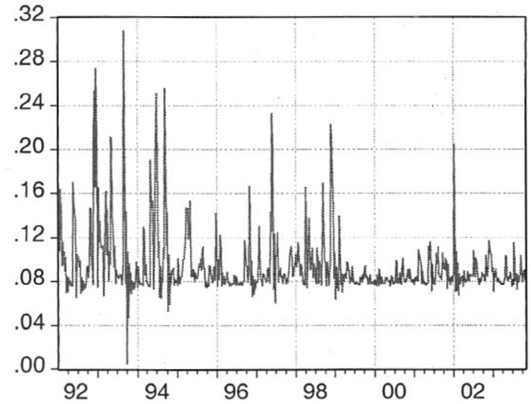
Figura 12. Precios de Cierre, Retornos, Volatilidad y Pronósticos(*) de la Volatilidad para el periodo 10/2003 –11/2003



(*) La franja sombreada de gris en la figura corresponde al periodo de predicción

Consideraremos como periodo de predicción el rango del 7 al 28 de noviembre del 2003. Es preciso mencionar que el análisis de la volatilidad se debe acompañar con un análisis de precios[8] y retornos, para así contar con mayor información del mercado y tomar decisiones más acertadas.

Figura 13. Volatilidad Ajustada bajo el Modelo ARIMA(0,2)-GARCH(2,2)



Analizando la figura 12 observamos que la volatilidad (riesgo), se incrementará en las próximas cuatro semanas (recordemos que a mayor riesgo se esperan mayores retornos positivos o negativos). Si a esto le sumamos el hecho que los precios desde diciembre del 2002 siguen una tendencia alcista no evidenciando ningún posible cambio en su comportamiento (La medía móvil se encuentra por debajo de la línea de precios), podríamos concluir que aunque se presenten algunos retornos negativos a los largo del periodo de predicción, se espera que el retorno acumulado en este periodo sea positivo, y que se producirá un incremento en el precio de cotización de las acciones de Atacocha.

[8]Existen metodologías de análisis de precios tales como el análisis técnico bursátil que intentan predecir la tendencia que seguirán los precios en el futuro. En este trabajo sólo utilizaremos el promedio móvil que sirve para identificar una tendencia poco después de que está comienza. Si el promedio móvil se desplaza por debajo de la línea de precios la tendencia será alcista, caso contrario será bajista. Para más detalle ver Murphy (2000).

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Algunas conclusiones importantes que podemos extraer del estudio de los modelos ARCH, son :

- Los procesos ARIMA no son apropiados para el modelado de series de retornos financieros, debido a que generalmente estas no presentan autocorrelación lineal, además de varianzas condicionales son heterocedásticas.
- Los modelos ARCH capturan la heterocedasticidad presente en las series de retornos financieros lo que permite estimar la volatilidad (riesgo) de estas series.
- Los modelos ARCH son la base para entender sus extensiones (GARCH-M, E-GARCH, T-GARCH, etc). Estas extensiones tienen una basta área de aplicación a diferencia de los modelos ARCH que están limitados a un cierto grupo de procesos con determinadas características.
- Inicialmente, los modelos ARCH fueron estudiados bajo el supuesto de que el proceso ε_t sigue una distribución condicionalmente normal. Sin embargo, se han obtenido mejores resultados en el ajuste al utilizar distribuciones marginales no gaussianas tales como: distribución t de Student, mixtura de distribuciones Normal-Poisson, mixtura Normal-Log Normal, distribución exponencial generalizada y mixtura de distribuciones normales serialmente dependientes o variables t-student.

Cuando se utiliza modelos ARCH es importante tener en cuenta que :

- Debido a que los procesos ARCH son no lineales, el análisis de la función de autocorrelación debe ser usada con mucha precaución; en especial lo referente a las bandas de confianza trazados en el correlograma. Estudios de simulación han mostrado que en estos procesos las varianzas de las autocorrelaciones estimadas son mayores que las varianzas dadas por Bartlett. La distribución asintótica de los estimadores de las autocorrelaciones muestrales para procesos no lineales es un tema muy importante a ser estudiado.
- La presencia de heterocedasticidad condicional en las series de retornos dificulta la identificación de un modelo ARIMA dentro del contexto de ajuste de modelos ARCH.
- Estimar directamente un modelo ARCH o GARCH sin eliminar la autocorrelación lineal en los retornos puede dificultar la identificación y estimación de estos modelos.
- Una de las principales dificultades de la aplicación de modelos ARCH en el entorno peruano se debe al poco dinamismo de nuestro mercado financiero; hecho que se refleja en la presencia de muchos datos faltantes lo que dificulta el análisis estadístico. Esto conduce a que sólo se pueda trabajar con un número limitado de activos tales como las acciones del Índice Selectivo de la Bolsa de Valores de Lima.
- La volatilidad (riesgo) forma parte de un conjunto de factores a tener presente al realizar inversiones en activos financieros, por lo tanto, el análisis de la volatilidad mediante modelos ARCH no puede realizarse independientemente de un análisis de la estructura de precios o retornos, de los fundamentos de las empresas (estados financieros) y del entorno macroeconómico y político del país.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Akaike, H. *Maximun Likelihood identification of Gaussian autoregresive moving average models.* Biometrika, 60, 255-265; (1973).

[2] Bollerslev, T. *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity.* Journal of Econometrics, 31, 307 – 327; (1986).

[3] Box, G. E. P., Jenkins, G. M., Reinsel, G. C., *The Time Series Analysis.* Forescasting and Control. Prentrec Hall (1994).

[5] Bollerslev, T., Engle, R.F. and Nelson, Daniel. *ARCH Models.* The Handbook of Econometrics, 4, 1 – 90 (1993).

[5] Elescano Rojas, Adolfo. Modelos ARCH(m) : *Una Aplicación con algunas Acciones que cotizan en la Bolsa de Valores de Lima.* Biblioteca Central UNMSM (2004).

[6] Engle, R.F. *Autoregresive Conditional Heteroskedasticity with estimates of the variance of U. K. inflation.* Econometrica, 50, 987 – 1008 (1982).

[7] Engle, Lilien y Robins. *Estimating Time Varing Risk Premia in the Term Structure*, The ARCH Model. Econometrica 55 (March 1987), 391-407 (1987).

[8] Hall, R., Lilien, D., Engle, R. Johnston, J. Ellsworth, S. *EVIEWS User Guide, ver. 4.1.* Quantitative Micro Software (2002).

[9] Hall, R., Lilien, D., Engle, R. Johnston, J. Ellsworth, S. *EVIEWS Command and Programming Reference, ver. 4.1.* Quantitative Micro Software (2002).

[10] Ljung, G. y Box. *On a measure of lack of fit in time series models.* Biometrika, 65, 297-303 (1978).

[11] Nelson, Daniel B. *Stationary and Persistence in the GARCH(1,1) Model.* Econometric Theory, 6:318-34 (1990).

[12] Nelson, Daniel B. *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Aproach.* Econometrica, 59:347-70 (1991).

[13] Peters. Edgar E. *Chaos and Order in the Capital Markets.* Segunda Edición. Jonh Wilwy & Sons, Inc (1996).

[14] Schwarz, G. *Estimating the dimension of the model.* The Annals of Statistics, 6, 461-464 (1978).

[15] Weiss, A. A. *ARMA Models with ARCH Errors.* Journal of Times Series Analysis, 7, 303-310 (1984).

[16] Zakoian. *Threshold Heteroskedasticity Model.* Unpub. MS, INSEE (1984).