PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. VIII N° 2, pp. 29 - 43, LIMA - PERÚ. Diciembre 2005

DECAIMIENTO EXPONENCIAL DE LA SOLUCIÓN DÉBIL DE UNA ECUACIÓN DE ONDA NO LINEAL

Yolanda Santiago Ayala[1]

RESUMEN.- *En este artículo demostramos que existe una única solución débil de una ecuación de onda no-lineal. Probamos la unicidad de solución utilizando el método de Visik - Ladyshenkaia. También, usando el Lema de diferencias de Nakao, probamos el decaimiento exponencial de la energía asociada al sistema.*

PALABRAS CLAVE.- *Existencia de solución. Método de Visik - Ladyshenkaia. Lema de Nakao. Decaimiento exponencial.*

EXPONENTIAL DECAY OF THE WEAK SOLUTION OF A NONLINEAR WAVE EQUATION

ABSTRACT.- *In this article, we prove the existence and uniqueness of the weak solution of a nonlinear wave equation. We prove the uniqueness by using the Visik – Ladyshenkaia Method. Also, using the Nakao's Lemma, we prove the exponential decay of the energy associated to the system.*

KEYWORDS.- *Existence of solution. Visik – Ladyshenkaia Method. Nakao's Lemma. Exponential decay.*

1. INTRODUCCIÓN

Estudiamos la siguiente ecuación de onda no lineal,

$$u_{tt} - \Delta u + u^3 + u_t = 0 \ \text{ en } \ \Omega \times (0, +\infty) \tag{1.1}$$

$$u = 0 \ \text{ en } \ \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{1.2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x),\ u_t(x, 0) = u_1(x), \tag{1.3}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, es abierto y acotado con frontera $\partial\Omega$ regular.

El problema (1.1) - (1.3) también puede ser visto como la ecuación de evolución de primer orden:

$$\begin{vmatrix} U_t &= AU + NU \\ U(0) &= U_0 \end{vmatrix} \qquad \text{donde } A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \ \text{ y } \ N\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -u^3 - v \end{pmatrix}.$$

[1] *Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: ysantiagoa@unmsm.edu.pe*

Si pretendemos usar técnicas de Semigrupos [9], sería difícil acotar $v^2 + vu + u^2$. De ahí que en este artículo demostraremos la existencia de solución débil del problema (1.1) - (1.3), vía el método de Faedo - Galerkin. Para probar la unicidad de solución utilizaremos el método de Visik - Ladyshenkaia. Para ver la propiedad disipativa del sistema, multiplicamos la ecuación (1.1) por u_t y obtenemos

$$\frac{\partial E}{\partial t}(t) = - \int_{\Omega} |u_t(t)|^2 \, dx, \tag{1.4}$$

donde

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ |u_t(t)|^2 + |\nabla u(t)|^2 \right\} dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} u^4(t) \, dx,$$

es la energía asociada al sistema (1.1) - (1.3). De la igualdad (1.4) tenemos que $E'(t)$ es no positiva, es decir la energía es acotada y decreciente, pero no se conoce que sucede con $E(t)$ cuando el tiempo va para infinito. Usando el Lema de diferencias de Nakao probaremos que la energía decae exponencialmente a cero, cuando $t \to +\infty$.
Todo esto lo resumimos en nuestro resultado principal.

Teorema 1.1 (Resultado principal) *Sean* $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$ *y* $u_1 \in L^2(\Omega)$. *Entonces el Problema (1.1) - (1.3) tiene una única solución débil que decae exponencialmente a cero cuando el tiempo va para infinito; esto es existen constantes positivas* C *y* γ *de modo que se satisface*

$$E(t) \le E(0)\, C e^{-\gamma t}, \; \forall t \ge 1.$$

2. PRELIMINARES

Lema 2.1 (Desigualdad de Gronwall) *Sea f continua y no negativa en* $[0, a]$ *y K una constante. Si se satisface:*

$$f(t) \le K + \int_0^t f(s)\, ds, \; \forall t \in (0, a],$$

entonces $f(t) \le K e^t$, $\forall t \in (0, a]$.
En particular: si $K = 0$ *entonces* $f(t) \equiv 0$.

Lema 2.2 *En U un abierto acotado de* $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$, *sean* g_μ *y g funciones de* $L^s(U)$ *con* $1 < s < +\infty$, $|g_\mu|_{L^s(U)} \le C$ *y* $g_\mu \to g$ *en c. t. p. en U. Entonces* $g_\mu \to g$ *débilmente en* $L^s(U)$.

Prueba.- Sea $N \in \mathbb{N}$, $E_N := \left\{ x, x \in U \text{ tal que } |g_\mu(x) - g(x)| \le 1, \mu \ge N \right\}$. Los conjuntos E_N son conjuntos medibles, crecientes sobre N y $m(E_N) \to m(U)$ cuando $N \to +\infty$, donde $m(A)$ es la medida de A.

Así, definimos $\phi_N := \left\{\psi \in L^r(U) \text{ tal que } \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1 \text{ y soporte de } \psi \subset E_N\right\}$, y denotamos por $\phi_N := \bigcup_{N=1}^{\infty} \phi_N$, esto es ϕ es denso en $L^r(U)$.

Sea $\psi \in \phi$ entonces existe N_0 tal que $\psi \in \phi_{N_0}$. Tomando $\mu \geq N_0$ tenemos que $|\psi(g_\mu - g)| \leq |\psi| \to 0$ c.t.p. Luego el Teorema de Lebesgue nos garantiza que $\int_U \psi\,(g_\mu - g)\,dx \to 0$ cuando $\mu \to +\infty$.

Así hemos probado que

$$\text{si } \psi \in \phi \Rightarrow \int_U \psi\,(g_\mu - g)\,dx \to 0 \text{ cuando } \mu \to +\infty. \tag{2.1}$$

Desde que ϕ es denso en $L^r(U)$, entonces (2.1) prueba el Lema.

Lema 2.3 *Sea $f \in L^p(0,T;X)$, $f_t \in L^p(0,T;X)$ con $1 \leq p \leq +\infty$. Entonces existe una función continua g en $[0,T]$ tal que $g = f$ en casi todo punto de X.*

Prueba.- Ver [4].

Lema 2.4 *Sea H un espacio de Hilbert separable, $V \subset H$ una inclusión continua con V denso en H, $1 \leq p \leq \infty$. Si $f \in L^p(0,T;V)$ y $f_t \in L^p(0,T;H)$ entonces $f \in C([0,T],H)$. Por otro lado si $p = \infty$. entonces $f \in C_{débilmente}([0,T];V)$ (f es débilmente continua en $[0,T]$), i.e. $\forall g \in V^*$, $< f(t), g >_{VV^*} \to < f(t_0), g >_{VV^*}$ cuando $t \to t_0$, $\forall t_0 \in [0,T]$.*

Prueba.- Ver [5].

Teorema 2.1 (Desigualdad de Poincaré) *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado en una dirección, entonces existe una constante $C_p > 0$ tal que $|u|_{L^2} \leq C_p |\nabla u|_{L^2}$, $\forall u \in H_0^1(\Omega)$. La constante C_p es denominada la constante de Poincaré.*

Prueba.- Ver [2].

Teorema 2.2 (Rellich - Kondrachoff) *Sea $Q = (0,T) \times \Omega$, así $H^1(Q) \mapsto L^2(Q)$ es una inyección compacta.*

Prueba.- Ver [1].

Teorema 2.3 (Dunford - Pettis) *$L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega))$ (resp. $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ es el dual de $L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)+L^{\frac{4}{3}}(\Omega))$ (resp. $L^1(0,T;L^2(\Omega))$.*

Prueba.- Ver [4].

Teorema 2.4 (Inmersión de Sobolev) *Sea $\Omega=\mathbb{R}^n$ ó un abierto acotado con frontera de clase C^1 ó $\mathbb{R}_+^n$, $m\in\mathbb{N}, 1\le p<+\infty$. Si $R=\frac{1}{p}-\frac{m}{n}$ entonces valen los siguientes enunciados con inclusiones continuas:*

1. Si $R>0$ entonces $W^{m,p}(\Omega)\subset L^q(\Omega)$, donde $q=\frac{1}{R}$.

2. Si $R>0$ entonces $W^{m,p}(\Omega)\subset L^q(\Omega)$, donde $q\in[p,+\infty)$.

3. Si $R>0$ entonces $W^{m,p}(\Omega)\subset L^\infty(\Omega)$.

Prueba.- Ver [1], [2].

Lema 2.5 (Lema de diferencias de Nakao) *Sea $\phi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ una función acotada con $\phi(0)>0$ y supongamos que existe $M>0$ tal que*

$$\sup_{s\in[t,t+1]}\phi(s)\le M\{\phi(t)-\phi(t+1)\},\ \forall t\ge 1. \tag{2.2}$$

Entonces existen $A>0$ y $M_1>0$ tal que $\phi(t)\le M_1e^{-At}, \forall t\ge 1$.
Esto quiere decir que "$\phi(t)$ decae exponencialmente a cero cuando $t\to+\infty$".

Prueba.- En [11] se presenta en detalle la demostración del Lema y otras aplicaciones. Es importante citar los trabajos de Nakao [6], [7] y [8].

3. EXISTENCIA Y UNICIDAD

Prueba del Teorema 1.1

Prueba de la existencia

Usaremos el método de Galerkin. Desde que $H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega)$ es separable, tenemos que existe $\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un subconjunto numerable y denso en $H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega)$. i.e. $\forall m\in\mathbb{N}, w_1,\ldots,w_m$ son linealmente independientes y las combinaciones lineales finitas de w_i son densas en $H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega)$.

Denotemos por $u_m=u_m(t)$ a las soluciones aproximadas para nuestro problema, siendo $u_m(t)=\sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i$, son determinados por las condiciones:

$$0 = < u_m''(t),\, w_j > + \, a(u_m(t),\, w_j) + < u_m^3(t),\, w_j >$$
$$+ < u_m'(t),\, w_j >,\; i \leq j \leq m. \qquad (3.1)$$

donde $a(u,v) = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$

$$u_m(0) = u_{om},\quad u_{om} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im} w_i \;\rightarrow_{\,m\to+\infty}\, u_0 \;\text{ en }\; H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega), \qquad (3.2)$$

$$u_m'(0) = u_{1m},\quad u_{1m} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{im} w_i \;\rightarrow_{\,m\to+\infty}\, u_1 \;\text{ en }\; L^2(\Omega). \qquad (3.3)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales (3.1) con las condiciones iniciales (3.2) - (3.3) tiene solución, desde que $det(w_i, w_j) \neq 0$ ya que $\{w_1, ... w_m\}$ son linealmente independientes. Así existen soluciones u_m en $[0, t_m]$.

Afirmamos que $t_m = T$ (Estimaciones apriori).

Multiplicando la ecuación (3.1) por $g_{im}'(t)$ y sumando en i, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= < u_m''(t),\, u_m'(t) > + \, a(u_m(t),\, u_m'(t)) + < u_m^3(t),\, u_m'(t) > \\ &\quad + < u_m'(t),\, u_m'(t) >, \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{ |u_m'(t)|^2 + a(u_m(t), u_m(t)) \right\} + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial t}\left\{ \int_\Omega u_m^4(t)dx \right\} \\ &\quad + \int_\Omega |u_m'(t)|^2\, dx. \end{aligned} \qquad (3.4)$$

Defina,

$$\| v \| := \sqrt{a(v,v)}$$

$\| \,.\, \|$ es una norma en $H_0^1(\Omega)$ y debido a desigualdad de Poincaré Teorema 2.1 se tiene que es equivalente a $| \cdot |_{H^1(\Omega)}$.

Integrando de 0 a t la igualdad (3.4), tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left\{ |u_m'(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \| u_m(t)\|^2_{H_0^2(\Omega)} \right\} + \frac{1}{4}|u_m(t)|^4_{L^4(\Omega)} + \int_0^t |u_m'(t)|^2_{L^2(\Omega)}\, ds \\ &= \frac{1}{2}\{ \underbrace{|u_m'(0)|}_{=u_{im}}{}^2 + \| u_m(0)\|^2 \} + \frac{1}{4}\underbrace{|u_m(0)|}_{=u_{om}}{}^4_{L^4(\Omega)} \\ &\rightarrow_{m\to+\infty} \quad \frac{1}{2}\{ |u_1|^2 + \|u_0\|^2 \} + |u_0|^4_{L^4(\Omega)} \end{aligned} \qquad (3.4)$$

Luego,

$$\frac{1}{2}\left\{\left|u_m'(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_m(t)\|^2_{H_0^2(\Omega)}\right\} + \frac{1}{4}\left|u_m(t)\right|^4_{L^4(\Omega)} + \int_0^t \left|u_m'(t)\right|^2_{L^2(\Omega)}\, ds \le C \qquad (3.5)$$

donde C es independiente de m.

También, $\left|u_m'(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} \le 2C \le 2C + \int_0^t \left|u_m'(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} ds$. Usando la desigualdad de Gronwall Lema 2.1, tenemos $\left|u_m'(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} \le 2Ce^t$, donde C es independiente de m.

Por otro lado, de (3.5) tenemos

$$\|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|u_m(t)\|^4_{L^4(\Omega)} \le 4C.$$

De ahí que

$$\|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)} \le \widehat{C},$$

donde $\widehat{C}$ es independiente de m.

Luego $t_m = T$.

Por otro lado cuando $m \to +\infty$, tenemos que

$$\begin{aligned} &u_m \text{ cae en un conjunto acotado de } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega)) \text{ y} \\ &u_m' \text{ en un conjunto acotado de } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned} \qquad (3.6)$$

Recuerde que $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ es una norma completa en $H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega)$.

Usando el Teorema 2.3 de Dunford-Pettis, podemos extraer de (u_m) una subsucesión (u_μ) tal que satisfagan

$$u_\mu \overset{*}{\to} u \text{ en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega)) \qquad (3.7)$$

i.e. $\int_0^T (u_\mu(t), g(t)\, dt \to \int_0^T (u(t), g(t))\, dt,\ \forall g \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)+L^{\frac{4}{3}}(\Omega))$.

$$u_\mu' \overset{*}{\to} L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \qquad (3.8)$$

i.e. $u_\mu' \xrightarrow{\ *\ } u'$ en $D'(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega))$.

En particular de (3.6) tenemos que u_m está acotada en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ y u_m' está acotada en $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Por consiguiente u_m está acotada en $H^1(Q) := \{f,\ f \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ y $f' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\}$.

Debido al Teorema 2.2 de Rellich-Kondrachoff existe una subsucesión extraída de u_m que además de satisfacer (3.7) - (3.8), verifica:

$$u_\mu \to u \quad \text{en} \quad L^2(Q) \text{ fuertemente, en casi todo punto (c.t.p.).} \tag{3.9}$$

También tenemos que u_m^3 pertenece al conjunto acotado de $L^\infty(0, T; L^{\frac{4}{3}}(\Omega))$

$$u_\mu^3 \xrightarrow{*} w \text{ en } L^\infty(0, T; L^{\frac{4}{3}}(\Omega)). \tag{3.10}$$

De (3.9), (3.10) y Lema 2.2 tenemos $w = u^3$ (estamos usando $U = Q$, $g_\mu = u_\mu^3$, y $s = \frac{4}{3}$).
Usando $m = \mu$ tenemos

$$\left\langle u_\mu'', w_j \right\rangle + a(u_\mu, w_j) = \left\langle u_\mu^3, w_j \right\rangle + (u_\mu'(t), u_\mu') = 0$$

y como

$$\begin{aligned}
a(u_\mu, w_j) &\xrightarrow{*} a(u, w_j) \quad \text{en} \quad L^\infty(0, T).\\
a(u_\mu', w_j) &\xrightarrow{*} (u', w_j) \text{ en } L^\infty(0, T).\\
(u_\mu'', w_j)\frac{\partial}{\partial t}(u_\mu', w_j) &\xrightarrow{*} (u'', w_j) \text{ en } D'(0, T).\\
a(u_\mu^3, w_j) &\xrightarrow{*} (u^3, w_j) \text{ en } L^\infty(0, T).\\
a(u_\mu', u_\mu') &\xrightarrow{*} (u', u').
\end{aligned}$$

entonces tenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u, w_j) + a(u, w_j) + (u^3, w_j) + (u_1, u_t) = 0$$

Por la densidad de la base $\{w_1, \ldots\}$ entonces

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u, w) + a(u, w) + (u^3, w) + (u_t, u_t) = 0, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega).$$

Así u satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \Delta u + u^3 + u_t = 0.$$

Probaremos ahora que $u(0) = u_0$ y $u_t(0) = u_1$.

De (3.7), (3.8) y Lema 2.3 tenemos que $u_\mu(0) \to u(0)$ en $L^2(\Omega)$.

Por otro lado de (3.2) tenemos que $u_\mu(0) = u_{o\mu} \to u_o$ en $H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$. Entonces $u(0) = u_o$.

De (2.1) tenemos

$$(u''_\mu, w_j) \xrightarrow{*} (u'', w_j) \text{ en } L^\infty(0, T).$$

Usando el Lema 3.2, con $X = \mathbb{R}$ tenemos

$$(u'_\mu(0), w_j) \to (u', w_j)\big|_{t=0} = (u'(0), w_j)$$

y como $(u'_\mu(0), w_j) \to (u_1, w_j)$ entonces $(u'(0), w_j) = (u_1, w_j)$, $\forall j$. Así $u'(0) = u_1$.

Prueba de la unicidad

Sean u, v soluciones de (1.1) - (1.3) tales que $u(0) = v(0) = u_o \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$ y $u_t(0) = v_t(0) = u_1 \in L^2(\Omega)$. Defina $w := u - v$, entonces w es solución de

$$w'' - \Delta w + u^3 - v^3 + w' = 0 \tag{3.11}$$

$$w(0) = 0,\ w_t(0) = 0 \tag{3.12}$$

$$w \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)) \tag{3.13}$$

$$w_t = w' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \tag{3.14}$$

Multiplicando la ecuación (3.11) por w' e integrando sobre Ω tenemos

$$|w'(t)|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\{|w'(t)|_{L^2}^2 + \|w(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2\} \int_\Omega (v^3 - u^3) w' dx \tag{3.15}$$

Observemos primero que

$$\begin{aligned} v^3 - u^3 &= (v - u)(u^2 + uv + v^2) \\ &= w(u^2 + uv + v^2) \\ &\le w(u^2 + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + v^2) \\ &= w\frac{3}{2}(u^2 + v^2) \\ |v^3 - u^3| &\le |w|\frac{3}{2}(u^2 + v^2) \end{aligned} \tag{3.16}$$

También, como $u \in H_0^1(\Omega)$ y $n = 3$, entonces el Teorema 2.4 de Inmersión de Sobolev (caso 1) nos garantiza que $u \in L^6(\Omega)$, i.e. $u^2 \in L^3(\Omega)$. Obtenemos análogas conclusiones para v.

Utilizando estas observaciones, la desigualdad generalizada de Hölder y que $u, v \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega (v^3 - u^3)\, w'\, dx\right| &\le \int_\Omega \left|v^3 - u^3\right| w'\, dx \\
&\le \frac{3}{2}\int_\Omega \underbrace{\left|u^2 + v^2\right|}_{\in L^3} \underbrace{\left|w\right|}_{\in L^6} \underbrace{\left|w'\right|}_{\in L^2} dx \\
&\le \frac{3}{2}\{\left|\,|u(t)|^2\right|_{L^3} + \left\||v(t)|^2\right|_{L^3}\} \left|w(t)\right|_{L^6} \left|w'(t)\right|_{L^2} \\
&\le \frac{3}{2}\{\left|u(t)\right|^2_{H_0^1} + \left\|v(t)\right\|^2_{H_0^1}\} \left\|w(t)\right\|_{H_0^1} \left|w'(t)\right|_{L^2} \\
&\le \widehat{C}\, \{\left\|u(t)\right\|^2_{H_0^1} + \left\|v(t)\right\|^2_{H_0^1}\} \left\|w(t)\right\|_{H_0^1} \left|w'(t)\right|_{L^2} \\
&\le C\, \left\|w(t)\right\|_{H_0^1} \left|w'(t)\right|_{L^2}
\end{aligned}$$

Como $\left|w'(t)\right|_{L^2} \ge 0$, tenemos de (3.15)

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\{\left|w'(t)\right|^2_{L^2} + \left\|w(t)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}\} \le C\left\|w(t)\right\|_{H_0^1}\left|w'(t)\right|_{L^2}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\{\left|w'(t)\right|^2_{L^2} + \left\|w(t)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}\} &\le 2C\left\|w(t)\right\|_{H_0^1}\left|w'(t)\right|_{L^2} \\
&\le C\{\left\|w(t)\right\|^2_{H_0^1} + \left|w'(t)\right|^2_{L^2}\},
\end{aligned}$$

integrando de *0* a s tenemos

$$\left|w'(t)\right|^2_{L^2} + \left\|w(t)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le c\int_0^s \{\left\|w(t)\right\|^2_{H_0^1} + \left|w'(t)\right|^2_{L^2}\}\, dt.$$

Usando la desigualdad de Gronwall Lema 2.1 tenemos

$$\left|w'(s)\right|^2_{L^2} + \left\|w(s)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} = 0,$$

de donde obtenemos $w = 0$, ie. $u = v$.

Sabemos que $w_{tt} \in H^{-1}(\Omega)$ y $w_t \in L^2(\Omega)$, como no tenemos garantizado que $w_t \in H_0^1(\Omega)$, entonces necesitamos justificar esta conclusión previa de unicidad, para lo cual utilizaremos el **Método de Visik - Ladyshenkaia,** método clásico de las ecuaciones lineales hiperbólicas.

Sea $s \in (0, T]$, definimos $\psi(t) = -\int_t^s w(r)dr$, si $t \le s$ y $\psi(t) = 0$, si $t > s$. Así, ψ es continua de

$[0, T] \to H_0^1(\Omega)$, $\psi(s) = 0$ y $\psi'(t) = w(t)$.

Definimos también $w_1(t) := \int_0^t w(r)dr$. Entonces $\psi(t) = w_1(t) - w_1(s)$ para $t \le s$ y $\psi(0) = -w_1(s)$.

Tomando la dualidad de la ecuación (3.11) con $\psi(t)$, e integrando de 0 a s tenemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^s (v^3 - u^3, \psi)\, dt &= \int_0^s (w'', \psi)\, dt + \int_0^s a(w, \psi)\, dt + \int_0^s (w', \psi)\, dt \\
&= -\int_0^s (w', \underbrace{\psi'}_{=w})\, dt + \int_0^s a(\psi', \psi)\, dt - \int_0^s (w, \underbrace{\psi'}_{=w})\, dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^s \frac{\partial}{\partial t}|w(t)|_{L^2}^2\, dt + \frac{1}{2}\int_0^s \frac{\partial}{\partial t} a(\psi, \psi)\, dt - \int_0^s |w(t)|_{L^2}^2\, dt \\
&= -\int_0^s |w(t)|_{L^2}^2\, dt + \frac{1}{2}|w(s)|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\underbrace{|w(0)|}_{=0}{}_{L^2}^2 + \frac{1}{2} a(\underbrace{\psi(s)}_{=0}, \psi(s)) \\
&= -\frac{1}{2} a(\underbrace{\psi(s)}_{=w_1(s)}, \psi(0)) \\
&= -\int_0^s |w(t)|_{L^2}^2\, dt - \frac{1}{2}|w(s)|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|w_1(s)\|_{H_0^1}^2 .
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Por otro lado, usando la desigualdad (3.16), la desigualdad generalizada de Hölder, la inmersión $H_0^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ y que $u, v \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^s (u^3 - v^3, \psi)\, dt &\le \int_0^s \int_\Omega |v^3 - u^3|\, |\psi|\, dx\, dt \\
&\le \frac{3}{2}\int_0^s \int_\Omega \underbrace{|w|}_{\in L^2} \underbrace{|u^2 + v^2|}_{\in L^3} \underbrace{|w_1(t) - w_1(s)|}_{\in L^6}\, dx\, dt \\
&\le \frac{3}{2}\int_0^s |w|_{L^2} |u^2 + v^2|_{L^3} |w_1(t) - w_1(s)|_{L^6}\, dt \\
&\le \frac{3}{2}\int_0^s |w|_{L^2} \left(|u^2|_{L^3} + |v^2|_{L^3}\right) \|w_1(t) - w_1(s)\|_{H_0^1}\, dt \\
&\le \frac{3}{2}\int_0^s |w|_{L^2} \left(|u|_{L^6}^2 + |v|_{L^6}^2\right) \|w_1(t) - w_1(s)\|_{H_0^1}\, dt \\
&\le \frac{3}{2}\int_0^s |w|_{L^2} \left(\|u\|_{H_0^1} + \|v\|_{H_0^1}\right) \|w_1(t) - w_1(s)\|_{H_0^1}\, dt \\
&\le C_1 \int_0^s |w|_{L^2} \|w_1(t) - w_1(s)\|_{H_0^1}\, dt \\
&\le C_1 \int_0^s |w|_{L^2} \|w_1(t)\|_{H_0^1}\, dt + C_1 \int_0^s |w|_{L^2} \|w_1(s)\|_{H_0^1}\, dt \\
&\le \frac{C_1}{2}\int_0^s |w|_{L^2}^2\, dt + \frac{C_1}{2}\int_0^s \|w_1(t)\|_{H_0^1}^2\, dt + \frac{C_1}{2\in}\int_0^s |w|_{L^2}^2\, dt \\
&\quad + \frac{C_1 \in}{2}\int_0^s \|w_1(s)\|_{H_0^1}^2\, dt \\
&\le \frac{C_1}{2}\int_0^s |w|_{L^2}^2\, dt + \frac{C_1}{2}\int_0^s \|w_1(t)\|_{H_0^1}^2\, dt + \frac{C_1}{2\in}\int_0^s |w|_{L^2}^2\, dt \\
&\quad + \frac{C_1 \in}{2}\, s \|w_1(s)\|_{H_0^1}^2 .
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Entonces de la igualdad (3.17) y desigualdad (3.18) tenemos

$$\frac{1}{2}|w(s)|_{L^2}^2 + (\frac{1}{2} - \frac{C_1 \in}{2}s)\,\|w_1(s)\|_{H_0^1}^2 \leq C_2 \int_0^s |w|_{L^2}^2 + \|w_1(t)\|_{H_0^1}^2\,dt \tag{3.19}$$

Fijando s_0, en la desigualdad (3.19) podemos escoger $\in > 0$ pequeño, de modo que $\frac{1}{2} - \frac{C_1 \in}{2}s > 0$ para todo $s \in [0, s_0]$. Luego basta escoger $\in > 0$ tal que $\frac{1}{2} - \frac{C_1 \in}{2}s_0 > 0$ y obtenemos:

$$|w(s)|_{L^2}^2 + \|w_1(s)\|_{H_0^1}^2 \leq C_3 \int_0^s |w|_{L^2}^2 + \|w_1(t)\|_{H_0^1}^2\,dt, \quad s \in [0, s_0] \tag{3.20}$$

Por otro lado como $w \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ y $w_t \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ entonces usando el Lema 2.4 tenemos que $w \in C(0, T, L^2(\Omega))$.

De la desigualdad (3.20) y usando la desigualdad de Gronwall Lema 2.1 tenemos que $w(t) = 0$ en c.t.p. en $[0, s_0]$. Pero como w es continua en $[0, T]$, entonces $w(t) = 0$ para $t \in [0, s_0]$.

Observación 3.1 $w(s_0) = w_t(s_0) = 0$.

En efecto, ya tenemos que $w(s_0) = 0$. Probaremos que $w_t(s_0) = 0$. Observamos que $< w_t(r), \theta(t) > = -< w(t), \theta'(t) >$, $\forall \theta \in \mathcal{D}(0, s_0)$. Entonces $\int_0^s < w_t(t), \theta(t) > dt = -\int_0^s < w(t), \theta'(t) > dt$, pero $w(t) = 0$ en $[0, s_0]$, luego, $\int_0^s < w_t(t), \theta(t) > dt = 0$, $\forall \theta \in \mathcal{D}(0, s_0)$.

Desde que $w_t \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ y $w_{tt} \in L(0, T, H^{-1}(\Omega))$ tenemos que $w_t \in C(0, T; H^{-1}(\Omega))$ y $w_t \in C$ como subíndice $([0, T]; L^2(\Omega))$, luego $w_t(s_0) = 0$.

Repitiendo el argumento, obtenemos el mismo resultado en $[s_0, 2s_0]$, ..., entonces $\forall s \in [0, T]$ tenemos $w(t) \equiv 0$, i.e. $u = v$.

4. DECAIMIENTO EXPONENCIAL

Sabemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}E(t) = -\int_\Omega |u'(t)|^2\,dx \leq 0, \tag{4.1}$$

donde $E(t) = \frac{1}{2}\{|u'(t)|_{L^2}^2 + |\nabla u(t)|_{L^2}^2\} + \frac{1}{4}|u(t)|_{L^4}^4$.

Integrando la desigualdad (4.1), de 0 a t, tenemos que

$$E(t) = \frac{1}{2}\{|u'(t)|_{L^2}^2 + |\nabla u(t)|_{L^2}^2\} + \frac{1}{4}|u(t)|_{L^4}^4 \leq \frac{1}{2}\{|u'(0)|_{L^2}^2 + |\nabla u(0)|_{L^2}^2\} + \frac{1}{4}|u(0)|_{L^4}^4 = E(0)$$

Así, $0 \leq E(t) \leq E(0)$, i.e. está acotada y además es decreciente, debido a (4.1).

Consideremos $E(0) > 0$.

Probaremos que, $\exists M > 0$ tal que $\sup_{t \leq s \leq t+1} E(s) \leq M\{E(t) - E(t+1)\}$, $\forall t \geq 1$.

Esto debido a Lema 2.5 de diferencias de Nakao, nos permitirá obtener: $\exists\gamma$ y c constantes positivas tal que $E(t) \leq ce^{-\gamma t}$.

De (4.1) obtenemos

$$E(t+1) - E(t) = \int_t^{t+1} \frac{\partial E(s)}{\partial s} ds = -\int_t^{t+1} (\int_\Omega u_s^2\, dx) ds,$$

de donde tenemos

$$E(t) - E(t+1) = \int_t^{t+1} (\int_\Omega u_s^2 dx)\, ds \geq 0$$

Defina $F^2(t) = E(t) - E(t+1)$ y $f(s) := \int_\Omega u_s^2(x, s)\, dx = |u_s(., s)|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0.$

Particionamos el intervalo $[t, t+1]$ en cuatro subintervalos iguales. Usando en los intervalos extremos, el Teorema del valor medio para integrales, tenemos:

$$\int_t^{t+\frac{1}{4}} f(s) ds = \frac{1}{4} f(t_1),\ t_1 \in (t, t+\frac{1}{4}).$$

Análogamente,

$$\int_{t+\frac{3}{4}}^{t+\frac{1}{4}} f(s) ds = \frac{1}{4} f(t_1),\ t_1 \in (t, \frac{3}{4}, t+1).$$

Así,

$$|u_t(., t_i)|^2_{L^2(\Omega)} \leq 4F^2(t) \text{ para } i = 1, 2. \tag{4.2}$$

Multiplicando la ecuación (3.1) por u e integrando sobre Ω tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (u_{tt} - \Delta u + u^3 + u_t)\, u dx \\ &= \int_\Omega u_{tt} u dx - \int_\Omega \Delta u u dx + \int_\Omega u^4 dx + \int_\Omega u_t u dx \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_\Omega u u_t dx\right) - \int_\Omega u_t^2 dx\right] + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega u^4 dx + \int_\Omega u_t u dx \end{aligned} \tag{4.3}$$

Integrando de t_1 a t_2 la igualdad (4.3) tenemos

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_\Omega |\nabla u(s)|^2 dx + \int_\Omega u^4(s)\, dx\right) ds \\ &= \int_\Omega u_{tt} u dx - \int_\Omega \Delta u u dx + \int_\Omega u^4 dx + \int_\Omega u_t u dx \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_\Omega u u_t dx\right) - \int_\Omega u_t^2\, dx\right] + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega u^4 dx + \int_\Omega u_t u dx \end{aligned} \tag{4.4}$$

Por otro lado, usando el Teorema del valor medio para integrales tenemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} E(s)\, ds = E(t^*)(t_1 - t_2). \tag{4.5}$$

También tenemos,

$$\int_{t_1}^{t_2} E(s)\, ds = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u_s^2\, dx dx + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{1}{2}|\nabla u(.,s)|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\int_\Omega u(x,s)^4\, dx\right) ds}_{I:=} \tag{4.6}$$

Ahora estimaremos I.
Utilizando la igualdad (4.4) tenemos

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_\Omega |\nabla u(s)|^2\, dx + \int_\Omega u^2(s)dx\right) ds\\ &= \left|\int_\Omega u(x,t_2)u_s(x,t_2)\, dx\right| + \left|\int_\Omega u(x,t_1)\, u_s(x,t_1)dx\right| +\\ &\underbrace{\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u_s^2 dx\, ds}_{\leq F^2(t)} + \underbrace{\left|\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u(x,s)\, u_s(x,s)\, dx\, ds\right|}_{J:=}\end{aligned} \tag{4.7}$$

Observe que podemos obtener las siguientes estimativas, usando la desigualdad de Hölder y desigualdad (4.2)

$$\left|\int_\Omega u(x,t_i)\, u_s(x,t_i)\, dx\right| \leq |u(.,t_i)|_{L^2}\, |u_t(.,t_i)|_{L^2} \leq 2F(t)|u(.,t_i)|_{L^2} \text{ para } i=1,2.$$

Usando la desigualdad de Poincaré, Teorema 2.1, y sumando, tenemos

$$\sum_{i=1}^{2}\left|\int_\Omega u(x,t_i)\, u_s(x,t_i)dx\right| \leq CF(t) \sup_{s\in[t,t+1]} |\nabla u(s)|_{L^2}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} J &\leq \int_{t_1}^{t_2}\left|\int_\Omega u(x,s)\, u_s(x,s)\, dx\right| ds\\ &\leq \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\delta}\,|u(.,s)|_{L^2}\frac{1}{\sqrt{\delta}}\,|u_s(.,s)|_{L^2}\, ds\\ &\leq \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left\{\delta\,|u(.,s)|_{L^2}^2 + \frac{1}{\delta}|u_s(.,s)|_{L^2}^2\right\} ds\\ &\leq \frac{\delta}{2}\int_{t_1}^{t_2}|u(.,s)|_{L^2}^2\, ds + \left\{\delta + \frac{1}{\delta}|u_s(.,s)|_{L^2}^2\right\} ds\\ &\leq \frac{\delta}{2}\int_{t_1}^{t_2} E(s)ds\,\frac{1}{2\delta}F^2(t)\end{aligned}$$

Así I queda mayorado de la siguiente forma

$$I \leq CF(t) \sup_{s\in[t,t+1]}|\nabla u(s)|_{L^2} + F^2(t) + \frac{\delta}{2}\int_{t_1}^{t_2} E(s)\, ds + \frac{1}{2\delta}F^2(t)$$

donde la constante δ es arbitraria y la fijaremos en breve.
Usando la mayoración de I, la ecuación (4,6) queda expresada

$$(1-\frac{\delta}{2})\int_{t_1}^{t_2} E(s)ds \leq (\frac{3}{2}+\frac{1}{2\delta})\, F^2(t) + CF(t) \sup_{s\in[t,t+1]} |\nabla u(s)|_{L^2}$$

Tomando $0<\delta<2$, por ejemplo $\delta=1$ tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} E(s)ds &\leq 2F^2(t) + CF(t) \sup_{s\in[t,t+1]} |\nabla u(s)|_{L^2} \\ &\leq (2+c^2\frac{1}{\delta_0})\, F^2(t) + \delta_0 \sup_{s\in[t,t+1]} |\nabla u(s)|_{L^2} \\ &\leq (2+c^2\frac{1}{\delta_0})\, F^2(t) + \delta_0 \sup_{s\in[t,t+1]} E(s),\end{aligned} \tag{4.8}$$

donde la constante δ_0 es arbitraria y la fijaremos en breve

Desde que $t_2 - t_1 \geq \frac{1}{2}$, tenemos usando (4.5) en (4.8) que

$$E(t^*) \leq 4(2+C^2\frac{1}{\delta_0})\, F^2(t) + 4\delta_0 \sup_{s\in[t,t+1]} E(s) \tag{4.9}$$

También tenemos que

$$E(t^*) \leq E(t^*) + F^2(t) \quad \text{para} \quad s\in[t,t+1] \tag{4.10}$$

Luego, de (4.9) y (4.10) tenemos

$$\sup_{s\in[t,t+1]} E(s) \leq 4(\frac{9}{4}+C^2\frac{1}{\delta_0})\, F^2(t) + 4\delta_0 \sup_{s\in[t,t+1]} E(s),$$

esto es

$$(1-4\delta_0) \sup_{s\in[t,t+1]} E(s) \leq 4(\frac{9}{4}+C^2\frac{1}{\delta_0})\, F^2(t).$$

Tomando $0<\delta_0<\frac{1}{4}$, en particular para $\delta_0=\frac{1}{8}$ tenemos

$$\sup_{s\in[t,t+1]} E(s) \leq \underbrace{8(\frac{9}{4}+8C^2)}_{=\widehat{C_0}}\, F^2(t).$$

Que es lo que queríamos probar.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ADAMS, R. A,, *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York. (1975).

[2] BREZIS H., *Análisis Funcional Teoría y aplicaciones.* Alianza Editorial S. A., (1984).

[3] DAFERMIS, C. M., *Asymptotic behavior of solutions of evolution equations.* in «Nonlinear Evolution Equations», M.G. Grandall Ed., Academic Prees, New York, pp. 103-203. (1978).

[4] LIONS, J.L, *Quelques Méthodes de Résolution des Problems aux limites non lineaires.* Dunod-Gauthier-Villars, Paris. (1960).

[5] LIONS, L.L. and MAGENES, E., *Problemes aux limites non homogenes et applications.* Vol. 1, Paris. (1968).

[6] NAKAO, M., *Convergence of solutions of the wave equation with a local degenerate dissipation.* Israel J. of Maths 95. pp. 25-42. (1996).

[7] NAKAO, M., *Convergence of solutions of the wave equation with nonlinear dissipative term to the steady state.* Memors of the Faculty of Science, Kyushu University. Ser. A., Vol. 30, N° 2, pp. 257-265. (1976).

[8] NAKAO, M., *Decay of solutions of the wave equations with a local nonlinear dissipation.* Math. Ann. 305. pp. 403-417. (1996).

[9] PAZY, A., *Semigroups of Linear Operators and applications to Partial Differential Equations.* Springer, New York. (1983).

[10] RENARDY, M., HRUSA, W. J. and NOHEL, J.A., *Mathematical Problems in Viscoelasticity.* Pirman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 35, John Wiley & Sons, Inc. New York. (1987).

[11] SANTIAGO, Y., *Una aplicación del Lema de Nakao.* Revista de los Departamentos de la Facultad de Ciencias Matemáticas, UNMSM, N° 2 (2006).