PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. VII, N° 2, pág. 01 - 16, LIMA - PERÚ. Julio 2004

ESTABILIZACIÓN DE LA FRONTERA DE UN SISTEMA HIPERBÓLICO

Alfonso Pérez Salvatierra[1] **V. Yauri Luque**[1] **Andrés Guardia Cayo**[1]

RESUMEN.- *En este trabajo estudiaremos la velocidad de decaimiento de la energía de las soluciones de un sistema hiperbólico con condiciones de contorno disipativas.*

$$\left| \begin{array}{ll} u''(x,t) + 1v''(x,t) + a\Delta^2 u(x,t) = 0 & en\ \Omega \times \left]0, +\infty\right[\\ 1u''(x,t) + \gamma v''(x,t) + \delta\Delta^2 u(x,t) - \beta_0 \Delta v(x,t) = 0 & en\ \Omega \times \left]0, +\infty\right[\end{array} \right.$$

donde Ω *es un dominio acotado de* R^2. *El resultado es obtenido por el método propuesto por Komornik y Zuazua [6].*

PALABRAS CLAVE.- *Decaimiento, hiperbólico, soluciones fuertes, soluciones débiles.*

STABILIZATION OF THE BOUNDARY TO A HYPERBOLIC SYSTEM

ABSTRACT.- *In therse notes we will study the decay velocity of the energy of the hyperbolic systems solutions with dissipative contour conditions.*

KEYWORDS.- *Decay, hyperbolic, strong solutions, weak solutions.*

1. INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo desarrollaremos exclusivamente el comportamiento asintótico para soluciones débiles del sistema planteado en el resumen, donde las funciones:

$u(x, y, t)$: denota la posición de la placa en un instante t del tiempo.

$v(x, y, t)$: denota la tensión óptima

El objetivo principal es desarrollar el Teorema 3 enunciado en la página 7, basados en los resultados de los Teoremas 1 y 2 que nos dan resultados de existencia y regularidad de soluciones fuertes y débiles para el sistema (*) enunciados en la página 2, ver Chueshov [3], Koch [5] y Zuazua [19]; usando el método que frecuentemente se usa para una gran mayoría de sistemas: el Método de Galerkin, (ver Lions J. L. [15]). Para tal efecto, consideremos Ω un dominio acotado de R^2, con frontera Γ de clase C^4 y $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$,

---

[1] *Docentes de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la UNMSM*

una partición de Γ, ambas con medida positiva y $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \phi$. Denotemos $\nu = \nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x))$ el vector normal unitario en $x \in \Gamma$, exterior a Ω, por $\tau = \tau(x) = (-\upsilon_2(x), \upsilon_1(x))$ el vector tangente unitario, orientado en sentido positivo de Γ y $\xi = \xi(x)$ una función real perteneciente a $W^{-1,\infty}(\Gamma_1)$ con $\xi(x) \geq \xi_0 > 0$ sobre Γ_1.

Consideremos el sistema (*) a seguir con condiciones de contorno no homogéneas:

$$
(*)\quad \left|\begin{array}{ll}
u''(x,t) + \ell v''(x,t) + a\Delta^2 u(x,t) = 0 & \text{en } \Omega \times \left]0, +\infty\right[\\
\ell u''(x,t) + \gamma v''(x,t) + \delta\Delta^2 u(x,t) - \beta_0 \Delta v(x,t) = 0 & \text{en } \Omega \times \left]0, +\infty\right[\\
\alpha \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}(x,t) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + \alpha(1-\mu)(B_1 u)_\tau(x,t) = \xi(x) u'(x,t) & \text{en } \Gamma_1 \times \left]0, +\infty\right[\\
\delta \frac{\partial \Delta v}{\partial \nu}(x,t) - \beta_0 \frac{\partial v}{\partial \nu}(x,t) + \delta(1-\mu)(B_1 v)_\tau(x,t) = \xi(x) v'(x,t) & \text{en } \Gamma_1 \times \left]0, +\infty\right[\\
\alpha\left[\Delta u(x,t) + (1-\mu) B_2 u(x,t)\right] = 0 & \text{en } \Gamma_1 \times \left]0, +\infty\right[\\
\delta\left[\Delta u(x,t) + (1-\mu) B_2 v(x,t)\right] = 0 & \text{en } \Gamma_1 \times \left]0, +\infty\right[\\
u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = \frac{\partial v}{\partial \nu}(x,t) = 0 & \text{en } \Gamma_0 \times \left]0, +\infty\right[\\
u(0) = u^0,\ u'(0) = u',\ v(0) = v^0,\ v'(0) = v' & \text{en } \Omega
\end{array}\right.
$$

donde, los operadores B_1 y B_2 están definidos por:

$$
\begin{aligned}
B_1 u(x,y,t) &= \nu_1(x)\nu_2(x)(u_{yy}(x,y,t) - u_{xx}(x,y,t)) + (\nu_1^2(x) - \nu_2^2(x))\, u_{xy}(x,y,t) \\
B_2 u(x,y,t) &= 2\nu_1(x)\nu_2(x) u_{xy}(x,y,t) - \nu_2^2(x) u_{xx}(x,y,t) - \nu_1^2(x)\, u_{yy}(x,y,t)
\end{aligned}
$$

$0 < \mu < 1/2$, donde μ es el coeficiente de Poisson.

$\ell, \gamma, \alpha, \delta, \beta_0$ constantes positivas arbitrarias.

$(B_1 u)_\tau = \dfrac{\partial B_1 u}{\partial \tau}$ denota la derivada de $B_1 u$ en la dirección τ.

El resultado de estabilización en la frontera para el sistema (*) es obtenido por el método propuesto por Komornik y Zuazua [8], y se formula de la siguiente manera. *¿Bajo qué condiciones adecuadas sobre la partición* $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$, *se puede estimar la velocidad de decaimiento de la energía?.*

En este trabajo probaremos que el sistema (*) tiene un decaimiento exponencial de la energía, para lo cual usamos el método propuesto por Komonik y Zuazua [8].

Interesados en la estabilización en la frontera para el sistema (*) notamos que para el caso $\ell = \gamma = \alpha = \delta = \beta_0 = 0$, el problema fue estudiado por Komornik y Zuazua [8], Milla y Medeiros [17].

Introducimos algunas notaciones que usaremos en el transcurso de este trabajo:

Denotaremos respectivamente por

$(.,.) = (.,.)_{L^2(\Omega)}$, $|\cdot|$ al producto interno y la norma de $L^2(\Omega)$. (1)

En el espacio V de $H^2(\Omega)$ donde V está definido por,

$$V = \left\{ v \in H^2(\Omega);\ v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0,\ \frac{\partial \upsilon}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \right\}, \tag{2}$$

se define el producto interno,

$$((u, v))_V = \int_\Omega \Big[\Delta u \Delta v - (1-\mu)(u_{xx}v_{yy} + u_{yy}u_{xx}) - (1-\mu)u_{xx}v_{yy} \Big]\, dxdy$$

y su norma,

$$\| v \|_V^2 = \int_\Omega \Big[(\Delta v)^2 + 2(1-\mu)(v_{xy}^2 - u_{xx}v_{yy}) \Big]\, dxdy$$

los cuales denotaremos de la siguiente forma:

$$((.,.)) = ((.,.))_V \ \text{ y } \ \|\cdot\| = \|\cdot\|_V .$$

En V la norma usual de $H^2(\Omega)$ y la norma $\|.\|$ son equivalentes, (ver Lagnese [11] y Komornik [7]). (3)

Denotaremos por $\langle \cdot,\cdot \rangle_{H^{-m}(\Gamma)\times H^m(\Gamma)}$ la dualidad en los espacios H^{-m} y H^m, (ver Milla[16]). (4)

$L^2_{loc}(0, +\infty; X) = \left\{ v \in L^2(0, T; X);\ \text{para cada } T > 0 \right\}$, (ver Milla[16]). (5)

También introducimos algunas notaciones, (ver Lions, J. L. [14]). Sean $x^0 \in \mathbb{R}^2$, la función $m(x) = x - x^0,\ x \in \mathbb{R}^2$, tal que:

$$\Gamma_0 = \{ x \in \Gamma;\ m(x)\, v(x) \le 0 \} \ \text{ y } \ \Gamma_1 = \{ x \in \Gamma;\ m(x)\, v(x) > 0 \}.$$

Denotemos por $R = \| m \|_{L^{+\infty}(\Omega)}$ y $\xi(x) = m(x)v(x)$. Observe que $\xi(x) \ge m_0 > 0$ en Γ_1, puesto que $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \phi$.

Sea k una constante positiva tal que, para todo $v \in V$, se cumple

$$\left| (m.v)^{1/2} v \right|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \left| (m.v)^{1/2} \frac{\partial \upsilon}{\partial v} \right|^2_{L^2(\Gamma_1)} \le k \| v \|_V^2 .$$

Representamos por λ_1 el menor de los autovalores del problema espectral

$$((w, v))_V = \lambda (w, v)_{L^2(\Omega)}\ \forall v \in V.$$

Sean $\ell, \gamma, \alpha, \delta, \beta_0$, constantes positivos, con $1 > \ell$ y $\gamma > \ell$.

2. RESULTADOS PREVIOS

Para abordar el resultado principal previamente daremos algunos resultados como soluciones fuertes y débiles para el sistema (*).

2.1 SOLUCIÓN FUERTE

Daremos dos formulaciones generales del teorema de Green. Sean $u \in H^4(\Omega)$ y $w \in H^2(\Omega)$, entonces

$$(\Delta^2 u, w) = ((u, w)) + \left(\left[\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + (1-\mu)\,(B_1 u)_\tau\right], w\right)_{L^2(\Gamma)} - \left(\left[\Delta u + (1-\mu)\,B_2 u\right], \frac{\partial w}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Gamma)}, \tag{6}$$

donde

$$B_1 u = \nu_1 \nu_2 (u_{yy} - u_{xx}) + (\nu_1^2 - \nu_2^2)^2_{\cdot} u_{xy}$$
$$B_2 u = 2\nu_1 \nu_2 u_{xy} - \nu_2^2 u_{xx} - \nu_1^2 u_{yy}$$

y $(w)_\tau = \dfrac{\partial w}{\partial \tau}$ es la derivada tangencial, (ver Komornik [7], lema 7.II y Duvaut - Lions [4]).

Sean $u \in H^2(\Omega)$, $\Delta^2 u \in L(\Omega)$ y $w \in H^2(\Omega)$ entonces,

$$(\Delta^2 u, w) = ((u, w)) + \left\langle \frac{\partial \Delta^2 u}{\partial \nu} + (1-\mu)\,(B_1 u)_\tau, w \right\rangle_{H^{-3/2}(\Gamma).H^{3/2}(\Gamma)} - \left\langle \Delta u + (1-\mu)\left(B_2 u, \frac{\partial^2 w}{\partial \nu}\right)\right\rangle_{H^{-1}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} \tag{7}$$

Tenemos la siguiente identidad

$$\int_\Omega (u_{xx} v_{yy} + u_{xx} u_{xx} - 2u_{xy} v_{xy})\, dxdy = \int_\Gamma (B_1 u)_\tau\, v d\Gamma - \int_\Gamma (B_2 u)_\tau\, v d\Gamma,$$

para cada $u \in H^4(\Omega)$, $v \in H^2(\Omega)$; como consecuencia tenemos

$$u_x = (\nu_1, -\nu_2)\,(u_\nu, u_\tau),$$
$$u_y = (\nu_2, -\nu_1)\,(u_\nu, u_\tau),$$
$$u_\nu = (\nu_1, \nu_2)\,(u_x, u_y),$$
$$u_\tau = (-\nu_2, -\nu_1)\,(u_x, u_y).$$

Las igualdades anteriores nos limitan a trabajar en dimensión $n = 2$.

A continuación enunciamos una proposición de vital importancia para construir una base especial donde se toman los datos iniciales u^0, u^1 en espacios adecuados.

Proposición 1 *Sean* $u^0 \in V \cap H^4(\Omega)$, $u^1 \in V$, $\xi \in W^{1,\infty}(\Gamma_1)$, $\xi(x) \geq \xi_0 > 0$ *sobre* Γ_1 *tal que:*

$$\frac{\partial \Delta u^0}{\partial \nu} - \frac{\partial u^0}{\partial \nu} + (1-\mu)(B_1 u^0)_\tau = \xi(x)\, u^1 \quad \text{sobre } \Gamma_1,$$
$$\Delta u^0 + (1-\mu)\, B_2 u^0 = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_1.$$

Entonces para cada $\varepsilon > 0$, *existen w, z en* $V \cap H^4(\Omega)$ *tales que:*

$$\left\| w - u^0 \right\|_{V \cap H^4(\Omega)} < \varepsilon, \quad \left\| z - u^1 \right\|_V < \varepsilon \quad y$$

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} - \frac{\partial w}{\partial \nu} + (1-\mu)(B_1 w)_\tau = \xi(x)\, z \quad \text{sobre } \Gamma_1,$$
$$\Delta w + (1-\mu)\, B_2 w = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_1.$$

Prueba.

Ver Chueshov [3] y Milla [17].

En seguida planteamos la existencia y unicidad de soluciones fuertes para el sistema (*).

Teorema 1 *Sean*

(H.0) $\quad \ell < 1$ y $\ell < \gamma$

(H.1) $\quad \xi \in W^{1,\infty}(\Gamma_1)$, $\xi(x) \geq \xi_0 > 0$; $u^0\, v^0 \in V \cap H^4(\Omega)$ y $u^1, v^1 \in V$, *tal que*

$$\alpha \frac{\partial \Delta u^0}{\partial \nu} - \frac{\partial u^0}{\partial \nu} + \alpha(1-\mu)\,(B_1 u^0)_\tau = \xi(x) u^1 \quad \text{sobre } \Gamma_1,$$
$$\delta \frac{\partial \Delta v^0}{\partial \nu} - \beta_0 \frac{\partial v^0}{\partial \nu} + \delta(1-\mu)\,(B_1 v^0)_\tau = \xi(x) v^1 \quad \text{sobre } \Gamma_1,$$
$$\alpha(\Delta u^0 + (1-\mu) B^2 u^0) = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_1,$$
$$\alpha(\Delta v^0 + (1-\mu) B_2 v^0) = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_1,$$

Entonces existe un único par de funciones $u, v \colon \Omega \times \left]0, +\infty\right[\to \mathbb{R}$, *satisfaciendo las condiciones*

$$u, v \in L^\infty(0, +\infty; V \cap H^4(\Omega)); \quad u', v' \in L^\infty(0, +\infty; V) \text{ y } u'', v'' \in L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega))$$

$$
\begin{aligned}
u'' + \ell v'' \alpha\Delta^2 u - u\Delta &= 0 && en\ L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)) \\
\ell u'' + \gamma v'' + \delta\Delta^2 v - \beta_0 \Delta v &= 0 && en\ L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)) \\
\alpha \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(1-\mu)(B_1 u)_\tau &= \xi(x) u' && en\ L^\infty(0, +\infty; H^{1/2}(\Gamma_1)) \\
\delta \frac{\partial \Delta \upsilon}{\partial \nu} - \beta_0 \frac{\partial v}{\partial \nu} + \delta(1-\mu)(B_1 v)_\tau &= \xi(x) v' && en\ L^\infty(0, +\infty; H^{1/2}(\Gamma_1)) \\
\alpha(\Delta u + (1-\mu)\, B_2 u) &= 0 && en\ L^\infty(0, +\infty; H^{3/2}(\Gamma_1)) \\
\delta(\Delta v + (1-\mu)\, B_2 v) &= 0 && en\ L^\infty(0, +\infty; H^{3/2}(\Gamma_1)) \\
u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1,\ v(0) = v^0,\ v'(0) &= v^1 && en\ \Omega
\end{aligned}
$$

Demostración. Para la demostración se aplica el método de Faedo - Galerkin con una base especial para $V \cap H^4(\Omega)$ dado en la Proposición 1, ver Chueshov [3]. La solución obtenida en el Teorema 1 es llamada «solución fuerte» del sistema (*).

2.2 SOLUCIÓN DÉBIL

Teorema 2

Con las hipótesis (H.0), (H.1) *dadas en el Teorema* 1 $u^0, v^0 \in V$ *y* $u^1, v^1 \in L^2(\Omega)$. *Entonces, existe un único par de funciones* $u, v\colon \Omega \times \left]0, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ *satisfaciendo*

$$
\begin{aligned}
& u, v \in C^0\left(\left[0, +\infty\right[; V\right) \cap C^0\left(\left[0, +\infty\right[; L^2(\Omega)\right) \\
& \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}, \frac{\partial \Delta v}{\partial \nu}, (B_1 u)_\tau, (B_1 v)_\tau, B_2 u, B_2 v \in L^2(0, +\infty; L^2(\Gamma_1))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}, \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(1-\mu)(B_1 u)_\tau &= \xi u' && en\ L^2(0, +\infty; L^2(\Gamma_1)) \\
\delta \frac{\partial \Delta v}{\partial \nu}, \beta_0 \frac{\partial v}{\partial \nu} + \delta(1-\mu)(B_1 v)_\tau &= \xi v && en\ L^2(0, +\infty; L^2(\Gamma_1)) \\
\alpha\left[\Delta u + (1-\mu)\, B_2 u\right] &= 0 && en\ L^2(0, +\infty; L^2(\Gamma_1)) \\
\delta(\Delta v + (1-\mu)\, B_2 v) &= 0 && en\ L^2(0, +\infty; L^2(\Gamma_1)) \\
u'' + \ell v'' + \alpha\Delta^2 u - \Delta u &= 0 && en\ L^2_{loc}(0, +\infty; V') \\
\ell u'' + \gamma v'' + \delta\Delta^2 v - \beta_0 \Delta v &= 0 && en\ L^2_{loc}(0, +\infty; V') \\
u(0) = u^0,\ v(0) = v^0,\quad u'(0) = u^1,\ v'(0) &= v^1 && en\ \Omega.
\end{aligned}
$$

donde V' es el dual V.

Demostración.

Para la demostración de este Teorema se procede usando el Teorema 1 mediante aproximaciones, ver Chueshov [3] y Koch [5].

3. TEOREMA CENTRAL

Ahora enunciaremos el resultado principal de este trabajo.

Teorema 3 *Para toda constante* $C > 1$, *existe una constante* $\beta > 0$ *tal que, para cada dato inicial* $\{u^0, u^1\}$, $\{v^0, v^1\} \in V \times L^2(\Omega)$, *la energía* $E(t)$ *de la solución débil u y v del sistema (*) definida por:*

$$E(t) = \frac{1}{2}\Big\{ |u'(t)|^2 + \gamma |v'(t)|^2 + 2\ell(u'(t), v'(t)) + \\ + \alpha \| u(t)\|^2 + \delta \| v(t)\|^2 + |\nabla u(t)|^2 + \beta_0 |\nabla v(t)|^2 \Big\}$$

satisface la desigualdad:

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\beta t}, \ \forall t \geq 0.$$

Como las soluciones fuertes de (*) son densas en las soluciones débiles, probaremos el Teorema para las soluciones fuertes. Sea (u, v) una solución fuerte de (*), ver Teorema 1, y ε un número real positivo. Consideremos la energía perturbada $E_\varepsilon(t)$ definida por:

$$E_\varepsilon(t) = E(t) + \varepsilon\rho(t) \tag{8}$$

donde

$$\rho(t) = 2(u'(t) + \ell v'(t), m\nabla u(t)) + 2(\ell u'(t) + \gamma v'(t), m\nabla v(t)) + \\ (u'(t) + \ell v'(t), u(t)) + (\ell u'(t) + \gamma v'(t), v(t)), \tag{9}$$

entonces

$$|\rho(t)| \leq C_1 E(t) \tag{10}$$

De (8) y (10) tenemos:

$$|E_\varepsilon(t) - E(t)| = \varepsilon|\rho(t)| \leq \varepsilon C_1 E(t) \tag{11}$$

luego,

$$(1 - \varepsilon C_1)\, E(t) \leq E_\varepsilon(t) \leq (1 - \varepsilon C_1)\, E(t). \tag{12}$$

Por otro lado, de (8)

$$E'_\varepsilon(t) = E'(t) + \varepsilon\rho'(t). \tag{13}$$

En la definición de la energía en el Teorema 3, derivando y mayorando se obtiene,

$$E'(t) \le -\left|(m\nu)^{1/2}\, u'(t)\right|^2_{L^2[\Gamma_1]} - \left|(m\nu)^{1/2}\, v'(t)\right|^2_{L^2[\Gamma_1]}. \tag{14}$$

Afirmación 1.

$$\rho'(t) \le -E(t) + \left(1 + \frac{k}{\alpha} + \ell + R^2\right)\left|(m\nu)^{1/2} u'\right|^2_{L^2[\Gamma_1]} + \left(\gamma + \frac{k}{\delta} + \ell + R^2\right)\left|(m\nu)^{1/2} v'(t)\right|^2_{L^2[\Gamma_1]}. \tag{15}$$

Prueba.

(se demotrará más adelante)

Por tanto, de (13) , (14) y (15) resulta

$$E'_\varepsilon(t) \le -\varepsilon E(t) - \left[1 - \varepsilon\left(1 + \frac{k}{\alpha} + \ell + R^2\right)\right]\left|(m\nu)^{1/2} u'\right|^2_{L^2[\Gamma_1]} - \left[1 - \varepsilon\left(\gamma + \frac{k}{\delta} + \ell + R^2\right)\right]\left|(m\nu)^{1/2} v'(t)\right|^2_{L^2[\Gamma_1]}. \tag{16}$$

Sea $C > 1$ cualquiera y consideremos:

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \tag{17}$$

donde

$$\varepsilon_0 = \min\left\{\frac{C-1}{C_1(C+1)}, \min\left\{\left(1 + \frac{k}{\alpha} + \ell + R^2\right)^{-1}, \left(\gamma + \frac{k}{\delta} + \ell + R^2\right)^{-1}\right\}\right\}$$

De (17) se sigue que

$$1 - \varepsilon\left(1 + \frac{k}{\varepsilon} + \ell + R^2\right) > 0 \;\; y \;\; \left[1 - \varepsilon\left(\gamma + \frac{k}{\delta} + \ell + R^2\right)\right] > 0 \tag{18}$$

de (16) y (18) , obtenemos:

$$E'_\varepsilon(t) \le -\varepsilon E_\varepsilon(t). \tag{19}$$

Por otro lado, de (17) y (12) resulta

$$\frac{2}{C+1} E(t) \le E_\varepsilon(t) \le \frac{2C}{C+1} E(t) \tag{20}$$

esto es, $E(t)$ y $E_\varepsilon(t)$ son equivalentes para $\varepsilon > 0$ adecuado, dado en (12).

Por tanto, de (19) y (20), obtenemos

$$E'_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon\left(\frac{C+1}{2C}\right) E_\varepsilon(t) \tag{21}$$

por la cual concluimos que

$$E_\varepsilon(t) \leq E_\varepsilon(0)\, e^{-\varepsilon\left(\frac{C+1}{2C}\right)t}, \ \forall t \geq 0. \tag{22}$$

De (22) y (20) y usando los valores explícitos de C_1 y ε_0 dados en (12) se tiene:

$$E(t) \leq C\,E(0)e^{-\beta t}, \ \forall t \geq 0, \tag{23}$$

con β y C constantes positivas, β es dado por,

$$\beta = \left[\, C_1 + \max\left\{ K_1, \max(K_2, K_3)\right\}\right]^{-1}$$

donde

$$K_1 = \frac{C_1(C+1)}{C-1}$$

$$K_2 = 1 + \frac{K}{\alpha} + \ell + R^2$$

$$K_3 = \gamma + \frac{K}{\delta} + \ell + R^2.$$

Demostración de afirmación 1:

De

$$\begin{aligned}\rho'(t) &= 2(u''(t) + \ell v''(t),\ m\nabla u(t)) + 2(\ell u''(t) + \gamma v''(t),\ m\nabla v(t)) \\ &\quad + 2(u'(t) + \ell v'(t), m\nabla u'(t)) + 2(\ell u'(t) + \gamma v'(t), m\nabla v'(t)) \\ &\quad + (u'(t) + \ell v'(t), u'(t)) + (\ell u'(t) + \gamma v'(t), v'(t)).\end{aligned} \tag{24}$$

Vamos a estudiar cada sumando de (24) separadamente y suprimiremos las variables espaciales y temporales, para facilitar la notación.

Etapa 1.

$$\begin{aligned}(u'' + \ell v'', u) + (\ell u'' + \gamma v'', v) &\leq -\alpha\|u\|^2 - \delta\|v\|^2 - |\nabla u|^2 - \beta_0|\nabla v|^2 \\ &\quad + \frac{k}{\alpha}\left|(m\nu)^{1/2}u'\right|^2_{L^2[\Gamma_1]} + \frac{k}{\delta}\left|(m\nu)^{1/2}v'(t)\right|^2_{L^2[\Gamma_1]} + \frac{\alpha}{4}\|u\|^2 + \frac{\delta}{4}\|v\|^2.\end{aligned} \tag{25}$$

Etapa 2. Observando

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[m_1(u')^2\right] = (u')^2 + m_1(u')_x^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[m_2(u')^2\right] = (u')^2 + m_2(u')_y^2$$

$$\gamma\frac{\partial}{\partial x}\left[m_1(v')^2\right] = \gamma(v')^2 + \gamma m_1(v')_x^2$$

$$\gamma\frac{\partial}{\partial y}\left[m_2(v')^2\right] = \gamma(v')^2 + \gamma m_2(v')_y^2$$

$$2\,\ell\frac{\partial}{\partial x}\left[m_1 u'v'\right] = 2\ell u'v' + 2\ell m_1\,(u'v')_x$$

$$2\ell\,\frac{\partial}{\partial x}\left[m_2 u'v'\right] = 2\ell u'v' + 2\ell m_2\,(u'v')_y$$

Entoces,

$$2(u' + \ell v', m\nabla u') + 2(\ell u' + \gamma v', m\Delta v') = -2|u'|^2 - 2|v'|^2 - 4\ell(u',v') + \\ + \left|(mv)^{1/2}u'\right|^2_{L^2[\Gamma_1]} + \gamma\left|(mv)^{1/2}v'\right|^2_{L^2[\Gamma_1]} + 2\ell\left((mv)^{1/2}u', (mv)^{1/2}v'\right)_{L^2[\Gamma_1]}. \tag{26}$$

Etapa 3.

$$(u' + \ell v', u') + (\ell u' + \gamma v', v') = |u'|^2 + \gamma|v'|^2 + \ell(u', v'). \tag{27}$$

Etapa 4.

Afirmación 2.

$$2\,(u'' + \ell v'', m\nabla u) + 2(\ell u'' + \gamma v'', m\nabla v) \leq \mathbb{R}^2\left|(mv)^{1/2}u'\right|^2_{L^2[\Gamma_1]} + \\ + R^2\left|(mv)^{1/2}v'(t)\right|^2_{L^2[\Gamma_1]} + \frac{\alpha}{4}\|u\|^2 + \frac{\delta}{4}\|v\|^2. \tag{28}$$

Demostración. (se demostrará más adelante)

Entonces mayorando el segundo miembro de (24) por los valores encontrados en (25), (26), (27) y (28) obtenemos nuestra afirmación (1) enunciado en (15).

Demostración de afirmación (2):

Notaremos que,

$$2(u'' + \ell v'', m\nabla u) + 2(\ell u'' + \gamma v'', m\nabla v) = 2(-\alpha\Delta^2 u + \Delta u, m\nabla u) + \\ + 2(-\delta\Delta^2 v + \beta_0\Delta v, m\nabla v). \tag{29}$$

A continuación analizaremos cada sumando del segundo miembro de (29),

Etapa 5.

En esta etapa sólo analizaremos el Primer término, esto es $2(-\alpha\Delta^2 u + \Delta u,\, m\nabla u)$ el análisis del término $2(-\delta\Delta^2 v + \beta_0\Delta v,\, m\nabla v)$ es análogo.

Como
$$
\begin{aligned}
2(-\alpha\Delta^2 u + \Delta u,\, m\nabla u) &= -2\alpha \int_\Omega \Delta^2 u(m\nabla u)\,dxdy + 2\int_\Omega \Delta u(m\nabla u)\,dxdy \\
&= -2\alpha \int_\Omega \left[(\nabla u)_{xx} + (\nabla u)_{yy}\right](m_1 u_x + m_2 u_y)\,dxdy + \\
&\quad + 2\int_\Omega (u_{xx} + u_{yy})\,(m_1 u_x + m_2 u_y)\,dxdy\,,
\end{aligned}
$$

observamos que

$$
\begin{aligned}
\left[\Delta u_x (m_1 u_x + m_2 u_y)\right]_x &= (\Delta u)_{xx}\,(m_1 u_x + m_2 u_y) + (\Delta u)_x (m_1 u_x + m_2 u_y)_x \\
\left[\Delta u_y (m_1 u_x + m_2 u_y)\right]_y &= (\Delta u)_{yy}\,(m_1 u_x + m_2 u_y) + (\Delta u)_y (m_1 u_x + m_2 u_y)_y \\
\left[u_x (m_1 u_x + m_2 u_y)\right]_x &= u_{xx}\,(m_1 u_x + m_2 u_y) + u_x (m_1 u_x + m_2 u_y)_x \\
\left[u_y (m_1 u_x + m_2 u_y)\right]_y &= u_{yy}\,(m_1 u_x + m_2 u_y) + u_y (m_1 u_x + m_2 u_y)_y\,.
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left[(\Delta u)_{xx} + (\Delta u)_{yy}\right](m_1 u_x + m_2 u_y)\,dxdy &= \int_\Omega (\nabla(\Delta u\cdot v)m\,\nabla u\,d\Gamma) \\
&\quad -\left[\int_\Omega (\Delta u)_x\,(m_1 u_x + m_2 u_y) + (\Delta u)_y\,(m_1 u_x + m_2 u_y)_y\,dxdy.\right] \\
\int_\Omega (u_{xx} + u_{yy})\,(m_1 u_x + m_2 u_y)\,dxdy &= \int_\Gamma (\nabla u)\,v\,m\nabla u\,d\Gamma - \int_\Omega u_x (m_1 u_x + m_2 u_y)_x + \\
&\quad + u_y (m_1 u_x + m_2 u_y)\,dxdy\,.
\end{aligned}
$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
\left[\Delta u (m_1 u_x + m_2 u_y)_x\right]_x &= \Delta u_x (m_1 u_x + m_2 u_y)_x + \Delta u (m_1 u_x + m_2 u_y)_{xx}\,, \\
\left[\Delta u (m_1 u_x + m_2 u_y)_y\right]_y &= \Delta u_y (m_1 u_x + m_2 u_y)_y + \Delta u (m_1 u_x + m_2 u_y)_{yy}\,.
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
2(-\alpha\Delta^2 u + \Delta u,\, m\nabla u) &= -2\alpha \int_\Gamma \frac{\partial\Delta u}{\partial v} m\nabla u\,d\Gamma + 2\int_\Gamma \Delta u \frac{\partial}{\partial v}(m\nabla u)\,d\Gamma \\
&\quad -2\alpha \int_\Omega \Delta u\Delta(m\nabla u)\,dxdy + 2\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial v} m\nabla u\,d\Gamma \\
&\quad -\int_\Omega (u_x^2 + u_x^2 + 2m_1 u_x u_{xx} + 2m_2 u_x u_{xy} + 2m_1 u_y u_{xy} \\
&\quad + 2m_2 u_y u_{yy} + u_y^2 + u_y^2)\,dxdy\,.
\end{aligned}
$$

Como $0 < \mu < 1/2$ tenemos,

$$2(-\alpha\Delta^2 u + \Delta u, m\nabla u) \leq -2\int_\Gamma \left[\alpha\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu}\right] m\nabla u d\Gamma + 2\alpha\int_\Gamma \Delta u \frac{\partial}{\partial \nu}(m\nabla u)\, d\Gamma$$
$$- \int_\Gamma m\nu |\nabla u|^2\, d\Gamma - (1-\mu)\,\alpha \int_\Omega 2\Delta u \Delta(m\nabla u) dxdy$$
$$- \mu\alpha \int_\Gamma m\nu(\Delta u)^2.$$

Observemos que

$$-(1-\mu)\,\alpha \int_\Omega 2\Delta u\,\Delta(m\nabla u) = -(1-\mu)\,\alpha\int_\Omega \Big[2u_{yy}(m_1u_x + m_2u_y)_{xx} +$$
$$2u_{xx}(m_1u_x + m_2u_y)_{yy} + 2u_{xx}(m_1u_x + m_2u_y)_{xx} + 2u_{yy}(m_1u_x + m_2u_y)_{yy}\Big]\, dxdy.$$

Recordemos que,

$$-\int_\Omega u_{xx}(m_1u_x + m_2u_y)_{yy} + u_{yy}(m_1u_x + m_2u_y)_{xx}\, dxdy + + 2\int_\Omega u_{xy}(m_1u_x + m_2u_y)_{xy}$$
$$= \int_\Omega B_2 u \frac{\partial}{\partial \nu}(m\nabla u)\, d\Gamma - \int_\Gamma (B_1 u)_\tau\, m\nabla u d\Gamma$$

Por tanto,

$$2(-\alpha\Delta^2 u + \Delta u, m\nabla u) \leq -2\int_\Gamma \left[\alpha\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(1-\mu)\,(B_1 u)_\tau\right] m\nabla u d\Gamma +$$
$$+ 2\alpha\int_\Gamma [\Delta u + (1-u)\, B_2]\, \frac{\partial}{\partial \nu}(m\nabla u)\, d\Gamma$$
$$- \int_\Gamma m\nu|\nabla u|^2\, d\Gamma - 4(1-\mu)\,\alpha\int_\Omega 2u_{xy}(m_1u_x + m_2u_y)_{xy}$$
$$-(1-\mu)\,\alpha\int_\Omega \Big[2u_{xx}(m_1u_x + m_2u_y)_{xx}$$
$$+ 2u_{yy}(m_1u_x + m_2u_y)_{yy}\Big]\, dxdy - \mu\alpha\int_\Gamma m\nu(\Delta u)^2\, d\Gamma.$$

Además,

$$4u_{xy}(m_1u_x + m_2u_y)_{xy} = 4u_{xy}^2 + 2(m_1u_{xy}^2)_x + 2(m_1u_{xy}^2)_y\,;$$
$$2u_{xx}(m_1u_x + m_2u_y)_{xx} = 2u_{xx}^2 + (m_1u_{xx}^2)_x + (m_2u_{xx}^2)_y\,;$$
$$2u_{yy}(m_1u_x + m_2u_y)_{yy} = 2u_{yy}^2 + (m_1u_{yy}^2)_x + (m_2u_{yy}^2)_y\,.$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
2(-\alpha\Delta^2 u + \Delta u, m\nabla u) \leq & -2\int_{\Gamma_0}\left[\alpha\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(1-\mu)(B_1 u)_\tau\right] m\nabla u d\Gamma \\
& -2\int_{\Gamma_1}\left[\alpha\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(1-\mu)(B_1 u)_\tau\right] m\nabla u d\Gamma \\
& + 2\alpha\int_{\Gamma_0}\left[\Delta u + (1-\mu)\, B_2 u\right]\frac{\partial}{\partial \nu}(m\nabla u)\, d\Gamma \\
& + 2\alpha\int_{\Gamma_1}\left[\Delta u + (1-\mu)\, B_2 u\right]\frac{\partial}{\partial \nu}(m\nabla u)\, d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_0} m\nu|\nabla u|^2\, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} m\nu|\nabla u|^2\, d\Gamma \\
& - \mu\alpha\int_{\Gamma_0} m\nu(\Delta u)^2\, d\Gamma - \mu\alpha\int_{\Gamma_1} m\nu(\Delta u)^2\, d\Gamma \\
& - (1-\mu)\alpha\int_{\Gamma_0} m\nu(2u_{xy}^2 + u_{xx}^2 + u_{yy}^2)\, d\Gamma \\
& - (1-\mu)\alpha\int_{\Gamma_1} m\nu(2u_{xy}^2 + u_{xx}^2 + u_{yy}^2)\, d\Gamma \\
& - 2(1-\mu)\alpha\int_{\Omega} 2u_{xy}^2 + u_{xx}^2 + u_{yy}^2\, dxdy.
\end{aligned}
$$

Como $m\nu \leq 0$, sobre Γ_0, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sobre Γ_0, $|\nabla u|^2 = \left(\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2$ sobre Γ_0, $m\nu > 0$, sobre Γ_1, también $u_{xx}u_{yy} = u_{xy}^2$ sobre Γ_0, $m\nabla u = m\nu\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ sobre Γ_0, (cf Komornik [6], [7]); $\dfrac{\partial}{\partial \nu}(m\nabla u) = (m\nu)\Delta u$ sobre Γ_0, (Lagnese [11], pág. 161]), $B_2 u = 0$ sobre Γ_0, (Lagnese [12]), y

$$
\begin{aligned}
\alpha\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(1-\mu)(B_1 u)_\tau = m\nu u' \quad & \text{sobre } \Gamma_1, \\
\alpha\left[\Delta u + (1-\mu)\, B_2 u\right] = 0 \quad & \text{sobre } \Gamma_1.
\end{aligned}
$$

Tenemos

$$
\begin{aligned}
2(-\alpha\Delta^2 u + \Delta u, m\nabla u) \leq & -2\int_{\Gamma_1}(m\nu)u'(m\nabla u)d\Gamma - \int_{\Gamma_1} m\nu\,|\nabla u|^2\, d\Gamma \\
& - (1-\mu)\,\alpha\int_{\Gamma_1} m\nu(2u_{xy}^2 + u_{xx}^2 + u_{xy}^2)\, d\Gamma\,.
\end{aligned}
$$

Análogamente tenemos,

$$
\begin{aligned}
2(-\delta\Delta^2 v + \beta_0\Delta v, m\nabla v) \leq & -2\int_{\Gamma_1}(m\nu)v'(m\nabla v)d\Gamma - \int_{\Gamma_1} m\nu\,|\nabla v|^2\, d\Gamma \\
& - (1-\mu)\,\delta\int_{\Gamma_1} m\nu(2v_{xy}^2 + v_{xx}^2 + v_{xy}^2)\, d\Gamma.
\end{aligned}
$$

Etapa 6.

$$\left|-2\int_{\Gamma_1}(mv)u'(m\nabla u)d\Gamma\right| \leq \int_{\Gamma_1}\mathbb{R}^2(mv)^2|u'|^2\,d\Gamma + \int_{\Gamma_1}mv|\nabla u|^2\,d\Gamma$$

$$\left|-2\int_{\Gamma_1}(mv)v'(m\nabla v)\right| \leq \int_{\Gamma_1}\mathbb{R}^2(mv)^2|v'|^2\,d\Gamma + \int_{\Gamma_1}mv|\nabla v|^2\,d\Gamma.$$

Así se prueba la afirmación (2), enunciada en (28) y por tanto el Teorema queda demostrado.

4. COMENTARIOS

El modelo del sistema de placas para el caso $n = 2$, establece las vibraciones de una membrana y si los datos iniciales son ceros nos indican que están sujetos en sus extremos, el sistema (*) con las condiciones de la frontera nulas es una generalización lineal del caso unidimensional que surge en el estudio de flexión de barras con torsión, ver Andrade [1] en la cual se ha incorporado la función $v(x, y, t)$ al sistema de placas, cual define a la función tensión.

En Duvant and Lions [4] podemos observar un estudio de estos fenómenos físicos. La estabilización uniforme en la frontera para placas termoelásticas Lagnese [10] y [11]. El análisis de sus soluciones y control exacto para la clases de placas se pueden ver Lagnese [12], Lagnese [9] y Larkin [13].

5. CONCLUSIONES

En verdad cada vez que se le agrega un término adecuado, a un sistema de placas, esta determina un fenómeno físico diferente que a su vez ayuda para su decaimiento tanto exponencial como polinomial,.
Es decir, actúan como términos disipativos internos o en la frontera.

Uno de los términos disipativos es considerar la memoria, representado por una integral, que nos da el historial de la deformación de la membrana (caso $n = 2$) a través del tiempo. Como por ejemplo

$$\left|\begin{array}{ll} \hat{u}_{tt} - h\Delta u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-\tau)\,\Delta^2 u(\tau)d\tau & = [u, v] \;\; en \;\; \Omega \times \,]0, +\infty[\\ \Delta^2 v & = [u, u] \;\; en \;\; \Omega \times \,]0, +\infty[\\ u(x, y, 0) = u_0(x, y);\; u_t(x, y, 0) = u_1(x, y),\; (x, y) \in \Omega \text{ son condiciones de frontera.} & \end{array}\right.$$

Ver Muñoz y Perla [18] y con amortiguamiento en la frontera, ver Cavalcanti [2].

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Andrade, N., *Soluções fracas de um sistema não linear de equações diferenciais,* Tese de Doutorado, IM - UFRJ, Rio de Janeiro, (1980).

[2] Cavalcanti, M.M, Larkin, N. & Soriano, J.A, *On Solvabity and Stability of Solutions to Hyperbolic Problems with Boundary Damping* , (por aparecer).

[3] Chueshov, I. D., *Strong solutions and the attractor of the von Kárman equations* Math USSR Sbornik 69(1), pág. 25-36, (1991).

[4] Duvaut, G & Lions, J.L, *Les Inéquations en Méchanique et en Physique, París,* (1972).

[5] Koch, H. and Stathel, A., *Global existence of classical solutions to the dynamical von Kárman equations.* Math Methods in the Applied. 161, pág. 581-586, (1993).

[6] Komornik, V, *On the nonlinear boundary stabilization of Kirchhoff plates, nonlinear* Diff. Ecuations and Apl. (NoDEA 1, 323 - 337) (1994).

[7] Komornik, V, *Exact Contrallability and Stabilization, The Multiplier Method, Masaon.* John Wiley, París, 1994.

[8] Komornik, V, & Zuazua, E, *A direct method for boundary stabilization of the wave equation,* J. Math Pure et Apll. 69, 33 - 54 (1990).

[9] Lagnese, J., *Some problems related to boundary stabilization of Plates,* (a aparecer).

[10] Lagnese, J., *Uniform boundary stabilization of thermoelastic plates,* (a aparecer).

[11] Lagnese, J., *The Reachability Problem for Thermoelastic Plates,* Arch. Rational Mech. Anal. 112, 223 - 267, Springer - Verlarg (1920).

[12] Lagnese, J. & Lions, J.L, *Modelling, Analysis and Control of Thin Plates.* Collection Masson, París (1988).

[13] Larkin, N.A & Medeiro, L.A, *The wave equation with nonlinear boundary conditions,* Actas do 43° Seminario Brasilero de Análise, (1995).

[14] Lions, J.L, *Controlabilité Exacte, Perturbation et Stabilization des Systémes Distribuées,* Vol. 1, Masson, París, (1989).

[15] Lions, J.L, *Quélques Méthodes de resolution de Problémes aux Limites non Lineares.* Dunod Gauthiers Villars, París, (1969).

[16] Milla Miranda, M, *Traço para o dual dos Espaços de Sobolev,* Bol. Soc. Paran. Mat. (2a série), Vol. 11 nº 2, (1990), pág. 131- 157.

[17] Milla Miranda, M & Medeiro, L.A, *On a boundary Value Problem for Wave Equations: existence, uniqueness and asymptotic behavour,* Rev. Mat. Apli. Univerisidad de Chile, 17:47 - 73, (1996).