PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. IX N° 1, pp. 39 - 62, LIMA - PERÚ. Julio 2006

DECAIMIENTO DE LA ECUACIÓN DE ONDA CON DISIPACIÓN

Yolanda Silva Santiago Ayala[1] y Luis Cortés Vega[2]

RESUMEN.- *En este trabajo consideramos el problema de existencia de soluciones globales para la ecuación escalar de la onda con disipación. Estudiamos también el comportamiento asintótico de las soluciones, y presentamos un método alternativo inspirado en técnicas no lineales; específicamente usamos el método de Conrad-Rao [1].*

PALABRAS CLAVE.- *Ecuación de onda, decaimiento de solución, método de Conrad-Rao.*

ABSTRACT.- *In this work, we consider the problem of existence of global solutions for a scalar wave equation with dissipation. We study also, the asymptotic behaviour of the solutions. In this part of the paper, we present an alternative method - inspired in nonlinear techniques. In order to attack this problem, specifically, we used the Conrad - Rao method [1].*

KEY WORDS.- *Wave equation, decay of the solution, Conrad - Rao method.*

1. INTRODUCCIÓN

Estudiaremos el siguiente problema de evolución

$$u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t = 0 \text{ en } \Omega \times \mathbb{R}^+, \qquad (1.1)$$

$$u = 0 \text{ en } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \qquad (1.2)$$

$$u(0) = u^0, \qquad u_t(0) = u^1. \qquad (1.3)$$

donde Ω es un conjunto abierto acotado en $\mathbb{R}^N$ con frontera suave $\partial\Omega$ y a es una adecuada función no-negativa y suave $(a \geq 0)$ en $\overline{\Omega}$; además, a puede ser nulo en alguna parte de $\overline{\Omega}$.
Definamos por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |u_t|^2 + |\nabla u|^2 \, dx \qquad (1.4)$$

la energía asociada al sistema (1.1) - (1.3). Debido al Lema 4.1 E es no creciente. Así, estamos interesados en saber que sucede con $E(t)$ cuando t va al infinito y cual es la tasa con la cual decae. En este trabajo, estudiamos la existencia de solución global y el comportamiento asintótico, de la ecuación de la onda con disipación, donde era la condición inicial satisface la condición de compatibilidad de m-ésimo orden, la cual nos permite obtener una solución más regular.
Usamos la Teoría de semigrupos para probar la existencia y unidicidad de solución del problema (1.1) - (1.3), también como su dependencia continua del dato inicial.

[1] *Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail:*ysantiagoa@unmsm.edu.pe
[2] *Universidad de Antofagasta, Chile. e-mail:*lcortes@uantof.cl

Asimismo estudiamos la regularidad de esta solución.
Haciendo uso de técnicas multiplicativas [6], obtenemos importantes estimativas como (4.12), (4.16), (4.23). Por una adecuada adaptación del método de Conrad y Rao [1], obtenemos la estimativa (4.44) la cual nos permite probar el Lema 4.3 y por consiguiente la hipótesis del Lema 2.1.
En otro estudio puede ser visto en Nakao [8].
Algunos tópicos relativos a la ecuación de la onda pueden verse en [9], [10], [11] y [13].

2. PRINCIPALES RESULTADOS

Empezamos enunciando el resultado de existencia de solución del problema (1.1) - (1.3).

Teorema 2.1 *Dado* $(u_0, u_1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$, *existe únicamente una solución* $u(x,t)$ *del problema (1.1) - (1.3) en*

$$C^2([0,\infty), L^2(\Omega)) \cap C^1([0,\infty), H_0^1(\Omega)) \cap C([0,\infty), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)).$$

También, necesitamos del siguiente resultado de regularidad de solución, para el cual citamos Kesavan [4] y Ikawa [3]. Introducimos la siguiente definición.

Definición 2.1 *La condición inicial* $(u^0, u^1) \in H^{m+1} \times H^m$ *satisface la condición de compatibilidad de m-ésimo orden asociado a (1.1) - (1.3) si*

$$u^k \in H^{m+1-k} \cap H_0^1 \text{ para } k = 0, 1, \ldots.., m \text{ y } u^{m+1} \in L^2, \tag{2.1}$$

donde la sucesión $(u^k)_k$ *está definido por inducción desde* (u^0, u^1) *por la fórmula*

$$u^{k+2} = \Delta u^k - a(x) u^{k+1}. \tag{2.2}$$

Proposición 2.1 *Sea* $m \geq 1$ *un entero. Supongamos que* $a \in C^{m-1}(\overline{\Omega})$ *y* (u^0, u^1) *satisface la condición de compatibilidada de m-ésimo orden asociado a (1.1) - (1.3).*
Entonces, existe únicamente una solución $u(t)$ *del problema (1.1) - (1.3) tal que*

$$u \in X_m = \bigcap_{k=0}^{m} C^k(\mathbb{R}^+, H^{m+1-k} \cap H_0^1) \cap C^{m+1}(\mathbb{R}^+, L^2), \tag{2.4}$$

es continua. i.e. $\exists C > 0$ *tal que* $\sum_{k=0}^{m+1} \left\| D^k u(t) \right\|_{L^2}^2 \leq C \left\| (u^0, u^1) \right\|_{H^{m+1} \times H^m}^2$, *donde* D^k *denota la diferenciación parcial de k-ésimo orden, con respecto a t y x.*

Supongamos que Ω sea la bola abierta en $\mathbb{R}^N$ centrada en 0 y de radio R. También asumimos que

$\forall |x| \geq \frac{R}{2}$, $a(x) := \tilde{a}(|x|)$, donde $\tilde{a}: \left[\frac{R}{2}, R\right] \to \mathbb{R}^+$ es una función estrictamente decreciente la cual satisface $\tilde{a}(R) = 0$. (Observemos que $\frac{R}{2}$ puede ser reemplazado por cualquier $R - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$). Sea

$$\forall r \in \left[0, \frac{R}{2}\right], \quad b(r) := \tilde{a}(R - r) \quad y \quad B(r) := rb(r). \tag{2.5}$$

Observamos que B es continua y estrictamente creciente en $\left[0, \frac{R}{2}\right]$ y que $B(0) = 0$. También,

$$b(r) \to 0 = \tilde{a}(R) \quad \text{cuando } r \to 0.$$

Esto es

$$a(x) \to 0 \quad \text{cuando } x \to \partial\Omega.$$

Nosotros usaremos el siguiente Lema en la prueba del Teorema Principal

Lema 2.1 *Sea $E: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ una función no creciente y $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ una función C^1 estrictamente creciente tal que*

$$\phi(t) \to +\infty \quad \text{cuando} \quad t \to +\infty. \tag{2.6}$$

Asumamos que existen $\sigma > =$, $\sigma' > 0$ y $c > 0$ tal que

$$\forall s \geq 1, \quad \int_s^{+\infty} E(t)^{1+\sigma} \, \phi'(t) dt \leq cE(s)^{1+\sigma} + c\frac{E(s)}{\phi(s)^{\sigma'}}. \tag{2.7}$$

Entonces existe $C > 0$ dependiendo continuamente de $E(1)$ satisfaciendo

$$\forall t \geq 1, \quad E(t) \leq \frac{C}{\phi(t)^{\frac{(1+\sigma')}{\sigma}}}. \tag{2.8}$$

Prueba.- Ver [12].

El resultado principal de este trabajo es el siguiente:

Teorema 2.2 (Resultado principal) *Supongamos que a va para cero en la frontera, lo suficientemente rápido de modo que existen $p > 0$ y $C > 0$ tal que*

$$\forall s \in \left(0, \frac{R}{2}\right), \quad \int_s^{\frac{R}{2}} \frac{1}{b(r)^p} dr \leq C\frac{s}{b(s)^p}. \tag{2.9}$$

Sea $m > \frac{N}{2}$. *Entonces si* (u^0, u^1) *satisface la condición de compatibilidad de m-ésimo orden; existe* $C > 0$ *la cual depende de la norma de la condición inicial en* $H^{m+1}(\Omega) \times H^m(\Omega)$ *tal que la solución u de (1.1) - (1-3) verifica*

$$E(t) \le C(B^{-1}(\frac{1}{2}))^{\frac{2m}{N}}, \tag{2.10}$$

donde B^{-1} *denota la función de B.*

2.1 Observaciones del Teorema

Observación 2.1 *La Tesis del Teorema dice que la energía asociada al sistema (1.1) - (1.3) va para cero cuando* $t \to +\infty$. *Pues si* $t \to +\infty$ *entonces* $\frac{1}{t} \to 0$ *y como* B^{-1} *es creciente entonces* $B^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \to 0$, *i.e.* $\left(B^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{\frac{2m}{N}} \to 0.$

Observación 2.2 *Si* $\exists n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \ge 2$ *y* $\exists p > 0$ *tal que* $b(r) \le n r^{\frac{1}{p}} b(nr)$, $\forall r \in \left[0, \frac{R}{2n}\right]$. *Entonces se verifica (2.9).*

Observación 2.3 *Si* $b(r) = r^k$ *con* $k > 0$ *y* $pk > 1$, *entonces se verifica (2.9). Por lo tanto, debido al Teorema principal obtenemos*

$$E(t) \le \frac{C}{t^{\frac{1}{(k+1)\theta}}}.$$

Observación 2.4 *Si* $b(r) = \frac{1}{|Lnr|}$ *entonces (2.9) no es verdad.*

Observación 2.5 *Si* $b(r) = r^q e^{-\frac{1}{r^k}}$ *con* $k > 0$ *entonces, podemos aplicar la observación 2.2. Por lo tanto, debido al Teorema principal conseguimos*

$$E(t) \le \frac{C}{\left[(Lnt)^{\frac{1}{k}}\right]^{\frac{2m}{N}}}.$$

3. EXISTENCIA DE SOLUCIÓN

De la ecuación (1.1) escribiendo $v = u_t$ conseguimos.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ \Delta u - a u_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u - a v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & -aI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

definimos el Operador $A : D(A) \subset H \to H$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & -aI \end{pmatrix}$$

donde $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ y $D(A) = H^2(\Omega)\, H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.
Así (1.1) - (1.3) es equivalente a

$$PVI \left| \begin{array}{l} U_t(t) \;=\; AU(t) \\ U(0) \;= U_0 := \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in D(A). \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Teorema 3.1 *El Operador A definido arriba genera $S(t)$ un semigrupo de contracción en un espacio de Hilbert H.*

Prueba.- Observemos que $D(A)$ es denso en *H*. Probaremos que *A* es disipativo.

Sea $U = (u, v)^T \in D(A)$ entonces

$$\begin{aligned} \langle AU, U \rangle &= \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\overline{\partial u}}{\partial x_i}\, dx + \int_\Omega (\Delta u - a(x)v)\overline{v} dx \\ &= \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\overline{\partial u}}{\partial x_i}\, dx + \int_\Omega \Delta u\overline{v} - a(x)|v|^2\, dx \\ &= \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\overline{\partial u}}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\overline{\partial v}}{\partial x_i}\, dx - \int_\Omega a(x)|v|^2\, dx \\ &= \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega 2i\, Im\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\overline{\partial v}}{\partial x_i} \right) dx - \int_\Omega a(x)|v|^2\, dx, \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $Im(z)$ es la parte imaginaria de $z \in \mathbb{C}$. Tomando la parte reald e la igualdad (3.2), tenemos

$$\mathrm{Re}\, \langle AU, U \rangle_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} = - \int_\Omega a(x)|v|^2\, dx \leq 0$$

Ahora, probaremos que $0 \in \rho(A)$. En efecto, sea $F = (f, g)^T \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) = H$, probaremos que existe $U = (u, v)^T \in D(A)$, tal que $AU = F$. Consideremos las ecuaciones

$$v = f \in H_0^1(\Omega) \tag{3.3}$$

$$\Delta u - a(x)v = g \in L^2(\Omega). \tag{3.4}$$

Reemplazando (3.3) en (3.4), tenemos

$$\Delta u = a(x) f + g \in L^2(\Omega). \tag{3.5}$$

Por resultado estandar en ecuaciones lineales elípticas, tenemos que (3.5) tiene únicamente una solución $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. De (3.3) obtenemos $v = f$. Esto es, A es una aplicación sobreyectiva. Afirmamos que A es una aplicación inyectiva. En efecto, sea $AU = 0$ entonces

$$v = 0 \tag{3.6}$$

$$\Delta u - a(x) v = 0. \tag{3.7}$$

Reemplazando (3.6) en (3.7) tenemos $\Delta u = 0$ y usando la identidad de Green tenemos

$$|u|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \int_\Omega \Delta u \overline{u} dx = 0$$

de aquí $u = 0$ in $H_0^1(\Omega)$. De (3.6) tenemos que $v = 0$. Por lo tanto $U = 0$. i.e. A es inyectiva.

Así, existe $A^{-1} : H \to D(A)$ pues A es uno a uno y H es la imagen de A.

Ahora, probaremos que A^{-1} es acotado.
Multiplicando la ecuación (3.5) por $\overline{u}$ e integrando sobre Ω, tenemos

$$\int_\Omega \Delta u \overline{u} dx = \int_\Omega (af + g) \overline{u} dx$$

pero desde que $\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \int_\Omega \Delta u \overline{u} dx$, usando las desigualdades de Holder y Poincaré, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx &= \int_\Omega (af + g) \overline{u} dx \\ &\leq |u|_{L^2} \, |af + g|_{L^2} \\ &\leq \varepsilon \int_\Omega |u|^2 \, dx + C(\varepsilon) \int_\Omega |af + g|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Entonces, tomando $\varepsilon > 0$ tal que $1 - \varepsilon C_p > 0$ tenemos

$$(1 - \varepsilon C_p) \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \leq C(\varepsilon) \int_\Omega |af + g|^2 \, dx,$$

esto es

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \varepsilon C_p} \, |\nabla u|_{L^2} &\leq \sqrt{C(\varepsilon)} \, |af + g|_{L^2} \\ &\leq \frac{\sqrt{C(\varepsilon)}}{\sqrt{1 - \varepsilon C_p}} \{ |a|_\infty |f|_{L^2} + |g|_{L^2} \}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Así, usando (3.8), $v = f$, y las desigualdades de Holder y Poincaré conseguimos

$$\begin{aligned} |U|_H &= |\nabla u|_{L^2} + |v|_{L^2} \\ &= |\nabla u|_{L^2} + |f|_{L^2} \\ &= \hat{C}\{|f|_{L^2} + |g|_{L^2}\} \\ &= \hat{C}\{|\nabla f|_{L^2} + |g|_{L^2}\}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$|U|_H \leq \hat{C}|AU|_H,$$

esto es

$$|A^{-1}F|_H \leq \hat{C}|F|_H,$$

lo cual nos permite decir que A^{-1} es acotado.

Por el Teorema de Lummer Phillips, tenemos que A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo de contracción en $H : S(t)$.

Observación 3.1 *Por el Teorema 4.3.2 en [4], si* $D(A) \ni U$ *entonces* $S(t)U \in C^1([0,\infty), H) \cap C([0,\infty), D(A))$.

Observación 3.2 *Por la observación 4.3.3 en [4] entonces* $U(t) := S(t)U_0$ *es la solución del PVI (3.1) y es única.*

De las dos observaciones, conseguimos el siguiente resultado.

Proposición 3.1 *Existe únicamente una solución de (3.1),*
$U(t) \in C^1([0,\infty), H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)) \cap C([0,\infty), (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$.

Ahora, culminaremos la prueba del Teorema 2.1

Desde que $U_0 = (u^0, u^1) \in D(A)$ por proposición 3.1, obtenemos que existe

$U(t) \in C^1([0,\infty), H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)) \cap C([0,\infty), (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega))$ solución de (3.1) tal que $U(0) = U_0$, $U(t) \in D(A)$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

Desde que U satisface (3.1) tenemos $u_t = v$ y $v_t = \Delta u - av$.

Por otro lado, tenemos $u_t \in C^0(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$, pero desde que $u \in C^0(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$ entonces $u \in C^1(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$.

Por otro lado, $u_{tt} = v_t = \Delta u - au_1 \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$, pero u_t y u pertenecen a $C(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ entonces $u \in C^2(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$. También obtenemos que $u \in C(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$.

Observación 3.3 *Por el Teorema de Hille Yosida (Teorema 4.4.3 en [4]), desde que A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracción, entonces A es cerrado, D(A) es denso en H y* $\forall\lambda > 0, \exists(\lambda I - A)^{-1}$ *acotado, más aún* $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \le \frac{1}{\lambda}$.

Observación 3.4 *Desde A es cerrado y existe* A^{-1} *(probado en* $0 \in \rho(A)$*), entonces* A^{-1} *es también cerrado.*

4. USANDO EL MÉTODO DEL MULTIPLICADOR

Sea $(u^0, u^1) \in H^{m+1}(\Omega) \times H^m(\Omega)$ satisfaciendo la condición de compatibalidad de m-ésimo orden. Entonces, la regularidad dada por (2.3) justifica los cálculos que haremos.
Sabemos que el problema (1.1) - (1.3) es disipativo.

Lema 4.1

$$E'(t) = -\int_\Omega a(x)|u_t|^2\,dx, \ \forall t > 0. \tag{4.1}$$

Prueba.- Multiplicando la ecuación (1.1) por u_t e integrando sobre Ω, y usando la identidad de Green, tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega (u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t)u_t\,dx \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega (u_t)^2 dx\right\} - \int_\Omega (\Delta u)u_t dx + \int_\Omega a(x)(u_t)^2 dx \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega (u_t)^2 dx\right\} - \int_\Omega (\nabla u)\nabla u_t dx + \int_\Omega a(x)(u_t)^2 dx \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega (u_t)^2 dx\right\} + \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right\} + \int_\Omega a(x)(u_t)^2 dx,
\end{aligned}$$

luego se obtiene el resultado.

Sea $\sigma \ge 0$, y $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ una función C^2 cóncova y creciente. **Sea** w **una vecindad** de la frontera $\partial\Omega$.

Lema 4.2 *Sea* $h: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ *un campo vector* $C^1, \sigma \ge 0$ *y* $0 \le S \le T < +\infty$. *Entonces tenemos,*

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\partial\Omega} 2\partial_\nu u h.\nabla u + (h.\nu)(|u_t|^2 - |\nabla u|^2) \\
&= [E^\sigma \phi' \int_\Omega q u_t h\,.\,\nabla u]_S^T - \int_S^T (\sigma E' E^{\sigma-1}\phi' + E^\sigma \phi'')\int_\Omega 2u_t h\,.\,\nabla u \\
&+ \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega (div\ h)(|u_t|^2 - |\nabla u|^2) + 2\sum_{ij}\frac{\partial h_k}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} + 2au_t h\,.\,\nabla u.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Prueba.- Multiplicando la ecuación (1.1) por $E^{\sigma}\phi' 2h\,.\,\nabla u$ e integrando sobre $[S,T]\times\Omega$ tenemos

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} 2h\,.\,\nabla u(u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t)\,dxdt \\
&= \underbrace{\int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} 2h\,.\,(\nabla u)u_{tt}dxdt}_{I_1:=} - \underbrace{\int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} 2h\,.\,\nabla u(\Delta u)\,dxdt}_{I_2:=} + \\
&\int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} 2h\,.\,\nabla u(a(x)u_t)\,dx.\,dt
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Desde que $\frac{\partial}{\partial t}(\int_{\Omega} 2h(\nabla u)u_t dx) = \int_{\Omega} 2h(\nabla u)_t u_t dx + \int_{\Omega} 2h(\nabla u)u_{tt}dx$ e integrado por partes obtenemos

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_S^T E^{\sigma}\phi' \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\Omega} 2h(\nabla u)u_t dx\right)dt - \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} 2h(\nabla u_t)u_t dx\,dt \\
&= \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} 2h(\nabla u_t)u_t dxdt + [E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} 2h(\nabla u)u_t dx]_S^T \\
&= - \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} 2h(\nabla u_t)u_t dxdt.
\end{aligned}
$$

Usando la Identidad de Green tenemos

$$
\begin{aligned}
I_2 &= - \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} 2h\,.\,\nabla u\Delta u\,dx\,dt \\
&= \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} \nabla u.\,\nabla(2h\,.\,\nabla u)dxdt - \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(2h\,.\,\nabla u)dt.
\end{aligned}
$$

Reemplazando I_2 y I_2 en la igualdad (4.3) obtenemos

$$
\begin{aligned}
0 = &- \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} 2h(\nabla u)u_t dxdt \;+ [E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} 2h(\nabla u)u_t dx]_S^T \\
&\underbrace{- \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} 2h(\nabla u_t)u_t dxdt}_{I_3:=} + \underbrace{\int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} \nabla u\,.\,\nabla(2h\,.\,\nabla u)dx\,dt}_{I_4:=} \\
&- \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(2h\,.\,\nabla u)dt + \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} 2h\,.\,\nabla u\,(a(x)u_t)dx.dt
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Usando el hecho que $h\nabla(u_t^2) = div(hu_t^2) - (div\,h)u_t^2$ y el Teorema de la Divergencia $\int_{\partial\Omega} hu_t^2\,.\,\nu = \int_{\Omega} div(hu_t^2)dx$, tenemos

$$I_3 = -\int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega h \,.\, \nabla(u_t^2)\,dxdt$$
$$= -\int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega div(hu_t^2)\,dxdt + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega (div\, h) u_t^2\, dxdt$$
$$= -\int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\partial\Omega} (hu_t^2) \,.\, \nu dxdt + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega (div\, h) u_t^2\, dxdt.$$

Por otro lado, tenemos

$$\nabla u \,.\, \nabla(2h \,.\, \nabla u) = 2\partial_i u \partial_i h_k \partial_k u + h \,.\, \nabla(|\nabla u|^2). \tag{4.5}$$

Y desde que $div(h|\nabla u|^2) = (div h)|\nabla u|^2 + h\nabla(|\nabla u|^2)$ y usando el Teorema de la Divergencia, conseguimos

$$\int_\Omega (div\, h)|\nabla u|^2\, dx + \int_\Omega h\nabla(|\nabla u|^2)\,dx = \int_\Omega div(h|\nabla u|^2)\,dx = \int_{\partial\Omega} h|\nabla u|^2 \,.\, \nu. \tag{4.6}$$

Usando (4.5) y (4.6) obtenemos

$$I_4 = 2\int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega \partial_i u \partial_i h_k \partial_k u dxdt + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega h \,.\, \nabla(|\nabla u|^2)\,dxdt$$
$$= 2\int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega \partial_i u \partial_i h_k \partial_k u dxdt + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\partial\Omega} h|\nabla u|^2 \,.\, \nu dt$$
$$= -\int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega (div\, h)|\nabla u|^2\, dxdt.$$

Reemplazando I_3 y I_4 en la igualdad (4.4), tenemos el resultado.

Lema 4.3 *Existe una constante* $C > 0$ *tal que* $\forall 0 \le S < T < \infty$ *se verifica:*

$$\int_S^T E(t)^{1+\sigma}\phi'(t)\,dt \le C\,E(S)^{1+\sigma} + C\int_S^T E(t)^\sigma \phi'(t)\left(\int_w |u_t|^2\, dx\right)dt. \tag{4.7}$$

Prueba.- Sea K_1 un conjunto compacto de Ω tal que $\Omega - K_1$ sea un compacto en w.

Defina $h(x) := \beta(x)m(x)$, donde $m(x) = x - x_0$ y β es una función C^∞ cuyo soporte está compactamente en Ω y es igual a 1 en K_1. Desde que ϕ' es no creciente y positiva entonces ϕ' está acotado en $\mathbb{R}^+$(i.e. $|\phi'(t)| \le M$).

Ahora, aplicamos (4.2) a esta h y conseguimos

$$0 \ge [E^\sigma \phi' \int_\Omega 2u_t h \,.\, \nabla u]_S^T - \int_S^T (\sigma E' E^{\sigma-1}\phi' + E^\sigma \phi'') \int_\Omega 2u_t h \,.\, \nabla u$$
$$+ \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega div\, h(u_t^2 - |\nabla u|^2) + 2\sum_{ij} \frac{\partial h_k}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} + 2a(x)u_t h \,.\, \nabla u. \tag{4.8}$$

Por otro lado, usando que $\int_\Omega 2h\,.\,\nabla u\,u_t dx \leq cE(t)$ y $E(T)^{\sigma+1} < E(S)^{\sigma+1}$ para $S < T$, tenemos

$$\begin{aligned}
&\left|\int_S^T (\sigma E' E^{\sigma-1}\phi' + E^\sigma \phi'')\,(\int_\Omega 2h\,.\,\nabla u\,u_t dx)\,dx\right| \\
&\leq \int_S^T \left|(\sigma E' E^{\sigma-1}\phi' + E^\sigma \phi'')\,(\int_\Omega 2h\,.\,\nabla u\,u_t dx)\,dx\right| \\
&\leq \int_S^T \left|\sigma E' E^{\sigma-1}\phi' + E^\sigma \phi''\right| cEdt \\
&= \int_S^T \left\{-\sigma E' E^{\sigma-1}\phi' - E^\sigma \phi''\right\} cEdt \\
&\leq cM \int_S^T -\sigma E' E^\sigma dt + cE(S)^{\sigma+1} \int_S^T -\phi'' dt \\
&= cM\,[\frac{\sigma}{\sigma+1} E(t)^{\sigma+1}]_T^S + cE(S)^{\sigma+1} \underbrace{[\phi']_T^S}_{\leq 2M} \\
&\leq cM\,\frac{\sigma}{\sigma+1} E(S)^{\sigma+1} + c2ME(S)^{\sigma+1} \\
&\leq c'E(S)^{\sigma+1}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Y, desde que $E(T) < E(S)$ y por la desigualdad de Holder $\int_\Omega u_t h\,.\,\nabla u dx \leq \|u_t\|\|\nabla u\| \leq E(t)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
-[E^\sigma \phi' \int_\Omega 2u_t h\,.\,\nabla u]_S^T &\leq E^\sigma(T)\phi'(T) \int_\Omega 2u_t(T) h(T)\,.\,\nabla u(T) dx \\
&\quad + E^\sigma(S)\phi'(S) \int_\Omega 2u_t(S) h(S)\,.\,\nabla u(S) dx \\
&\leq E^\sigma(S) C\left\{E(S) + E(T)\right\} \leq CE^{\sigma+1}(S).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Aquí necesitamos hacer la siguiente estimativa

$$\begin{aligned}
-\int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega 2\sum_{ij} \frac{\partial h_k}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} dxdt &\leq \int_S^T E^\sigma \phi' c\|\nabla u\|\|\nabla u\|_{L^2(\Omega-K_1)} dt \\
&\leq \int_S^T E^\sigma \phi' \left\{\varepsilon E(t) + C(\varepsilon)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega-K_1)}\right\} dt,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

donde ε será considerado lo suficientemente pequeño.

Usando las desigualdades (4.9), (4.10) y (4.11) EN (4.8) tenemos que existe $C > 0$ tal que

$$\int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega N u_t^2 + (2-N)|\nabla u|^2 \, dx\, dt$$

$$\leq C \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega - K_1} \{u_t^2 + |\nabla u|^2\} dxdt + CE(S)^{1+\sigma} + \varepsilon \int_S^T E^{1+\sigma} \phi' dt, \qquad (4.12)$$

con ε suficientemente pequeño.

Integrando por partes la expresión:

$$0 = (N-1) \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega u(u_{tt} - \Delta u + a(x) u_t \, dxdt,$$

tenemos

$$(N-1) \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dxdt - (N-1) \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega |u_t|^2 \, dxdt$$

$$= -(N-1)[E^\sigma \phi' \int_\Omega u u_t dx]_S^T$$

$$+ (N-1) \int_S^T (\sigma E^{\sigma-1} E' \phi' + E^\sigma \phi'') \int_\Omega u u_t dxdt$$

$$-(N-1) \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega u a u_t dxdt. \qquad (4.13)$$

Por la desigualdad de Poincaré tenemos $\int_\Omega u u_t dx \leq \|u\| \|u_t\| \leq C_p \|\nabla u\| \|u_t\| \leq CE(t)$. Usando esto en (4.9) obtenemos

$$\left| (N-1) \int_S^T (\sigma E^{\sigma-1} E' \phi' + E^\sigma \phi'') \int_\Omega u u_t dxdt \right| \leq CE(S)^{\sigma+1}. \qquad (4.14)$$

Con una prueba similar a (4.10),también obtenemos

$$-(N-1)[E^\sigma \phi' \int_\Omega u u_t dx]_S^T \leq CE(S)^{\sigma+1}. \qquad (4.15)$$

Sumando (4.12) y (4.13), tomando $\varepsilon < 1$ usando (4.14) y (4.15) tenemos

$$\int_S^T E^{1+\sigma} \phi' \leq \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega u_t^2 + |\nabla u|^2 \, dxdt$$

$$\leq CE(S)^{1+\Omega} + C \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega - K_1} \{u_t^2 + |\nabla u|^2\} dxdt. \qquad (4.16)$$

Queremos eliminar el último término de (4.16). Para hacer esto, construimos una función $\xi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $\xi = 1$ en $\Omega - K_1$ y $\xi = 0$ fuera de w.

Multiplicamos la ecuación (1.1) por ξu e integramos sobre Ω; luego multiplicamos esta expresión por $E^{\sigma}\phi'$, e integramos sobre $[S,T]$, e integrando por partes conseguimos

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} -\xi u a(x) u_t dxdt \\
&= \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} \xi u(u_{tt} - \Delta u) dxdt \\
&= \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} \xi u u_{tt} dxdt - \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} \xi u \Delta u dxdt \\
&= -\int_S^T (\sigma E^{\sigma-1} E^{\sigma}\phi' + E^{\sigma}\phi'') \int_{\Omega} \xi u u_{tt} dxdt \\
&= -\int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} \xi u_t^2 dxdt + [E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} u u_t dx]_S^T \\
&\underbrace{- \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} \xi u \Delta u dxdt}_{I:=}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Usando la Identidad de Green y $\nabla(u^2) = (\nabla u)\, u + u \nabla u$ tenemos

$$\begin{aligned}
I &= \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} \nabla(\xi u) \,.\, \nabla u dxdt \\
&= \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} \{\nabla(\xi) u \,.\, \nabla u + \xi \nabla u \,.\, \nabla u\} dx dt \\
&= \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} \{\frac{1}{2}\nabla(\xi) \,.\, \nabla(u^2) + \xi |\nabla u|^2\} dx dt \\
&= \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} \{\frac{1}{2}(\Delta\xi) u^2 + \xi |\nabla u|^2\} dx.\, dt
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Reemplazando (4.18) en (4.17) obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} -\xi u a(x) u_t dxdt &= -\int_S^T (\sigma E^{\sigma-1} E'\phi + E^{\sigma}\phi'') \int_{\Omega} \xi u u_t dxdt \\
&+ \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} \xi |\nabla u|^2 dxdt + E^{\sigma}\phi \int_{\Omega} u u_t dx]_S^T \\
&= \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} \{\frac{1}{2}(\Delta\xi) u^2 + \xi u_t^2\} dxdt,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

de donde

$$\int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega-K_1} 1\,.\,|\nabla u|^2\,dxdt \le \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} \xi|\nabla u|^2\,dxdt$$

$$= \int_S^T (\sigma E^{\sigma-1}E'\phi' + E^{\sigma}\phi'') \int_{\Omega} \xi\, uu_t dxdt$$

$$+ \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} -\xi ua(x)u_t dxdt \tag{4.20}$$

$$+ \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} \{\frac{1}{2}(\Delta\xi)u^2 + \xi\, u_t^2\}\,dxdt.$$

Desde que ξ es acotada, en forma similar a (4.9), obtenemos

$$\left|\int_S^T (\sigma E^{\sigma-1}E'\phi' + E^{\sigma}\phi'') \int_{\Omega} \xi uu_t dxdt\right| \le C\,E^{1+\sigma}. \tag{4.21}$$

También, usando el hecho que ξ es acotada, similarmente a (4.10) conseguimos

$$-[E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega} uu_t dx]_S^T \le C\,E^{1+\sigma}. \tag{4.22}$$

Y, usando (4.21) y (4.22) en (4.20) obtenemos

$$\int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega-K_1} |\nabla u|^2\,dxdt \le C\,E(S)^{1+\sigma} + C\int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_w (u_t^2 + u^2)dxdt. \tag{4.23}$$

Ahora, para alimentar el último término de (4.23), adaptaremos el método de Conrad y Rao [1].

Sea $\beta \in C^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \le \beta \le 1$, $\beta = 1$ en w y $\beta = 0$ fuera de una vecindad de w.
Fijamos t y consideramos z la solución del problema elíptico:

$$\Delta z = \beta(x)u \;\text{ en }\; \Omega \tag{4.24}$$

$$z|_{\partial\Omega} = 0 \tag{4.25}$$

Multiplicando la ecuación (4.24) por z, ingrando sobre Ω y usando la Identidad de Green, tenemos:

$$\int_{\Omega} \beta(x)u\,zdx = \int_{\Omega} (\Delta z)\,zdx = -\int_{\Omega} |\nabla z|^2\,dx,$$

de aquí, usando las desigualdades de Holder y Poincaré, obtenemos

$$|z|_{L^2}^2 \le C\int_{\Omega} |\nabla z|^2\,dx = -C\int_{\Omega} \beta(x)u\;zdx \le c|u|_{L^2(\Omega)}|z|_{L^2(\Omega)}; \tag{4.26}$$

luego,

$$|z|_{L^2} \leq C|u|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.27}$$

Análogamente a (4.26) obtenemos

$$\begin{aligned} |z|_{L^2}^2 \leq C\int_\Omega |\nabla z|^2\,dx &= -C\int_\Omega \beta(x)u\,z dx \\ &\leq c|\beta u|_{L^2(\Omega)}|z|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c|u|_{L^2(w)}|z|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

luego,

$$|z|_{L^2} \leq C|u|_{L^2(w)}. \tag{4.29}$$

Diferenciando con respecto a t a la ecuación (4.24) tenemos el problema

$$\Delta z_t = \beta(x)u_t \quad \text{en} \quad \Omega \tag{4.30}$$

$$z_t\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4.31}$$

Multiplicando (4.30) por z_t, integrando sobre Ω y usando la Identidad de Green obtenemos

$$\int_\Omega \beta(x)u_t z_t dx = \int_\Omega (\Delta z_t)z_t dx = -\int_\Omega |\nabla z_t|^2\,dx,$$

de aquí, usando las desigualdades de Holder y Poincaré, obtenemos

$$|z_t|_{L^2}^2 \leq C\int_\Omega |\nabla z_t|^2\,dx = -C\int_\Omega \beta(x)u_t\,z_t dx \leq c|u_t|_{L^2(\Omega)}|z_t|_{L^2(\Omega)} \tag{4.32}$$

luego,

$$|z_t|_{L^2} \leq C|u_t|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.33}$$

También

$$\begin{aligned} |z_t|_{L^2}^2 \leq C\int_\Omega |\nabla z_t|^2\,dx &= -C\int_\Omega \beta(x)u_t z_t dx \\ &\leq c|\beta u_t|_{L^2(\Omega)}|z_t|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c|u_t|_{L^2(w)}|z_t|_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{4.34}$$

luego

$$|z_t|_{L^2} \leq C|u_t|_{L^2(w)}. \tag{4.35}$$

Por otro lado,

$$0 = \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega z(u_{tt} - \Delta u + a u_t)\, dxdt$$
$$= [E^\sigma \phi' \int_\Omega z u_t dx]_S^T - \int_S^T (\sigma E' E^{\sigma-1}\phi' + E^\sigma \phi'') \int_\Omega z u_t dx\, dt$$
$$+ \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega (-z\Delta u + a z u_t - z_t u_t) dx\, dt. \tag{4.36}$$

Usando la Identidad de Green y el hecho que z es solución de (4.24) - (4.25) obtenemos

$$\int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega z\, \Delta u\, dxdt = \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega (\Delta z) u\, dx\, dt$$
$$= \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega (\beta(x) u) u\, dx\, dt$$
$$= \int_S^T E^\sigma \phi' \int_w u^2 dx\, dt. \tag{4.37}$$

Usando (4.37) en (4.36) tenemos

$$\int_S^T E^\sigma \phi' \int_w u^2 dx\, dt = \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega z \Delta u\, dx\, dt$$
$$= [E^\sigma \phi' \int_\Omega z u_t dx]_S^T - \int_S^T (\sigma E' E^{\sigma-1}\phi' + E^\sigma \phi'') \int_\Omega z u_t dxdt$$
$$= \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega (a z u_t - z_t u_t) dx\, dt. \tag{4.38}$$

Podemos observar que se verifica la siguiente desigualdad

$$\left| [E^\sigma \phi' \int_\Omega z u_t dx]_S^T - \int_S^T (\sigma E' E^{\sigma-1}\phi' + E^\sigma \phi'') \int_\Omega z u_t dx\, dt \right| \le C\, E(S)^{1+\sigma}. \tag{4.39}$$

Por otro lado, sea $\eta > 0$, usando (4.35) obtenemos

$$\left| \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega z_t u_t dx\, dt \right| \le \int_S^T E^\sigma \phi' C |z_t|_{L^2} |u_t|_{L^2}\, dt$$
$$\le \int_S^T E^\sigma \phi' C |u_t|_{L^2(w)} |u_t|_{L^2}\, dt$$
$$\le \frac{C}{2\eta} \int_S^T E^\sigma \phi' \int_w u_t^2\, dx\, dt + \frac{\eta}{2} \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega u_t^2\, dx\, dt$$
$$\le \frac{C}{2\eta} \int_S^T E^\sigma \phi' \int_w u_t^2\, dx\, dt + \eta \int_S^T E^{\sigma+1} \phi'\, dt, \tag{4.40}$$

donde η será tomado lo suficientemente pequeño.

También, tenemos

$$
\begin{aligned}
\left| \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega z a u_t dx\, dt \right| &\le \int_S^T E^\sigma \phi' \left| \int_\Omega z a u_t dx \right| dt \\
&\le \int_S^T E^\sigma \phi' |z|_{L^2(\Omega)} \left| a u_t \right|_{L^2} dt \\
&\le \int_S^T E^\sigma \phi' C |u|_{L^2(w)} \left| \sqrt{a} u_t \right|_{L^2} dt \\
&\le \gamma \int_S^T E^\sigma \phi' \int_w u^2 dx\, dt + C(\gamma) \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega a u_t^2 dx\, dt \\
&\le \gamma \int_S^T E^\sigma \phi' \int_w u^2 dx\, dt + C(\gamma) \int_S^T E^\sigma \phi' (-E') dt \\
&\le \gamma \int_S^T E^\sigma \phi' \int_w u^2 dx\, dt - C(\gamma) \int_S^T E^\sigma (E') dt, \qquad (4.41)
\end{aligned}
$$

donde γ será tomado muy pequeño. Desde que

$$
\begin{aligned}
-\int_S^T E^\sigma E' \, dt &= -\frac{1}{\sigma+1} [E(t)^{\sigma+1}]_S^T \\
&= \frac{1}{\sigma+1} \{E(S)^{\sigma+1} - E(T)^{\sigma+1}\} \\
&= \frac{1}{\sigma+1} \{E(S)^{\sigma+1}\}
\end{aligned}
$$

entonces (4.41) queda expresada por

$$
\left| \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega z a u_t dx\, dt \right| \le \gamma \int_S^T E^\sigma \phi' \int_w u^2 dx\, dt + C(\gamma)\, E(S)^{\sigma+1}. \qquad (4.42)
$$

Usando (4.39), (4.40) y (4.42) en (4.38), tenemos

$$
\begin{aligned}
(1-\gamma) \int_S^T E^\sigma \phi' \int_w u^2 dx\, dt &\le \frac{C}{\eta} \int_S^T E^\sigma \phi' \int_w u_t^2 dx\, dt \\
&\quad + C\, E(S)^{1+\sigma} + \eta \int_S^T E^{1+\sigma} \phi' dt. \qquad (4.43)
\end{aligned}
$$

Tomando $\gamma < 1$, de (4.43) tenemos que existe $C > 0$ tal que $\forall \eta > 0$ se verifica

$$
\begin{aligned}
\int_S^T E^\sigma \phi' \int_w u^2 dx\, dt &\le \frac{C}{\eta} \int_S^T E^\sigma \phi' \int_w u_t^2 dx\, dt \\
&\quad + C\, E(S)^{1+\sigma} + \eta \int_S^T E^{1+\sigma} \phi' dt, \qquad (4.44)
\end{aligned}
$$

donde η es suficientemente pequeño.

Reemplazando (4.44) en (4.23) conseguimos

$$\begin{aligned}&\int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_{\Omega - K_1} |\nabla u|^2 \, dx\, dt \\ &\leq C\, E(S)^{1+\sigma} + (C + \frac{C}{\eta}) \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_w u_t^2 dxdt + \eta \int_S^T E^{1+\sigma}\phi' dt.\end{aligned} \tag{4.45}$$

Reemplazando (4.45) en (4.16) tenemos

$$(1-\eta)\int_S^T E^{1+\sigma}\phi' dt \leq C\, E(S)^{1+\sigma} + (C + \frac{C}{\eta}) \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_w u_t^2 dxdt$$

y tomando $\eta < 1$ obtenemos

$$\int_S^T E^{1+\sigma'} dt \leq C\, E(S)^{1+\sigma} + C \int_S^T E^{\sigma}\phi' \int_w u_t^2 dxdt.$$

5. CULMINANDO LA PRUEBA DEL TEOREMA PRINCIPAL

Sea $\rho : t \to \rho(t)$ una función decreciente que va para cero cuando t va para el infinito. Posteriormente, eligiremos ρ.

Definamos la función $\tilde{\alpha}$ por

$$\begin{aligned}&\tilde{\alpha}(r,t) := \tilde{\alpha}(r) \qquad &\text{si} \quad \frac{R}{2} \leq r \leq R - \rho(t) \\ &\tilde{\alpha}(r,t) := \tilde{\alpha}(R - \rho(t)) \qquad &\text{si} \quad r \leq R - \rho(t)\end{aligned} \tag{5.1}$$

y la función α en $w \times \mathbb{R}^+$ por

$$\alpha(x,t) := \tilde{\alpha}(|x|, t), \qquad \forall |x| \geq \frac{R}{2}. \tag{5.2}$$

Lema 5.1 (Gagliardo-Niremberg) *Si* $m > \frac{N}{2}$, *existe* $c > 0$ *tal que para cada* $v \in H^m(\Omega)$ *vale*

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|v\|^{\theta}_{H^m(\Omega)} \|v\|^{1-\theta}_{L^2(\Omega)} \quad con \quad \theta = \frac{N}{2m}. \tag{5.3}$$

Ahora, usando (2.3) y (2.4) es posible aplica (5.3) y deducir

$$\|u_t\|^2_{L^\infty(\Omega)} \leq c\|u_t\|^2_{H^m(\Omega)} \underbrace{\|u_t\|^{2(1-\theta)}_{L^2(\Omega)}}_{\leq E(t)^{1-\theta}} \leq C_m \left\|(u^0, u^1\right\|^{2\theta}_{H^{m+1}\times H^m} E(t)^{1-\theta} \tag{5.4}$$

Sea $p > 0$ tal que valga (2.9). Entonces, usando la desigualdad de Jensen y (5.4) estimaremos el último de (4.7).

$$\int_S^T E(t)^\sigma \phi'(t)(\int_w u_t^2 dx)dt$$

$$= \int_S^T E(t)^\sigma (t)(\int_w \frac{1}{\alpha(x,t)} u_t^2\, \alpha(x,t)dx)dt$$

$$\leq \int_S^T E(t)^\sigma \phi'(t)\left\| u_t^2\, \alpha^{\frac{p}{p+1}} \right\|_{L^{\frac{p+1}{p}}} \left\| \alpha^{-\frac{p}{p+1}} \right\|_{L^{p+1}} dt$$

$$= \int_S^T E(t)^\sigma (t)(\int_w \frac{1}{\alpha(x,t)^p} dx)^{\frac{1}{p+1}} (\int_w u_t^{\frac{2(p+1)}{p}}\, \alpha(x,t)dx)^{\frac{p}{p+1}} dt$$

$$= \int_S^T E(t)^\sigma (t)^{\frac{1}{(p+1)}} (\phi'(t)^p \int_w \frac{1}{\alpha(x,t)^p} dx)^{\frac{1}{p+1}} (\int_w u_t^{2+\frac{2}{p}}\, \alpha(x,t)dx)^{\frac{p}{p+1}} dt$$

$$\leq \int_S^T E(t)^\sigma \phi'(t)^{\frac{1}{(p+1)}} (\phi'(t)^p \int_w \frac{1}{\alpha(x,t)^p} dx)^{\frac{1}{p+1}}$$

$$(\int_w u_t^2 \alpha(x,t)dx)^{\frac{p}{p+1}} \|u_t(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{2}{p+1}} dt$$

$$\leq C_m \int_S^T E(t)^{\sigma+\frac{(1-\theta)}{(p+1)}} \phi'(t)^{\frac{1}{(p+1)}} (\phi'(t)^p \int_w \frac{1}{\alpha(x,t)^p} dx)^{\frac{1}{p+1}}$$

$$(\int_w u_t^2 \alpha(x,t)dx)^{\frac{p}{p+1}} dt. \tag{5.5}$$

Para simplificar notaciones, introducimos

$$\varepsilon(t) = \phi'(t)(\int_w \frac{1}{\alpha(x,t)^p} dx)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.6}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Aplicando la desigualdad de Young conseguimos la siguiente estimativa

$$\int_S^T E(t)^\sigma \phi'(\int_w u_t^2 dx)dt$$

$$\leq C_m \int_S^T E(t)^{\sigma+\frac{(1-\theta)}{(p+1)}} \phi'(t)^{\frac{1}{(p+1)}} \varepsilon(t)^{\frac{p}{p+1}} (\int_w u_t^2 \alpha(x,t)dx)^{\frac{p}{p+1}} dt$$

$$\leq C_m \int_S^T \underbrace{E(t)^{\sigma+\frac{(1-\theta)}{(p+1)}} \phi'(t)^{\frac{1}{(p+1)}}}_{\in L^{p+1}} \underbrace{(\varepsilon(t)(\int_w u_t^2 \alpha(x,t)dx)^{\frac{p}{p+1}}}_{\in L^{\frac{p+1}{p}}} dt$$

$$\leq C_m (\int_S^T E(t)^{\sigma(p+1)+(1-\theta)} \phi'(t)dt)^{\frac{p}{(p+1)}} . (\int_S^T \varepsilon(t) \int_w u_t^2 \alpha(x,t)dxdt)^{\frac{p}{p+1}}$$

$$\leq C_m \frac{\varepsilon}{p+1} \int_S^T E(t)^{\sigma(p+1)+(1-\theta)} \phi'(t)dt + C_m \frac{p}{(p+1)\varepsilon} \int_S^T \varepsilon(t) \int_w u_t^2 \alpha(x,t)dxdt. \tag{5.7}$$

σ es definida tal que

$$\sigma(p+1)+(1-\theta)=\sigma+1, \quad \text{esto es} \quad \sigma=\frac{\theta}{p}=\frac{N}{2mp}. \tag{5.8}$$

De (4.7) y (5.7) podemos deducir: si ε es suficientemente pequeño, existe una constante positiva C tal que

$$\int_S^T E(t)^{1+\sigma}\phi'(t)\,dt \le C\,E(S)^{\sigma+1}+C\int_S^T \varepsilon(t)\int_w u_t^2\alpha(x,t)\,dxdt. \tag{5.9}$$

Ahora, eligiendo cuidadosamente ρ y ϕ, estimaremos el último término de (5.9).

La elección de la función ρ

Asumamos que ϕ es una función C^2 cóncava y estrictamente creciente tal que

$$\phi(t)\to+\infty \quad \text{y} \quad \phi'(t)\to 0 \quad \text{cuando} \quad t\to+\infty. \tag{5.10}$$

Lema 5.2 *Si b satisface (2.9), entonces existe $C>0$ tal que*

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{R}{2}}^{R}\frac{1}{\tilde{\alpha}(r,t)^p}\,dr &= \int_{\frac{R}{2}}^{R-\rho(t)}\frac{1}{\tilde{\alpha}(r,t)^p}\,dr+\int_{R-\rho(t)}^{R}\frac{1}{\tilde{\alpha}(r,t)^p}\,dr\\
&= \int_{\frac{R}{2}}^{R-\rho(t)}\frac{1}{\tilde{\alpha}(r)^p}\,dr+\int_{R-\rho(t)}^{R}\frac{1}{\tilde{\alpha}(R-\rho(t))^p}\,dr\\
&= \int_{\rho(t)}^{\frac{R}{2}}\frac{1}{b(r)^p}\,dr+\int_{R-\rho(t)}^{R}\frac{1}{b(\rho(t))^p}\,dr\\
&\le C\frac{\rho(t)}{b(\rho(t))^p}+\frac{\rho(t)}{b(\rho(t))^p}.
\end{aligned}$$

Usando (5.11) obtenemos la siguiente estimativa para ε.

$$\varepsilon(t)\le\phi'(t)\frac{\rho(t)^{\frac{1}{p}}}{b(\rho(t))^p}. \tag{5.12}$$

Desde que b es estrictamente creciente próximo 0, definimos ρ:

$$\rho(t):=b^{-1}(\phi'(t)). \tag{5.13}$$

Observamos que ρ es decreciente, desde que b es creciente y ϕ' es decreciente. De la definición de ρ y (5.12) tenemos

$$\varepsilon(t)\le C_\rho(t)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.14}$$

También, obtenemos

$$\int_w \alpha(x,t)u_t^2dx = \int_{\frac{R}{2}\le|x|\le R-\rho(t)} \alpha(x,t)u_t^2dx + \int_{|x|>R-\rho(t)} \alpha(x,t)u_t^2dx$$
$$\le \int_\Omega a(x)u_t^2dx + \int_{|x|>R-\rho(t)} \tilde{a}(R-\rho(t))u_t^2dx$$
$$\le -E'(t) + b(\rho(t))\,E(t)$$
$$= -E'(t) + \phi'(t)E(t). \tag{5.15}$$

De (5.9), usando (5.15), (5.14), $\rho(t)^{\frac{1}{p}} \le \rho(S)^{\frac{1}{p}}$ y el hecho que E decrece, tenemos

$$\int_S^T E(t)^{\sigma+1}\phi'(t)dt$$
$$\le C\,E(S)^{1+\sigma} + C\int_S^T \varepsilon(t)(-E'(t) + \phi'(t)E(t))\,dt$$
$$\le C\,E(S)^{1+\sigma} + C\int_S^T \rho(S)^{\frac{1}{p}}(-E'(t))dt + C\int_S^T \rho(t)^{\frac{1}{p}}\phi'(t)E(S)dt$$
$$\le C\,E(S)^{1+\sigma} + C\rho(S)^{\frac{1}{p}}\{E(S) - E(T)\}\,C\,E(S)\int_S^T \rho(t)^{\frac{1}{p}}\phi'(t)dt$$
$$\le C\,E(S)^{1+\sigma} + C\rho(S)^{\frac{1}{p}}E(S) + C\,E(S)\int_S^T \rho(t)^{\frac{1}{p}}\phi'(t)dt. \tag{5.16}$$

La elección de la función ϕ

Aquí, mostraremos como definir ϕ de modo que $\int_1^{+\infty} \rho(t)^{\frac{1}{p}}\phi'(t)dt$ sea finito.

Sea $p' > 1 + p$ y defina

$$\psi(t) := +\int_1^t \frac{1}{b\left(\frac{1}{r^{p'}}\right)}dr, \quad \forall t > 1. \tag{5.17}$$

Entonces, ψ es una función C^2 convexa y estrictamente creciente, que satisface

$$\psi(t) \to +\infty \quad \text{y} \quad \psi'(t) = \frac{1}{b\left(\frac{1}{t^{p'}}\right)} \to +\infty \quad \text{cuando } t \to +\infty.$$

Definamos

$$\phi(t) := \psi^{-1}(t), \ \forall t \ge 1. \tag{5.18}$$

Entonces ϕ es una función C^2 cóncava y estrictamente creciente, satisfaciendo

$$\phi(t) \to +\infty \quad \text{y} \quad \phi'(\psi(t)) = \frac{1}{\psi'(t)} \to 0 \text{ cuando } t \to +\infty. \tag{5.19}$$

Así ϕ tiene todas las propiedades que usamos para conseguir (4.7) y (5.16). Usando $\rho(t) = b^{-1}(\phi(t))$

y haciendo un cambio de variables $t=\psi(\tau)$, usando (5.19) y haciendo un otro cambio de variable $\tau=\phi(t)$, y usando $b^{-1}\left(\frac{1}{\psi'(\tau)}\right)=b^{-1}(b\left(\frac{1}{\tau^{p'}}\right)=b^{-1}\circ b\left(\frac{1}{\tau^{p'}}\right)=\tau^{-p'}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty}\rho(t)^{\frac{1}{p}}\phi'(t)dt &= \int_1^{+\infty}[b^{-1}(\phi'(t))]^{\frac{1}{p}}\phi')dt\\
&= \int_1^{+\infty}[b^{-1}(\phi'(\psi(\tau)))]^{\frac{1}{p}}d\tau\\
&= \int_1^{+\infty}[b^{-1}(\frac{1}{\psi'(\tau)})]^{\frac{1}{p}}d\tau\\
&= \int_1^{+\infty}\frac{1}{\tau^{\frac{p'}{p}}}d\tau\\
&= \lim_{M\to+\infty}\frac{1}{\frac{p'}{p}+1}\{M^{-\frac{p'}{p}+1}-1\} \text{ y desde que } -\frac{p'}{p}+1<0\\
&= \frac{1}{\frac{p'}{p}-1}>0.
\end{aligned}$$

Estimativa dependiendo de ϕ

Desde que $\psi\circ\phi=I$ entonces $\psi'(\phi(t))\phi'(t)=1$, y luego $\phi'(t)=\frac{1}{\psi'(\phi(t))}=b\left(\frac{1}{\phi(t)^{p'}}\right)$, de donde deducimos

$$\rho(t)=b^{-1}(\phi'(t))=b^{-1}\circ b(\frac{1}{\phi(t)^{p'}})=\frac{1}{\phi(t)^{p'}}. \tag{5.20}$$

Por otro lado, usando (5.20), obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_S^T\rho(t)^{\frac{1}{p}}\phi'(t)dt &= \int_S^T\frac{1}{\phi(t)^{\frac{p'}{p}}}dt\\
&= \frac{1}{1-\frac{p'}{p}}[\phi(t)^{1-\frac{p'}{p}}]_S^T\\
&= \frac{1}{1-\frac{p'}{p}}\{\phi(t)^{1-\frac{p'}{p}}-\phi(S)^{1-\frac{p'}{p}}\}\\
&= \frac{1}{\frac{p'}{p}-1}\{\phi(S)^{1-\frac{p'}{p}}-\phi(T)^{1-\frac{p'}{p}}\}\\
&\le \frac{1}{\frac{p'}{p}-1}\{\phi(S)^{1-\frac{p'}{p}}\} \text{ puesto que } \phi=\psi^{-1}>0.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Usando (5.20) y (5.21) en (5.16) tenemos

$$\int_S^T E(t)^{\sigma+1}\phi'(t)\,dt \le C\,E(S)^{1+\sigma} + E(S)\frac{C}{\phi(S)^{\frac{p'}{p}}} + E(S)\frac{C}{\phi(S)^{\frac{p'}{p}-1}}$$

$$\le C\,E(S)^{1+\sigma} + E(S)\frac{C}{\phi(S)^{\frac{p'}{p}-1}}. \qquad (5.22)$$

Entonces aplicando el Lema 2.1 desde que (2.7) sucede con $\sigma' = \frac{p'}{p} - 1 > 0$, y deducimos que existe una constante C dependiendo continuamente de $E(1)$, tal que

$$E(t) \le \frac{C}{\phi(t)^{\frac{p'}{p^{\sigma}}}} = \frac{C}{\phi(t)^{\frac{p'}{\theta}}} \quad \forall t \ge 1. \qquad (5.23)$$

Crecimiento de ϕ

Estimar el crecimiento de ϕ es equivalente a acotar la función $\phi^{-1} = \psi$.

Sea T_0 tal que $b\left(\frac{1}{\tau^{p'}}\right) \le 1, \quad \forall \tau \ge T_0$.

Si $s < \tau$ desde que b es creciente tenemos $b\left(\frac{1}{\tau^{p'}}\right) \le b\left(\frac{1}{s^{p'}}\right)$, i.e. $\frac{1}{b\left(\frac{1}{s^{p'}}\right)} \le \frac{1}{b\left(\frac{1}{\tau^{p'}}\right)}$.

Por otro lado, tenemos que: si $p' \ge 1$ se verifica $1 + (\tau - 1)z \le \tau^{p'} z$ para $z \ge 1$ y $\tau \ge 1$. En efecto, basta probar que $1 \le (1 - \tau + \tau^{p'})z$. Si $\tau \ge 1$ entonces $\tau^{p'} - \tau \ge 0$ y así $1 + \tau^{p'} - \tau \ge 1$; luego multiplicando por $z \ge 1$ tenemos $(1 - \tau + \tau^{p'})z \ge 1$.
Usando estas observaciones obtenemos

$$\psi(\tau) = 1 + \int_1^\tau \frac{1}{b\left(\frac{1}{s^{p'}}\right)}ds \le 1 + \frac{1}{b\left(\frac{1}{\tau^{p'}}\right)}\int_1^\tau ds \le 1 + (\tau - 1)\frac{1}{b\left(\frac{1}{\tau^{p'}}\right)}$$

$$\le \tau^{p'} \cdot \frac{1}{b\left(\frac{1}{\tau^{p'}}\right)} = \frac{1}{B\left(\frac{1}{\tau^{p'}}\right)}. \qquad (5.24)$$

Luego, haciendo $t = \frac{1}{B\left(\frac{1}{\tau^{p'}}\right)}$ (esto es $\frac{1}{\tau^{p'}} = B^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)$) y usando (5.24) tenemos $\psi(\tau) \le t$, de donde

tenemos $\tau \le \psi^{-1}(1) = \phi(t)$, esto es

$$\frac{1}{\phi(t)} \le \frac{1}{\tau}. \qquad (5.25)$$

Así, usando (5.25) en (5.23) obtenemos

$$E(t) \leq \frac{C}{\phi(t)^{\frac{p'}{p}}} \leq \frac{1}{\tau^{\frac{p'}{\theta}}} = \left(B^{-1}\left(\tfrac{1}{t}\right)\right)^{\frac{1}{\theta}}, \tag{5.26}$$

donde $\theta = \frac{N}{2m}$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] **Conrad F. and Rao B.** *Decay of solutions of wave equations in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback.* Asympt. Anal. 7, 159 – 177. (1993).

[2] **Cortés L.** *A note on resonant frequencies for a system of elastic wave equations.* Int. J. Math. Sci. 64, 3485 – 3498. (2004).

[3] **Ikawa M.** *Mixed problems for hyperbolics equations of second order.* J. Math. Soc. Japan 20, 580 – 608. (1968).

[4] **Kesavan S.** *Topics in Functional Analysis and applications.* John Wiley & Sons, (1989).

[5] **Pazy A.** *Semigroups of Linear Operator and Applications to Partial Differential Equations,* Springer, New York, (1983).

[6] **Komornik V.** *Exact controllabity and stabilization.* John Wiley & Sons. (1994).

[7] **Martinez P.** *Decay of solutions of the wave equation with a local highly degenerate dissipation.* Asymptotic Analysis 19, 1 – 17. (1999).

[8] **Nakao M.** *Decay of solutions of the wave equation with a local degenerate dissipation.* Israel J. Of Maths 95, P, 25-42. (1996).

[9] **Santiago Y. A.** *Una aplicación del Lema de Nakao.* Revista de los Departamentos de la Facultad de Ciencias Matemáticas, UNMSM, Nro. 2 (2006).

[10] **Santiago Y. A.** *Decaimiento exponencial de la solución débil de una ecuación de onda no lineal.* PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la UNMSM. Vol VIII Nro. 2, Diciembre, pág 29 – 43. (2005).

[11] **Santiago Y. A. and Rivera J.** *Global existence and exponential decay to the wave equation with localized frictional damping.* PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la UNMSM. Vol. V. Nro. 2, Diciembre, pág. 1 – 19. (2002).

[12] **Santiago Y. A.** *Algunas desigualdades integrales y aplicaciones.* (2006).

[13] **Zuazua E.** *Exponential decay for the semi-linear equation with locally distributed damping.* Comm. Partial Differential Equations 15, 205-235. (1990).