PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. VII, N° 2, pag. 17 - 38, LIMA-PERÚ. Julio 2004

MÉTODOS VARIACIONALES EN LA RECUPERACIÓN DE IMÁGENES

Víctor Osorio Vidal[1]

RESUMEN.- *Se estudia la minimización de funcionales semicuadráticos de la forma*

$$J_\alpha(f) = \int_\Omega (p - Rf)^2 \, dxdy + \alpha \int_\Omega \phi\left(|\nabla q|\right) dxdy$$

El funcional en mención aparece en los problemas de recuperación de imágenes cuando una imagen considerada como una función $f : \Omega \subset \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$, que describe una escena real, es observada y reproducida como una función $p : \Omega \subset \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$.

PALABRAS CLAVE.- *Recuperación de imágenes, funcionales semicuadráticas, Métodos variacionales convexidad.*

VARIATIONAL METHODS IN IMAGE RECOVERY

ABSTRACT.- *We study the semicuadratic minimization problem of the form*

$$J_\alpha(f) = \int_\Omega (p - Rf)^2 \, dxdy + \alpha \int_\Omega \phi\left(|\nabla q|\right) dxdy$$

this functional arises in image recovery problems, when a image that describe a real scene, consider like a function $f : \Omega \subset \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$, is observed and reproduced like a function $p : \Omega \subset \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$.

KEYWORDS.- *Imagen recovery, semicuadratic functionals, variational Methods, convexity.*

1. INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se estudia la minimización de funcionales semicuadráticos de la forma

$$J_\alpha(f) = \int_\Omega (p - Rf)^2 dxdy + \alpha \int_\Omega \phi\left(|\nabla f|\right) dxdy$$

---

[1] *Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas - UNMSM.*

variando f en el conjunto $\left\{ f \in L^2(\Omega) / \nabla f \in L^1(\Omega) \times L^1(\Omega) \right\}$ que es un subespacio de $L^2(\Omega)$. Con este fin se aplican los métodos variacionales, en particular las técnicas de minimización de funcionales convexas, semicontinuas inferiormente y coercivas, luego se hace uso de los resultados clásicos de compacidad (débil, débil*) y de los procesos de diagonalización, con los que se establecen los resultados de existencia, regularidad y acotación para la solución del problema planteado.

El funcional citado aparece en los problemas de recuperación de imágenes cuando una imagen considerada como una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que describe una escena real, es observada y reproducida como una función $p : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. En el proceso de captación de la imagen f, ésta sufre una degradación y es vista como p. El modelo de degradación más común es el lineal de la forma

$$p - Rf = \eta.$$

Donde R es un operador lineal y η representa el error o ruido.

Se establece la existencia de una función $f \in \left\{ f \in L^2(\Omega) / \nabla f \in L^1(\Omega) \times L^1(\Omega) \right\}$ que minimiza la funcional $J_\alpha(f)$. Imponiendo condiciones adicionales a la función p se deduce la acotación y cierta regularidad para la función minimizante.

2. PRELIMINARES

Considerando $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función que describe una escena real, que es observada y reproducida como una función $p : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. En el proceso de captación de la imagen f, ésta puede sufrir una degradación y ser vista como p. El modelo de degradación más común es el lineal, es decir, se tiene la siguiente ecuación

$$p - Rf = \eta \tag{1}$$

donde R es un operador lineal y η el error o ruido.

La ecuación (1) plantea dos problemas: primero, el espacio de funciones en que tiene sentido dicha ecuación y en segundo lugar la posibilidad de hallar f de modo que sea lo menor posible. Entonces el modelo propuesto en (1), permite buscar una solución como el mínimo del funcional de energía

$$J_\alpha(f) = \int_\Omega (p(x,y) - (Rf)(x,y))^2 \, dxdy + \alpha \int_\Omega \phi\left(\left|\nabla f(x,y)\right|\right) dxdy. \tag{2}$$

Donde R es un operador lineal de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$, la primera integral representa un término ligado al dato, y $\Phi(f) = \int_{\Omega} \phi\left(\left|\nabla f(x,y)\right|\right) dxdy$ es el término de regularización, $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es la función de regularización y $\alpha \in R^+$ es un parámetro que permite equilibrar la influencia de cada integral en la funcional $J_\alpha(f)$. Por ejemplo, si $\alpha = 0$, $J_\alpha(f)$ es

$$J_0(f) = \int_{\Omega} (p(x,y) - (Rf)(xy))^2 \, dxdy \tag{3}$$

y de esta manera la funcional queda reducida sólo al término ligado a los datos del problema. El problema de minimización del funcional $J_0(f)$, esto es; hallar el

$$\inf_{f \in L^2(\Omega)} J_0(f). \tag{4}$$

Las hipótesis que se imponen a ϕ son las siguientes:

(H1) La función $\phi : R^+ \to R^+$ es de clase C^2, no decreciente, y satisface

$$\phi'(0) = 0 \quad \text{y} \quad \phi''(0) > 0 .$$

(H2) Además tiene la propiedad

$$\lim_{t \to +\infty} \phi''(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\phi'(t)}{t} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{\phi''(t)}{\frac{\phi'(t)}{t}} = 0$$

(H3) Existen constantes $a_i > 0$ y $b_i \geq 0$, $i = 1, 2,$ tal que

$$a_1 t - b_1 \leq \phi(t) \leq a_2 t + b_2 ; \ \forall \ t \in R^+$$

(H4) La función $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es estrictamente convexa.

Será necesario definir la función ϕ sobre todo $\mathbb{R}$, para este fin se extiende ϕ por paridad a todo $\mathbb{R}$.

Existen muchas funciones ϕ que cumplen (H1) - (H4), sin embargo no existe ningún criterio para la elección de p. Un ejemplo de esta clase de funciones es $\phi(t) = \sqrt{1+t^2}$ la cual verifica (H1) - (H4).

3. REDUCCIÓN DE FUNCIONALES A FUNCIONALES SEMICUADRÁTICAS.

Veamos como el funcional de regularización

$$L_\phi(f) = \int_\Omega \phi\left(|\nabla f|\right) dxdy \tag{5}$$

puede ser representado por el ínfimo de las funciones cuadráticas. Para esto, haremos uso de la transformada de Fenchel – Legendre (o polar). Si $l : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, entonces, su transformada de Fenchel – Legendre es la función convexa $l^*(\xi^*)$ definida por

$$l^*(\xi^*) = \underset{\xi\in\mathbb{R}^N}{Sup}\left\{\langle \xi, \xi^* \rangle - l(\xi)\right\} \tag{6}$$

donde $\langle \xi , \xi^* \rangle$ es el producto escalar usual. Esta definición puede ser extendida, sin dificultad, a los espacios $L^p_N = L^p(\Omega)\times\ldots\times L^p(\Omega)$ (N veces) y su dual $\left(L^p_N\right)^* = L^{p^*}(\Omega)\times\ldots\times L^{p^*}(\Omega)$ (N veces) donde Ω es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$.

Funcionales auxiliares Φ y Ψ.

Usaremos la noción de polaridad en nuestro problema con $N = 2$, $p = p^* = 2$.

Para ξ, $\xi^* \in \mathbb{R}^2$, definimos las funciones:

$$l(\xi) = \frac{|\xi|^2}{2} - \phi(|\xi|) \tag{7}$$

$$\psi(\xi^*) = l^*(\xi^*) - \frac{|\xi^*|^2}{2}. \tag{8}$$

Así como las funcionales definidas sobre $L^2_2 = L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ por

$$\Phi(u) = \int_\Omega \phi(|u(x,y)|)dxdy \tag{9}$$

la relación (9) se puede escribir como

$$\Phi(u(x,y)) = \int_\Omega\left(\frac{\langle\ u(x,y),\ \ u(x,y)\ \rangle}{2} - l(u(x,y))\right)dxdy$$

$$\Psi(v)=\int_{\Omega}\psi(v(x,y))dxdy. \tag{10}$$

El siguiente teorema cuya demostración se encuentra en Osorio [5] Pág.67 establece que Φ y Ψ son duales en cierto sentido.

Teorema 3.1.

La función ϕ (extendida por paridad sobre $\mathbb{R}$) verifica las hipótesis:

(H3) Existen constantes $a_i > 0$ y $b_i \geq 0$, $i=1,2$, tal que

$$a_1|t|-b_1 \leq \phi(t) \leq a_2|t|+b_2 \quad ; \quad \forall \ t \in \mathbb{R};$$

(H5) La función $t \to \dfrac{t^2}{2} - \phi(t)$ es convexa sobre $\mathbb{R}$. Entonces

$$\Phi(u) = \int_{\Omega}\phi\left(|u(x,y|\right)dxdy = \inf_{v\in L_2^2}\int_{\Omega}\left(\frac{|u-v|^2}{2}+\psi(v)\right)dxdy \tag{11}$$

$$\Psi(v) = \int_{\Omega}\psi(v(x,y))dxdy = \underset{u\in L_2^2}{Sup}\int_{\Omega}\left(-\frac{|u-v|^2}{2}+\phi(|u|)\right)dxdy. \tag{12}$$

Se observó de la condición (H3) para ϕ que la solución debe buscarse en el espacio

$$v=\left\{ f\in L^2(\Omega),\ \nabla f\in L^1(\Omega)^2\right\} \subset H^1(\Omega).$$

Para usar la dualidad, buscaremos una solución f en el espacio $H^1(\Omega)$.

Usando la relación (11),

$$J_\alpha(f)=\int_{\Omega}(p-Rf)^2\,dxdy+\alpha\int_{\Omega}\phi(|\nabla q|)\,dxdy$$

se escribe, para , $f\in H^1(\Omega)$ como

$$J_\alpha(f)=\int_{\Omega}(p-Rf)^2dxdy+\alpha\inf_{b\in L_2^2}\int_{\Omega}\left(\frac{|\nabla f-b|^2}{2}+\psi(b)\right)dxdy.$$

Luego, tomando ínfimos

$$\inf_{f\in H^1(\Omega)}J_\alpha(f)=\inf_{f\in H^1(\Omega)}\ \inf_{b\in L_2^2}\left[\int_{\Omega}(p-Rf)^2dxdy+\alpha\int_{\Omega}\left(\frac{|\nabla f-b|^2}{2}+\psi(b)\right)dxdy\right].$$

Reordenando e invirtiendo los ínfimos se obtiene

$$\inf_{f\in H^1(\Omega)} J_\alpha(f)=\inf_{b\in L_2^2}\left[\alpha\int_\Omega \psi(b)dxdy+\inf_{f\in H^1(\Omega)}\int_\Omega\left((p-Rf)^2+\alpha\frac{|\nabla f-b|^2}{2}\right)dxdy.\right. \quad (13)$$

Ahora, fijando $b\in L_2^2$ se resuelve el problema

$$\inf_{f\in H^1(\Omega)}\left[\int_\Omega\left((p-Rf)^2+\alpha\frac{|\nabla f-b|^2}{2}\right)dxdy\right]. \quad (14)$$

4. TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

Para simplificar, supondremos que $R=I$ sobre $L^2(\Omega)$ y $\alpha=1$, lo cual no modifica el estudio teórico del problema. En consecuencia, el funcional que se estudiará es

$$J(f)=\int_\Omega (p-f)^2 dxdy+\int_\Omega \phi(|\nabla f|)\,dxdy. \quad (15)$$

Asumiendo las hipótesis:

($\widehat{H}1$) $p\in L^\infty(\Omega)$ y $0\le p(x,y)\le 1$ acotado en casi todo punto (a.e) $(x,y)\in\Omega$.

($\widehat{H}2$) $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es par, de clase C^2, no decreciente sobre $\mathbb{R}^+$, y existen constantes

$a_i>0,\, b_i\ge 0,\, i=1,2,$ tal que

$$a_1|t|-b_1\le\phi(t)\le a_2|t|+b_2,\ \forall\, t\in\mathbb{R},$$

($\widehat{H}3$) $0<\phi''(t)<1,\ \forall\, t\in\mathbb{R}$.

Proposición 4.1.

Para b fijo en L_2^2 *y para p* satisfaciendo ($\widehat{H}1$), el problema

$$J(f)=\inf_{f\in H^1(\Omega)}\int_\Omega\left((p-f)^2+\frac{|b-\nabla f|^2}{2}\right)dxdy \quad (16)$$

tiene una única solución $f_b\in H^1(\Omega)$; *verificando la ecuación de Euler*

$$-\Delta f_b+2f_b=2p-div\, b \text{ en } D'(\Omega). \quad (17)$$

Prueba.

Ver Osorio [5], Pág. 73.

De la proposición 4.1, tenemos que; para cada $b \in L_2^2$ existe un único f_b tal que

$$J_b(f_b) \leq J_b(f)\,; \quad \forall\ f \in H^1(\Omega);$$

lo cual es equivalente a escribir

$$\int_\Omega (f_b - p)^2 dxdy + \int_\Omega \frac{|b - \nabla f_b|^2}{2}\, dxdy \leq \int_\Omega (f - p)^2 dxdy + \int_\Omega \frac{|b - \nabla f|^2}{2}\, dxdy \quad (18)$$

Adicionando $\psi(b)$ a ambos miembros de la desigualdad (18) y tomando el ínfimo cuando b recorre L_2^2 para todo $f \in H^1(\Omega)$, obtenemos,

$$\inf_{b\in L_2^2} \int_\Omega ((f_b - p)^2 + \int_\Omega \frac{|b - \nabla f_b|^2}{2} + \psi(b))\, dxdy \leq \inf_{b\in L_2^2} \int_\Omega ((f - p)^2 + \int_\Omega \frac{|b - \nabla f|^2}{2} + \psi(b))\, dxdy$$

$$\leq \int_\Omega \Big((f - p)^2 + \phi\left(|\nabla f|\right)\Big)\, dxdy = J(f). \quad (19)$$

Denotando

$$T(b) = \int_\Omega ((f_b - p)^2 + \frac{1}{2}|b - \nabla f_b|^2 + \psi(b)\ )dxdy = J_b(f_b) + \int_\Omega \psi(b)dxdy$$

ahora es necesario probar que el problema $\inf\limits_{b\in L_2^2} T(b)$ tiene una solución b_0, la cual involucra la existencia de una función f_0; solución del problema inicial

$$J(f_0) \leq J(f)\,,\ \forall f \in v.$$

En primer lugar, estableceremos algunas propiedades de la función dual ψ.

Lema 4.2.

Si ϕ verifica $(\widehat{H}2)$ y $(\widehat{H}3)$, entonces la función ψ definida en (8) goza de las siguientes propiedades:

i) $\xi^* \to \psi(\xi^*)$ es estrictamente convexa.

ii) Existen constantes $a_i' > 0$ y $b'_i \geq 0$; tal que

$$a'_1\left|\xi^*\right| - b'_1 \leq \psi(\xi^*) \leq a'_2\left|\xi^*\right| + b'_2\,;\ \forall \xi^* \in \mathbb{R}^2$$

Prueba.

Ver Osorio [5], Pág. 76.

Si b_n es una sucesión minimizante, entonces es simple deducir de (18) y (19) que b_n y f_{b_n} verifican las restricciones

$$\|f_{b_n}\|_{L_1^2} \leq c \quad \text{y} \quad \|b_n\|_{L_2^1} \leq c,$$

donde c es una constante que sólo depende de los datos. Pero no es posible obtener una estimación para f_{b_n} en la norma de $H^1(\Omega)$ y para b_n en $L^2(\Omega)^2$. Por tanto, debemos trabajar sobre el espacio no reflexivo $L^1(\Omega)$ o sobre el espacio de medidas acotadas $M_b(\Omega)$.

Para superar esta dificultad, regularizamos el problema haciendo una ligera modificación sobre el potencial ϕ.

Definimos la función

$$\phi_\varepsilon(t) = \phi(t) + \frac{\varepsilon}{2}\, t^2, \quad \varepsilon > 0,$$

con la cual asociamos las funciones

$$l_\varepsilon(\xi) = \frac{|\xi|^2}{2} - \phi_\varepsilon(|\xi|),$$

$$\psi_\varepsilon(\xi^*) = l_\varepsilon^*(\xi^*) - \frac{|\xi^*|^2}{2}.$$

La función ψ_ε tiene la mismas propiedades de ψ. En efecto, ϕ_ε es par y de clase C^2. Además, es no decreciente en $\mathbb{R}^+$.

Si modificamos la condición ($\widehat{H}3$) reemplazándola por

($\widehat{H}3$) Existe ε_0, con $0 < \varepsilon_0 < 1$, tal que, $0 < \phi''(t) < 1 - \varepsilon_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. (20)

Esta condición no es restrictiva, por que siempre podemos cambiar el parámetro de carga en la energía $J_\alpha(f)$.

Con las consideraciones anteriores enunciamos la siguiente proposición.

Proposición 4.3.

Si ϕ_ε verifica la condición (20), entonces

i) Para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, la función $\xi^* \to \psi_\varepsilon(\xi^*)$ es estrictamente convexa,

$$ii)\quad -b_1 + \frac{a_1^2}{2(1-\varepsilon)} + \frac{a_1}{1-\varepsilon}\left|\xi^*\right| + \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}\left|\xi^*\right|^2 \le \psi_\varepsilon(\xi^*)$$

$$\le b_2 + \frac{a_2^2}{2(1-\varepsilon)} + \frac{a_2}{1-\varepsilon}\left|\xi^*\right| + \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}\left|\xi^*\right|^2 .$$

Prueba.

Ver Osorio [5], Pág. 82.

El problema regularizado asociado con $T(b)$ es

$$\inf_{b\in L_2^2}\left\{T_\varepsilon(b) = \int_\Omega\left((f_b-p)^2 + \frac{|b-\nabla f_b|^2}{2} + \psi_\varepsilon(b) + \frac{\varepsilon|b|^2}{2}\right)dxdy\right\} \tag{21}$$

para el cual establecemos la siguiente proposición.

Proposición 4.4.

Sea $\phi_\varepsilon(t)=\phi(t)+\frac{\varepsilon}{2}t^2$, *donde* $\phi(t)$ *satisface las condiciones (H3) y (H5) y sean las funciones asociadas*

$$l_\varepsilon(\xi) = \frac{|\xi|^2}{2} - \phi_\varepsilon(|\xi|)\ ,\ \ \Phi_\varepsilon(u)=\int_\Omega \phi_\varepsilon(|u(x,\ y)|)dxdy \ \text{ y } \ \Psi_\varepsilon(u)=\int_\Omega \psi_\varepsilon(b(x,y))dxdy.$$

Entonces,

$$\Phi_\varepsilon(u) = \inf_{v\in L_2^2}\int_\Omega\left(\frac{|u-v|^2}{2} + \psi_\varepsilon(v)\right)dxdy \tag{22}$$

$$\Psi_\varepsilon\ (v) = \operatorname*{Sup}_{u\in L_2^2}\int_\Omega\left(-\frac{|u-v|}{2} + \phi_\varepsilon\left(|u|\right)\right)dxdy \tag{23}$$

Prueba.

Ver Osorio [5], Pág. 84.

Proposición 4.5.

Bajo las asunciones $(\widehat{H}1)$, $(\widehat{H}2)$ *y (20), el problema (21) tiene una única solución* b_ε *y existe una constante c, independiente de* ε, *tal que*

$$\begin{cases} \varepsilon\|b_\varepsilon\|_{L_2^2}^2 & \leq c \\ \varepsilon\left\|\nabla f_{b_\varepsilon}\right\|_{L_2^2}^2 & \leq c \\ \|b_\varepsilon\|_{L_2^1} & \leq c \\ \left\|f_{b_\varepsilon}\right\|_{L_1^2} & \leq c \end{cases} \tag{24}$$

Prueba.

Afirmamos que el funcional $T_\varepsilon(b)$ es estrictamente convexo, para esto probaremos que:

a) $J_b(f) = \int_\Omega \left(|f-p|^2 + \dfrac{|b-\nabla f|^2}{2} \right) dxdy$ es estrictamente convexo.

b) La aplicación $b \to f_b$ es afín de $L^2(\Omega)$ a $H^1(\Omega)$ y

c) $\Lambda(b) = \int_\Omega \psi_\varepsilon(b)\, dxdy$ es estrictamente convexa.

En efecto:

a) $J_b(f)$ es estrictamente convexa.

Pues $g(t) = t^2$ es estrictamente convexa por que

$\left[ta + (1-t)b\right]^2 < ta^2 + (1-t)b^2;\ \ 0 < t < 1$

$\Leftrightarrow\ t^2a^2 + (1-t)^2 b^2 + 2t(1-t)ab < ta^2 + (1-t)b^2$

$\left(t^2 - t\right)a^2 + \left[(1-t)^2 - (1-t)\right]b^2 + 2t(1-t)ab < 0$

$(1-t)\left[-ta^2 - tb^2 + 2tab\right] < 0$

$-t(1-t)(a-b)^2 < 0\ ;\quad \forall t \in <0,\ 1>.$

De aquí,

$$J_b\left(tf_1 + (1-t)f_2\right) = \int_\Omega \left[\left|tf_1 + (1-t)f_2 - p\right|^2 + \frac{\left|b - \nabla\left(tf_1 + (1-t)f_2\right)\right|^2}{2} \right]$$

$$= \int_\Omega \left| t(f_1 - p) + (1-t) \right|^2 + \frac{\left| t(b - \nabla f_1) + (1-t)(b - \nabla f_2) \right|^2}{2}$$

$$\leq \int_\Omega t|f_1 - p|^2 + (1-t)|f_2 - p|^2 + \frac{t|b - \nabla f_1|^2}{2} + (1-t)\frac{|b - \nabla f_2|^2}{2}$$

$$= tJ_b(f_1) + (1-t)J_b(f_2).$$

Asi,

$J_b\left(t f_1+(1-t) f_2\right) \leq t J_b\left(f_1\right)+(1-t) J_b(f_2)$, **es estricto cuando** $0<t<1$.

b) Las funciones $b_i \rightarrow f_{b_i}$, $i=1,2$ satisfacen la ecuación de Euler, esto es

$$-\Delta f_{b_i}+2 f_{b_i}=2 p-div\ b_i$$

Entonces,

$$-\Delta t\, f_{b_1}+2 t\, f_{b_1}=2 t p-div\ (t b_1) \tag{25}$$

$$-\Delta(1-t) f_{b_2}+2(1-t) f_{b_2}=2(1-t) p-div\ ((1-t) b_2). \tag{26}$$

Sumando (25) y (26)

$$-\Delta[t\, f_{b_1}+(1-t) f_{b_2}]+2[t\, f_{b_1}+(1-t) f_{b_2}]=2 p-div\ \ [t b_1+(1-t) b_2].$$

Luego,

$$\gamma=t\, b_1+(1-t) b_2 \rightarrow\ t\, f_{b_1}+(1-t) f_{b_2}$$

como,

$$\inf_f J_b(f)=J_b(f_b) \Leftrightarrow -\Delta f_b+2 f_b=2 p-div(b).$$

Entonces,

$$J_\gamma(f_\gamma)=J_\gamma(t\, f_{b_1}+(1-t) f_{b_2}),$$

donde $\gamma=t b_1+(1-t) b_2$.

Pero, la ecuación de Euler tiene una única solución, entonces

$f_{t b_1+(1-t) b_2}=t\, f_{b_1}+(1-t) f_{b_2}$ y como $J_r(f)$ es estrictamente convexa, entonces

$$J_\gamma(t\, f_{b_1}+(1-t) f_{b_2})<t J_\gamma(f_{b_1})+(1-t) J_\gamma(f_{b_2}).$$

c) $\Lambda(b)=\int_{\Omega} \psi_{\varepsilon}(b)$ es estrictamente convexo por que ψ_{ε} lo es.

Finalmente, probaremos que $T_\varepsilon(b)$ es estrictamente convexo,

$$T_{\varepsilon}\left(t b_1+(1-t) b_2\right)=J_\gamma\left(f_\gamma\right)+\Lambda(\gamma), \text{ donde } \gamma=t b_1+(1-t) b_2$$

$$T_\varepsilon\left(tb_1+(1-t)b_2\right)=\int\left|f_\gamma-p\right|^2+\frac{\left|\gamma-\nabla f_\gamma\right|^2}{2}+\Delta,\ \text{donde } \Delta=t\Lambda(b_1)+(1-t)\Lambda(b_2)$$

$$=\int_\Omega\left|tf_{b_1}+(1-t)f_{b_2}-p\right|^2+\frac{\left|\gamma-\nabla\left(tf_{b_1}+(1-t)f_{b_2}\right)\right|^2}{2}+\Delta$$

$$=\int_\Omega\left|tf_{b_1}+(1-t)f_{b_2}-p\right|^2+\frac{\left|tb_1+(1-t)b_2-\nabla\left(tf_{b_1}+(1-t)f_{b_2}\right)\right|^2}{2}+\Delta$$

$$=\int_\Omega\left|t\left(f_{b_1}-p\right)+(1-t)\left(f_{b_2}-p\right)\right|^2+\frac{\left|t\left(b_1-\nabla f_{b_1}\right)+(1-t)\left(b_2-\nabla f_{b_2}\right)\right|^2}{2}+\Delta$$

$$=\int_\Omega\left|t\left(f_{b_1}-p\right)+(1-t)\left(f_{b_2}-p\right)\right|^2+\frac{\left|t\left(b_1-\nabla f_{b_1}\right)+(1-t)\left(b_2-\nabla f_{b_2}\right)\right|^2}{2}+\Delta$$

$$=t\int_\Omega\left|f_{b_1}-p\right|^2+\frac{\left|b_1-\nabla f_{b_1}\right|^2}{2}+(1-t)\int_\Omega\left|f_{b_2}-p\right|^2+\frac{\left|b_2-\nabla f_{b_2}\right|^2}{2}+\Delta$$

$$=tJ_{b_1}\left(f_{b_1}\right)+(1-t)J_{b_2}\left(f_{b_2}\right)+\Delta;\ \text{donde } \Delta=t\Lambda(b_1)+(1-t)\Lambda(b_2).$$

Entonces,

$$T_\varepsilon\left(tb_1+(1-t)b_2\right)\le t\left[J_{b_1}\left(f_{b_1}\right)+\Lambda(b_1)\right]+(1-t)\left[J_{b_2}\left(f_{b_2}\right)+\Lambda(b_2)\right]$$

$$T_\varepsilon\left(tb_1+(1-t)b_2\right)\le tT_\varepsilon(b_1)+(1-t)T_\varepsilon(b_2),$$

estrictamente convexa si $0<t<1$.

Sabiendo que $T_\varepsilon(b)$ es estrictamente convexo, probaremos la afirmación de la proposición.

De la parte ii) de la proposición 4.3, para cada $b\in L^2(\Omega)^2$ existen constantes $a'_1>0$ y b'_1 tales que,

$$\frac{\varepsilon}{2}\|b\|^2_{L^2_2}\ +\ a'_1\|b\|_{L^1_2}\ -\ b'_1\ \le\ T_\varepsilon(b).$$

Por lo tanto, para ε fijo, la sucesión minimizante b^n_ε de (21) está acotada en $L^2(\Omega)^2$. Por consiguiente, existe $b_\varepsilon\in L^2(\Omega)^2$; y una subsucesión denotada también por b_ε, tal que, $b^n_\varepsilon \xrightarrow{w} b_\varepsilon$ en $L^2(\Omega)$ débilmente.

Debido a la convexidad estricta de T_ε, b_ε es única, y toda la sucesión b^n_ε converge a b_ε. Además,

$$T_\varepsilon(b_\varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} T_\varepsilon(b_\varepsilon^n) = \inf T_\varepsilon(b) \leq T_\varepsilon(b) \quad ; \quad \forall \ b \in L_2^2.$$

Así , b_ε es la única solución de (21)

$$\int_\Omega \left((f_{b_\varepsilon} - p)^2 + \frac{\left|b_\varepsilon - \nabla f_{b_\varepsilon}\right|^2}{2} + \psi_\varepsilon(b_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}\left|b_\varepsilon\right|^2 \right) dxdy \tag{27}$$

$$\leq \int_\Omega \left((f_b - p)^2 + \frac{\left|b - \nabla f_b\right|^2}{2} + \psi_\varepsilon(b) + \frac{\varepsilon}{2}|b|^2 \right) dxdy, \ \forall \ b \in L_2^2.$$

Eligiendo, por ejemplo, $b = 0$ en (24) es claro que; existe una constante c independiente de ε, tal que (22) se verifica.

El siguiente teorema deriva la condición de optimalidad satisfecha por b_ε.

Teorema 4.6.

La solución b_ε del problema (21) verifica la condición de optimalidad

$$b_\varepsilon + \nabla \psi_\varepsilon(b_\varepsilon) - \nabla f_{b_\varepsilon} = 0 \ \textit{ en casi todo punto de } \Omega. \tag{28}$$

Prueba.

Para simplificar las notaciones, denotamos $f_\varepsilon = f_{b_\varepsilon}$; entonces consideramos una variación de b_ε de la forma $b_\theta = b_\varepsilon + \theta q$, donde $\theta \in \mathbb{R}$ y $q \in L_2^2$. Denotando $f_\theta = f_{b_\theta}$, es claro, gracias a la linealidad de la fórmula (17), que

$$f_\theta = f_\varepsilon + \theta h \tag{29}$$

donde h verifica

$$-\Delta h + 2h = -div\, q \ \text{ en } H^1(\Omega)' \text{ (el dual de } H^1(\Omega)\text{)}. \tag{30}$$

Con esta observación,

$$T_\varepsilon(b_\theta) = \int_\Omega \left(\left(f_{b_\theta} - p\right)^2 + \frac{\left|b_\theta - \nabla f_\theta\right|^2}{2} + \psi_\varepsilon(b_\theta) \right) dxdy$$

$$= \int_\Omega \left(\left((f_\varepsilon + \theta h) - p\right)^2 + \frac{\left|(b_\varepsilon + \theta q) - \nabla(f_\varepsilon + \theta h)\right|^2}{2} + \psi_\varepsilon(b_\varepsilon + \theta) \right) dxdy.$$

$$T_\varepsilon(b_\varepsilon) = \int_\Omega \left((f_\varepsilon - p)^2 + \frac{\left|b_\varepsilon - \nabla f_\varepsilon\right|^2}{2} + \psi_\varepsilon(b_\varepsilon) \right) dxdy.$$

Cuando hacemos $T_\varepsilon(b_\theta)-T_\varepsilon(b_\varepsilon)$ se tiene en el integrando las siguientes diferencias

(1) $\left[(f_\varepsilon+\theta h)-p\right]^2-(f_\varepsilon-p)^2=2\theta f_\varepsilon h+\theta^2h^2-2\theta hp=\theta(2f_\varepsilon-2p+\theta h)h$

(2) $\left|(b_\varepsilon+\theta q)-\nabla(f_\varepsilon+\theta h)\right|^2-\left|b_\varepsilon-\nabla f_\varepsilon\right|^2=$

$$
\begin{aligned}
&=\langle b_\varepsilon+\theta q-\nabla(f_\varepsilon+\theta h)\ ,\ b_\varepsilon+\theta q-\nabla(f_\varepsilon+\theta h)\ \rangle-\langle b_\varepsilon-\nabla f_\varepsilon\ ,\ b_\varepsilon-\nabla f_\varepsilon\ \rangle\\
&=\langle(b_\varepsilon-\nabla f_\varepsilon)+\theta(q-\nabla h)\ ,\ (b_\varepsilon-\nabla f_\varepsilon)+\theta(q-\nabla h)\rangle-\langle b_\varepsilon-\nabla f_\varepsilon\ ,\ b_\varepsilon-\nabla f_\varepsilon\rangle\\
&=\langle\ b_\varepsilon-\nabla f_\varepsilon\ ,\ b_\varepsilon-\nabla f_\varepsilon\ \rangle+\langle\ b_\varepsilon-\nabla f_\varepsilon\ ,\ \theta(q-\nabla h)\ \rangle+\langle\theta(q-\nabla h)\ ,\ b_\varepsilon-\nabla f_\varepsilon\ \rangle+\\
&\qquad+\langle\theta(q-\nabla h)\ ,\ \theta(q-\nabla h)\rangle-\langle b_\varepsilon-\nabla f_\varepsilon\ ,\ b_\varepsilon-\nabla f_\varepsilon\rangle\\
&=2\theta\langle b_\varepsilon-\nabla f_\varepsilon\ ,\ q-\nabla h\ \rangle+\theta^2\langle q-\nabla h,\ q-\nabla h\ \rangle\\
&=\theta\langle 2b_\varepsilon-2\nabla f_\varepsilon\ +\theta(q-\nabla h)\ ,\ q-\nabla h\rangle.
\end{aligned}
$$

(3) $\psi_\varepsilon(b_\varepsilon+\theta q)-\psi_\varepsilon(b_\varepsilon)$.

Luego,

$$
\begin{aligned}
\Delta=\frac{T_\varepsilon(b_\theta)\ -\ T_\varepsilon(b_\varepsilon)}{\theta}&=\frac{1}{\theta}\left\{\int_\Omega\theta(2f_\varepsilon-2p+\theta h)h\,dxdy+\int_\Omega\theta\,\langle 2b_\varepsilon-2\nabla f_\varepsilon+\theta(q-\nabla h),\,q-\nabla h\rangle\,dxdy\right\}\\
&\quad+\frac{1}{\theta}\int_\Omega(\psi(b_\varepsilon+\theta q)\ -\ \psi(b_\varepsilon))\ dxdy\\
&=\int_\Omega(2f_\varepsilon-2p+\theta h)h\,dxdy+\int_\Omega\langle 2b_\varepsilon-2\nabla f_\varepsilon+\theta(q-\nabla h),\,q-\nabla h\rangle\,dxdy\\
&\quad+\frac{1}{\theta}\int_\Omega(\psi(b_\varepsilon+\theta q)\ -\ \psi(b_\varepsilon))\ dxdy.
\end{aligned}
$$

Por el teorema de Tahraoui, en la tercera integral el gradiente de $\nabla\psi_\varepsilon(b_\varepsilon)$ (Osorio [5], Pág. 42) satisface las condiciones para la convergencia dominada de Lebesgue. Tomando límite cuando $\theta\to 0$, el cociente incremental Δ converge a

$$
2\int_\Omega(f_\varepsilon-p)h+\langle b_\varepsilon-\nabla f_\varepsilon,\,q-\nabla h\rangle\,dxdy\ +\int_\Omega\lim_{\theta\to 0}\left[\frac{\psi_\varepsilon(b_\varepsilon+\theta q)-\psi_\varepsilon(b_\varepsilon)}{\theta}\right]dxdy.
$$

Esto es,

$$
\lim_{\theta\to 0}\Delta=2\int_\Omega(f_\varepsilon-p)h+\langle b_\varepsilon-\nabla f_\varepsilon,\,q-\nabla h\rangle\,dxdy+\int_\Omega\langle\nabla\psi_\varepsilon(b_\varepsilon),\,q\rangle\,dxdy
$$

$$
2\int_\Omega(f_b-p)\,f=\int_\Omega\langle\nabla f_b-b,\,\nabla f_\varepsilon\rangle\,dxdy.
$$

Tomando $f=h$ y $f_b=f_\varepsilon$, se tiene

$$2\int_\Omega (f_\varepsilon - p)\, h\, dxdy = \int_\Omega \langle \nabla f_\varepsilon - b_\varepsilon, \nabla h\rangle\, dxdy\,.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0} \Delta &= -\int_\Omega \langle \nabla f_\varepsilon - p, \nabla h\rangle\, dxdy + 2\int_\Omega \langle b_\varepsilon - \nabla f_\varepsilon,\, q - \nabla h\rangle\, dxdy + \int_\Omega \langle \nabla \psi_\varepsilon\left(b_\varepsilon\right), q\rangle\, dxdy \\
&= \int_\Omega \left[\langle b_\varepsilon - \nabla f_\varepsilon, \nabla h\rangle + 2\langle b_\varepsilon - \nabla f_\varepsilon, q - \nabla h\rangle\right] dxdy + \int_\Omega \langle \nabla \psi_\varepsilon\left(b_\varepsilon\right), q\rangle\, dxdy \\
&= \int_\Omega \langle b_\varepsilon - \nabla f_\varepsilon, \nabla h + 2q - 2\nabla h\rangle\, dxdy + \int_\Omega \langle \nabla \psi_\varepsilon\left(b_\varepsilon\right), q\rangle\, dxdy \\
&= \int_\Omega \langle b_\varepsilon - \nabla f_\varepsilon, -\nabla h + 2q\rangle\, dxdy + \int_\Omega \langle \nabla \psi_\varepsilon\left(b_\varepsilon\right), q\rangle\, dxdy.
\end{aligned}$$

Luego, como $\Delta h = div\ q$, entonces

$$-\nabla h = -q$$

y de aquí,

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0} \Delta &= \int_\Omega \langle b_\varepsilon - \nabla f_\varepsilon, q\rangle\, dxdy + \int_\Omega \langle \nabla \psi_\varepsilon\left(b_\varepsilon\right), q\rangle\, dxdy \\
&= \int_\Omega \langle b_\varepsilon - \nabla f_\varepsilon + \nabla \psi_\varepsilon\left(b_\varepsilon\right), q\rangle\, dxdy.
\end{aligned}$$

Pero como

$$\Delta = \frac{T_\varepsilon(b_\theta) - T_\varepsilon(b_\varepsilon)}{\theta} = \frac{T_\varepsilon(b_\varepsilon + \theta q) - T_\varepsilon(b_\varepsilon)}{\theta}$$

$\lim\limits_{\theta\to 0} \Delta = 0$ por que b_ε es punto crítico de T_ε

$$\Rightarrow \int_\Omega \langle b_\varepsilon - \nabla f_\varepsilon + \nabla \psi_\varepsilon\left(b_\varepsilon\right), q\rangle\, dxdy = 0;\ \forall\, q \in (L^2(\Omega))^2\,.$$

De aquí obtenemos,

$$b_\varepsilon \ -\nabla f_\varepsilon \quad +\nabla \psi_\varepsilon \ \left(b_\varepsilon\right) = 0 \quad \text{en casi todo punto de } \Omega \tag{31}$$

que es la relación que deseábamos.

En el siguiente corolario, expresamos $\nabla \psi_\varepsilon(b_\varepsilon)$ en términos de ∇f_ε y $\phi'(|\nabla f_\varepsilon|)$.

Corolario 4.7.

La condición de optimalidad (31) puede ser escrito como

$$b_\varepsilon = \left((1-\varepsilon) - \frac{\phi'(|\nabla f_\varepsilon|)}{|\nabla f_\varepsilon|} \right) \nabla f_\varepsilon . \tag{32}$$

Prueba.

Sabemos que

$$l_\varepsilon(\xi) = \frac{|\xi|^2}{2} - \phi(|\xi|) - \frac{\varepsilon}{2}|\xi|^2 ,$$

Por ($\widehat{H}2$) y (20), la función l_ε es estrictamente convexa; por lo tanto, l_ε^* es diferenciable.

Además, $l_\varepsilon^*(\xi^*) = \underset{\xi}{Sup} \; (\langle \xi^*, \xi \rangle - l_\varepsilon(\xi))$, luego $l_\varepsilon^*(\xi^*) = \langle \xi^*, \xi_\varepsilon \rangle - l_\varepsilon(\xi_\varepsilon)$,

donde, ξ_ε es el único punto donde la función $\langle \xi^*, \xi \rangle - l_\varepsilon(\xi)$ alcanza su máximo.

De aquí,

$$\nabla l_\varepsilon^*(\xi^*) = \xi_\varepsilon \quad \text{(derivando respecto de } \xi^*). \tag{33}$$

De otro lado, $\langle \xi^*, \xi \rangle - l_\varepsilon(\xi)$ como función de la variable ξ alcanza su máximo en ξ_ε.

Luego,

$$\xi^* - \nabla l_\varepsilon(\xi_\varepsilon) = 0 \text{ (derivando respecto de } \xi).$$

De aquí, tomando en cuenta la definición de $l_\varepsilon(\xi)$

$$\xi^* - \nabla \left(\frac{(1-\varepsilon)}{2}|\xi_\varepsilon|^2 - \phi(|\xi_\varepsilon|) \right) = 0$$

$$\xi^* - (1-\varepsilon)\xi_\varepsilon + \varphi'(|\xi_\varepsilon|)\frac{\xi_\varepsilon}{|\xi_\varepsilon|} = 0 \tag{34}$$

$$\xi^* = (1-\varepsilon)\xi_\varepsilon - \varphi'(|\xi_\varepsilon|)\frac{\xi_\varepsilon}{|\xi_\varepsilon|}.$$

De otro lado, considerando que l_ε es estrictamente convexo, entonces la función

$$\psi_\varepsilon(\xi^*) = l_\varepsilon^*(\xi^*) - \frac{|\xi^*|^2}{2}$$

es diferenciable.

Luego,

$$\nabla \psi_\varepsilon(\xi^*) = \nabla l_\varepsilon^*(\xi^*) - \xi^* \text{ o sea}$$

$$\nabla l_{\varepsilon}^{*}(\xi^{*}) = \nabla \psi_{\varepsilon}(\xi^{*}) + \xi^{*}. \tag{35}$$

Denotando

$$L_{\varepsilon}(\xi) = (1-\varepsilon)\xi - \xi \frac{\phi'(|\xi_{\varepsilon}|)}{|\xi_{\varepsilon}|}$$

gracias a (20), L_{ε} es invertible y (34) nos dice que $\xi^{*} = L(\xi_{\varepsilon})$, de aqui

$\xi_{\varepsilon} = L^{-1}(\xi^{*})$ y como $\xi_{\varepsilon} = \nabla l_{\varepsilon}^{*}(\xi^{*})$, tomando en cuenta (35) nos da

$$\nabla \psi_{\varepsilon}(\xi^{*}) = L^{-1}(\xi^{*}).$$

Considerando la condición de optimalidad, y de (28) tenemos la siguiente sucesión de igualdades:

$$\nabla \psi_{\varepsilon}(b_{\varepsilon}) + b_{\varepsilon} - \nabla f_{\varepsilon} = 0 \,,$$
$$L^{-1}(b_{\varepsilon}) - b_{\varepsilon} + b_{\varepsilon} - \nabla f_{\varepsilon} = 0,$$
$$L^{-1}(b_{\varepsilon}) = \nabla f_{\varepsilon} \,,$$

de aqui

$$b_{\varepsilon} = L(\nabla f_{\varepsilon}) = (1-\varepsilon)\,\nabla f_{\varepsilon} - \nabla f_{\varepsilon}\,\frac{\phi'(|\nabla f_{\varepsilon}|)}{|\nabla f_{\varepsilon}|}$$

$$b_{\varepsilon} = \left((1-\varepsilon) - \frac{\phi'(|\nabla f_{\varepsilon}|)}{|\nabla f_{\varepsilon}|}\right)\nabla f_{\varepsilon}.$$

Ahora, probaremos la existencia de una solución para el problema inicial

$$\nabla \psi(\xi^{*}) = \xi_0 - \nabla l(\xi_0) = -\nabla\left(\phi|\xi|\right)_{\xi=\xi_0}$$
$$= -\frac{\phi'(|\xi_0|)}{|\xi_0|}\,\xi_0\,.$$

Queda por estudiar el comportamiento de f_{ε} y b_{ε} cuando $\varepsilon \to 0$. El sistema que liga f_{ε} y b_{ε} consiste de las ecuaciones, (17) y (31).

De (31) tenemos

$$div\, b_{\varepsilon} = \left((1-\varepsilon)\Delta f_{\varepsilon} - div\left(\frac{\phi'(|\nabla f_{\varepsilon}|)}{|\nabla f_{\varepsilon}|}\right)\nabla f_{\varepsilon}\right).$$

Poniendo esta ecuación en (17), obtenemos

$$\varepsilon \Delta f_{\varepsilon} + div\left(\frac{\phi'(|\nabla f_{\varepsilon}|)}{|\nabla f_{\varepsilon}|}\right)\nabla f_{\varepsilon} = 2(f_{\varepsilon} - p) \qquad (36)$$

Entonces la solución de (31) es exactamente el minimizante del funcional, $J_{\varepsilon}(f)$, es decir,

$$J_{\varepsilon}(f_{\varepsilon}) = \inf\{J_{\varepsilon}(f);\ f \in H^{1}(\Omega)\},$$

donde

$$J_{\varepsilon}(f) = \int_{\Omega}(p-f)^{2}dxdy + \int_{\Omega}\phi(|\nabla f|)\,dxdy + \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega}|\nabla f|^{2}\,dxdy \qquad (37)$$

Por otra parte, observamos, gracias a (29) y (21), que

$$\begin{aligned}
J_{\varepsilon}(f) &= \int_{\Omega}(p-f_{\varepsilon})^{2}\,dxdy + \int_{\Omega}\phi(|\nabla f_{\varepsilon}|)\,dxdy + \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega}|\nabla f_{\varepsilon}|^{2}\,dxdy\\
&= \int_{\Omega}(p-f_{\varepsilon})^{2}dxdy + \inf_{b\in L^{2}(\Omega)^{2}}\int_{\Omega}\left(\frac{|b-Df_{\varepsilon}|^{2}}{2} + \psi_{\varepsilon}(b)\right)dxdy\\
&= \int_{\Omega}((p-f_{\varepsilon})^{2} + \left(\frac{|b_{\varepsilon}-\nabla f_{\varepsilon}|^{2}}{2} + \psi_{\varepsilon}(b_{\varepsilon})\right)dxdy\\
&= \inf_{b\in L^{2}(\Omega)^{2}} T_{\varepsilon}(b) \le J_{\varepsilon}(f)\,;\ \forall f \in H^{1}(\Omega).
\end{aligned}$$

Por los resultados clásicos de regularidad, la solución f_{ε} de (31) pertenece a $C^{2}(\Omega)$. (Ver Gilbarg and Trudinger [4]).

Proposición 4.8.

Si p verifica $(\widehat{H}1)$, entonces la solución f_{ε} de (36) satisface

$$0 \le f_{\varepsilon}(x,y) \le 1 \quad \text{a.e.} \quad (x,y)\in\Omega \qquad (38)$$

Prueba.

Demostraremos, que $f_{\varepsilon}(x,y) \le 1$, a.e. $(x,y) \in \Omega$. La otra desigualdad puede ser demostrada del mismo modo.

f_{ε} es una solución del problema variacional

$$2\int_{\Omega}(f_{\varepsilon}-p)\,vdxdy + \int_{\Omega}\frac{\phi'(|\nabla f_{\varepsilon}|)}{|\nabla f_{\varepsilon}|}\langle\nabla f_{\varepsilon},\nabla v\rangle\,dxdy + \varepsilon\int_{\Omega}\langle\nabla f_{\varepsilon},\nabla v\rangle\,dxdy = 0,\ \ \forall v\in H^{1}(\Omega). \qquad (39)$$

En (39) elegimos la parte positiva de $(f_\varepsilon - 1)$ que denotamos por $v = (f_\varepsilon - 1)^+$; $v \in H^1(\Omega)$, de modo que, (39) puede ser escrito como

$$\Delta = 2\int_\Omega (f_\varepsilon - p)(f_\varepsilon - 1)^+ \, dxdy + \int_\Omega \frac{\phi'(|\nabla f_\varepsilon|)}{|\nabla f_\varepsilon|} \langle \nabla f_\varepsilon , \nabla (f_\varepsilon - 1)^+ \rangle \, dxdy \tag{40}$$
$$+ \varepsilon \int_\Omega \langle \nabla f_\varepsilon , \nabla (f_\varepsilon - 1)^+ \rangle \, dxdy = 0,$$

como $(f_\varepsilon - 1)^- = 0$ en los ξ, tal que, $f_\varepsilon(\xi) > 1$, $\int_{(f_\varepsilon > 1)} (f_\varepsilon - 1)^- = 0$, así

$$\Delta = 2\int_{(f_\varepsilon > 1)} (f_\varepsilon - p)(f_\varepsilon - 1) dxdy + \int_{(f_\varepsilon > 1)} \frac{\phi'(|\nabla f_\varepsilon|)}{|\nabla f_\varepsilon|} \nabla f_\varepsilon . \nabla (f_\varepsilon - 1) dxdy$$
$$+ \varepsilon \int_{(f_\varepsilon > 1)} \nabla (f_\varepsilon - 1) . \nabla (f_\varepsilon - 1) dxdy = 0$$

$$\int_{(f_\varepsilon > 1)} (f_\varepsilon - p)(f_\varepsilon - 1) dxdy + \int_{(f_\varepsilon > 1)} \frac{\phi'(|\nabla f_\varepsilon|)}{|\nabla (f_\varepsilon - 1)|} \nabla f_\varepsilon . \nabla (f_\varepsilon - 1) dxdy$$
$$+ \varepsilon \int_{(f_\varepsilon > 1)} \nabla (f_\varepsilon - 1) . \nabla (f_\varepsilon - 1) dxdy = 0$$

Luego,

$$\int_{(f_\varepsilon > 1)} \phi'(|\nabla (f_\varepsilon - 1)|) \ |\nabla (f_\varepsilon - 1)| dxdy + \varepsilon \int_{(f_\varepsilon > 1)} |\nabla (f_\varepsilon - 1)|^2 \, dxdy = \tag{41}$$
$$-2\int_{(f_\varepsilon > 1)} (f_\varepsilon - p)(f_\varepsilon - 1) dxdy.$$

Como $f_\varepsilon > 1 > p \Rightarrow f_\varepsilon - 1 \geq 0$ y $f_\varepsilon - 1 > 0$ en $(f_\varepsilon > 1)$. La expresión (41) puede ser escrita como

$$= -2\int_{f_\varepsilon > 1} (f_\varepsilon - p)(f_\varepsilon - 1) \leq 0$$

Luego, la relación obtenida en (41) es menor o igual que cero y es la suma de términos no negativos, entonces cada término es igual a cero, en particular

$$\int_{(f_\varepsilon > 1)} |\nabla (f_\varepsilon - 1)|^2 \, dxdy = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla (f_\varepsilon - 1)^+ = 0 \quad , \text{ en casi todo punto.}$$

De aquí, $(f_\varepsilon - 1)^+ = c$. Pero existe ξ, tal que $(f_\varepsilon - 1)^+ (\xi) = 0 \Rightarrow c = 0$.

Luego, $(f_\varepsilon - 1)^+ = 0$, y como $(f_\varepsilon - 1) = (f_\varepsilon - 1)^+ - (f_\varepsilon - 1)^-$

$\Rightarrow (f_\varepsilon - 1) = -(f_\varepsilon - 1)^- \leq 0 \Rightarrow f_\varepsilon \leq 1$.

Con las consideraciones anteriores la relación (39) puede ser escrita como

$$\varepsilon \int_{f_\varepsilon>1} |\nabla f_\varepsilon|^2 \, dxdy + \int_{f_\varepsilon>1} \phi'(|\nabla f_\varepsilon|) \, dxdy = -2 \int_{f_\varepsilon>1} (f_\varepsilon - p)(f_\varepsilon - 1). \tag{42}$$

Pero, por hipótesis, $\phi'(t) \geq 0$ sobre R^+ (ver ($\widehat{H}2$)) y $0 \leq p(x,y) \leq 1$ en casi todo punto de Ω, entonces, $(f_\varepsilon - p)(x,y) \geq 0$ a.e. $(x,y) \in \{(x,y);\ f_\varepsilon > 1\}$, el cual implica, de (42), que

$$\int_{f_\varepsilon>1} |\nabla f_\varepsilon|^2 \, dxdy \leq 0$$

De aquí tenemos que,

$$\nabla f_\varepsilon(x,y) = 0,\ \forall (x,y) \in \{(x,y);\ f_\varepsilon > 1\};\quad \text{i.e.;}\quad (f_\varepsilon - 1)^+, = 0;$$

el cual es equivalente a $f_\varepsilon(x,y) \leq 1$ a.e. $(x,y) \in \Omega$.

Las estimaciones siguientes son más delicadas y están basadas sobre una perturbación muy fina debido al lema de Temam (Ekeland y Teman [2], y Teman [6]), que asumiremos sin demostración.

Teorema 4.9.

Si $p \in W^{1,\infty}$, entonces para todo conjunto abierto O relativamente compacto en Ω, existe una constante $K = K(O,\ \Omega,\ \|p\|_{W^{1,\infty}})$, tal que,

$$\|f_\varepsilon\|_{W^{1,\infty}(O)} \leq K \tag{43}$$

$$\|f_\varepsilon\|_{H^2(O)} \leq K \tag{44}$$

Esta proposición nos permite el paso del límite sobre f_ε y b_ε cuando $\varepsilon \to 0$. Además, de las estimaciones (38), (43) y (44), podemos agregar, gracias a ($\widehat{H}2$):

$$\|f_\varepsilon\|_{W^{1,1}(\Omega)} \leq C \quad (\,C \text{ independiente de } \varepsilon). \tag{45}$$

Con estas estimaciones, usando resultados clásicos de compacidad y el de diagonalización, podemos establecer, que existe una función f_0 y una sucesión $\varepsilon_m \to 0$ tal que

$$f_{\varepsilon_m} \xrightarrow{w^*} f_0 \ \text{ en } L^\infty(\Omega) \text{ débil} - \text{estrella} \tag{46}$$

$$\nabla f_{\varepsilon_m} \xrightarrow{w^*} \nabla f_0 \ \text{ en } L^\infty(O) \text{ débil} - \text{estrella}\ \ \forall\ O \subset \overline{O} \subset \Omega \tag{47}$$

$$f_{\varepsilon_m} \xrightarrow{w} f_0 \ \text{ en } H^2(O) \text{ débil}\ \ \forall\ O \subset \overline{O} \subset \Omega \tag{48}$$

$$f_{\varepsilon_m} \to f_0 \text{ en } L^1(\Omega) \text{ fuerte,} \tag{49}$$

$$f_{\varepsilon_m}|_O \to f_0|_O \text{ en } H^1(O) \text{ fuerte } \forall \ O \subset \overline{O} \subset \Omega \tag{50}$$

$$f_{\varepsilon_m}(x,y) \to f_0(x,y) \text{ a.e. } (x,y), \tag{51}$$

$$\nabla f_{\varepsilon_m}(x,y) \to \nabla f_0(x,y) \text{ a.e. } (x,y) \tag{52}$$

y tenemos el resultado siguiente.

Teorema 4.10.

Bajo las suposiciones $(\widehat{H}1)$, $(\widehat{H}2)$ *y* $(\widehat{H}3)$ *y si* $p \in W^{1,\infty}(\Omega)$, *entonces la función* f_0 *definida anteriormente pertenece a* $W^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *y es la única solución del problema inicial de optimización*

$$\inf \{J(f) = \int_\Omega (p-f)^2 \, dxdy + \int_\Omega \phi(|\nabla f|) \, dxdy; \, f \in L^2(\Omega), \nabla f \in L_2^1\} \tag{53}$$

Prueba.

Por el lema de Fatou, (45) y (52), se cumple que f_0 pertenece $W^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, tenemos, además que $f_0|_O \in H^2(O) \cap W^{1,\infty}(O)$, para todo O con $O \subset \overline{O} \subset \Omega$. f_0 es una solución de (53). En efecto, f_{ε_m} es la solución del problema variacional (39). Gracias a un resultado de Tahraoui mencionado antes, las condiciones ($\widehat{H}2$) y ($\widehat{H}3$) implican que existe una constante $M > 0$ tal que $|\phi'(t)| \le M$, para todo $t \in R$. Por lo tanto, por las convergencias (46) – (52) y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, podemos pasar al límite en (39) y obtener

$$2\int_\Omega (f_0 - p)v \, dxdy + \int_\Omega \frac{\phi'(|\nabla f_0|)}{|\nabla f_0|} \langle \nabla f_0, \nabla v \rangle \, dxdy = 0, \forall v \in H^1(\Omega) \tag{54}$$

Por argumentos de densidad, (54) es verdadero para todo $v \in L^2$ con $\nabla v \in L_2^1$, y desde que el problema es estrictamente convexo, f_0 es la única solución de (53). Además, $0 \le f_0(x,y) \le 1$ a.e. $(x,y) \in \Omega$.

Los resultados previos implican algunas propiedades de convergencia para la sucesión de las variables duales b_ε. En efecto, hemos probado que b_ε verifica

$$b_\varepsilon = \left((1-\varepsilon) - \frac{\phi'(|\nabla f_\varepsilon|)}{|\nabla f_\varepsilon|} \right) \nabla f_\varepsilon \ \text{ y} \tag{55}$$

$$J_\varepsilon(f_\varepsilon) = J(f_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla f_\varepsilon|^2 \, dxdy \tag{56}$$

$$= \int_{\Omega} (p - f_{\varepsilon})^2 dxdy + \inf_{b \in L_2^2} \int_{\Omega} \left(\frac{|b - \nabla f_{\varepsilon}|^2}{2} + \psi_{\varepsilon}(b) \right) dxdy$$

$$= \inf_{b \in L_2^2} T_{\varepsilon}(b) \leq J_{\varepsilon}(f), \quad \forall \ f \in H^1(\Omega).$$

Si $\varepsilon \to 0$, deducimos de (55) que

$$b_{\varepsilon}(x,y) \to b_0(x,y) \ \text{ a.e. } \ (x,y) \in \Omega,$$

donde

$$b_0(x,y) = \left(1 - \frac{\phi'(|\nabla f_0(x,y)|)}{|\nabla f_0(x,y)|} \right) \nabla f_0(x,y)$$

La sucesión de ecuaciones en (56) prueba que f_{ε} es una sucesión minimizante para el problema $\inf_{f} J(f)$, y que

$$\int_{\Omega} \phi(|\nabla f_0|) \, dxdy = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{b \in L_2^2} \int_{\Omega} \left(\frac{|b - \nabla f_0|^2}{2} + \psi_{\varepsilon}(b) \right) dxdy$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} \left(\phi(|\nabla f_{\varepsilon}|) + \frac{\varepsilon}{2} |\nabla f_{\varepsilon}|^2 \right) dxdy.$$

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] **G. Aubert - L. Vese**, *«A Variational Method in Image Recovery»*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 34, N° 5, pp. 1948-1979, October 1997.

[2] **I. Ekeland y R. Teman**, *«Convex Analysis and Variational Problems»*, North-Holland Publishing Company, Amsterdan 1976.

[3] **Pedro C. Espinoza Haro** *«Compresión de Imágenes en Computación Gráfica»* Actas del I Seminario Internacional de Matemáticas Aplicadas, Universidad de Lima, 1998.

[4] **D. Gilbarg y N.S. Trudinger**, *«Elliptic Partial Differential Equations of Second Order»*, Springer–Verlang, Berlin, 1983.

[5] **Víctor G. Osorio Vidal** *«Convexidad y Métodos Variacionales en la Recuperación de Imágenes»*, Tésis para optar Grado de Magíster en Matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú., 2000.

[6] **R. Teman** *« Solutions Généralisées de Certaines Équations du Type Hypersurfaces Minima»*, Arch. Rational Mech. Anal., 44(1971), pp. 121-156.