PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. IX N°2, pp 31 - 49, LIMA - PERÚ. Diciembre 2006

Espectro de Fučik para el problema de valor frontera Sturm-Liouville

Santiago César Rojas Romero[1]
srojasr@unmsm.edu.pe

Resumen

En este trabajo consideramos la ecuación de Fučik en $\Omega =< 0, \pi >$ con condiciones de frontera Sturm-Liouville. Obtenemos su espectro de Fučik, así como la descripción completa y las propiedades de las curvas contenidas en él.

Palabras Clave: *Ecuación de Fučik, Condiciones de frontera tipo Sturm-Liouville, Espectro de Fučik.*

Abstract

In this article, we consider the Fučik equation in $\Omega =< 0, \pi >$ with Sturm-Liouville boundary conditions. We obtain its Fučik spectrum also the complete description and properties of the curves on it.

Keywords: *Fučik equation, Sturm-Liouville boundary conditions, Fučik Spectrum.*

1. Introducción

La ecuación diferencial

$$w'' = -\mu^2 w^+ + \lambda^2 w^- \quad ,$$

donde $w^+ = \max\{w, 0\}$ y $w^- = \max\{-w, 0\}$, es llamada la ecuación de Fučik. Consideramos el siguiente problema de valor frontera Sturm-Liouville

$$\begin{cases} w'' = -\mu^2 w^+ + \lambda^2 w^- , \\ w(0)\cos\alpha - w'(0)\operatorname{sen}\alpha = 0 , \\ w(\pi)\cos\beta - w'(\pi)\operatorname{sen}\beta = 0 , \end{cases} \tag{1.1}$$

donde

$$0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \le \beta \le \pi .$$

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, Lima - Perú.

En el presente trabajo hallaremos el Espectro de Fučik de este problema, es decir, hallaremos el conjunto de pares (λ, μ) para los cuales el problema (1.1) tiene soluciones no triviales.

En Fučik [2] y Rojas [3] se hace un estudio del espectro de Fučik para el caso $\alpha = 0$ y $\beta = \pi$, es decir para el problema tipo Dirichlet:

$$\begin{cases} w'' = -\mu^2 w^+ + \lambda^2 w^- \,, \\ w(0) = w(\pi) = 0 \quad , \end{cases} \tag{1.2}$$

obteniendo que éste consta de curvas separadas. Más exactamente, se prueba que (λ, μ) está en el espectro de Fučik de (1.2) si y sólo si se cumple una de las siguientes condiciones:

- $\mu = 1$, λ arbitrario ,
- μ arbitrario , $\lambda = 1$,
- $\mu > 1$, $\lambda > 1$, $\frac{k}{\mu} + \frac{k}{\lambda} = 1$, $k \in I\!N$,
- $\mu > 1$, $\lambda > 1$, $\frac{k+1}{\mu} + \frac{k}{\lambda} = 1$, $k \in I\!N$,
- $\mu > 1$, $\lambda > 1$, $\frac{k}{\mu} + \frac{k+1}{\lambda} = 1$, $k \in I\!N$.

Estas curvas también pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} F_0^+ &: \quad \mu = 1\,, \\ F_0^- &: \quad \lambda = 1\,, \\ F_{2k-1}^\pm &: \quad \frac{k}{\mu} + \frac{k}{\lambda} = 1\,, \\ F_{2k}^+ &: \quad \frac{k+1}{\mu} + \frac{k}{\lambda} = 1\,, \\ F_{2k}^- &: \quad \frac{k}{\mu} + \frac{k+1}{\lambda} = 1 \quad , \quad \forall k \in I\!N\,, \end{aligned}$$

donde el subíndice indica el número de ceros de las respectivas soluciones no triviales w de (1.2) en el intervalo $< 0, \pi >$ y el signo $+$ ó $-$ indica si $w'(0) > 0$ ó $w'(0) < 0$, respectivamente.

Nuestro estudio para el caso general

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \pi\,,$$

está basado en la reducción del problema (1.1) a otro de primer orden introduciendo coordenadas polares.

La parte restante del trabajo está organizada como sigue: en la sección 2 enunciamos y probamos nuestros principales resultados. En las secciones 3 y 4 obtenemos las expresiones analíticas y las propiedades de las diferentes ramas del espectro de Fučik del problema (1.1). Finalmente, en la sección 5 presentamos dos casos específicos del problema en estudio.

2. Coordenadas Polares y Principales Resultados

Tenemos como centro de nuestro estudio la ecuación diferencial

$$w'' = -\mu^2 w^+ + \lambda^2 w^- \quad . \tag{2.1}$$

Introducimos las coordenadas polares

$$w = \rho \operatorname{sen}\varphi \tag{2.2}$$

$$w' = \rho \cos\varphi \tag{2.3}$$

donde $\rho(t)$ es la distancia de un punto $(w(t), w'(t))$ al origen y $\varphi(t)$ es el ángulo entre el vector $(w(t), w'(t))$ y el eje vertical.
Así , la función $f(w) = -\mu^2 w^+ + \lambda^2 w^-$ en coordenadas polares se escribe como

$$f(\rho, \varphi) = \begin{cases} -\mu^2 \rho \operatorname{sen}\varphi & , \quad \operatorname{sen}\varphi \geq 0\,, \\ -\lambda^2 \rho \operatorname{sen}\varphi & , \quad \operatorname{sen}\varphi < 0\,, \end{cases} \tag{2.4}$$

y tenemos la siguiente proposición

Proposición 2.1 *Para las soluciones de la ecuación (2.1) con condiciones iniciales* $\varphi(0) = \varphi_0$ *y* $\rho(0) = \rho_0$ *, el ángulo* $\varphi(t)$ *cambia al valor* $\varphi(T) = \varphi$ *en el tiempo* T *, para cualquier* $\rho_0 > 0$ *.*

Prueba.- Derivando (2.2) respecto a t, obtenemos

$$w' = \rho' \operatorname{sen}\varphi + \rho \varphi' \cos\varphi$$

y usando (2.3) tenemos

$$\rho' \operatorname{sen}\varphi + \rho \varphi' \cos\varphi = \rho \cos\varphi \tag{2.5}$$

Ahora derivamos (2.3) respecto a t y obtenemos

$$w'' = \rho' \cos\varphi - \rho \varphi' \operatorname{sen}\varphi$$

Usando (2.1) llegamos a

$$\rho' \cos\varphi - \rho \varphi' \operatorname{sen}\varphi = f(\rho, \varphi) \tag{2.6}$$

Así , en lugar de la ecuación (2.1) llegamos al sistema formado por las ecuaciones (2.5) y (2.6)

$$\begin{cases} \rho' \operatorname{sen}\varphi + \rho \varphi' \cos\varphi = \rho \cos\varphi \\ \rho' \cos\varphi - \rho \varphi' \operatorname{sen}\varphi = f(\rho, \varphi) \end{cases} \tag{2.7}$$

El cual nos conduce al sistema

$$\begin{cases} \rho' = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + f(\rho, \varphi) \cos\varphi \\ \varphi' = -\frac{1}{\rho} f(\rho, \varphi) \operatorname{sen}\varphi + \cos^2\varphi \end{cases}$$

Y usando (2.4) , tenemos

$$\varphi' = F(\varphi) = \begin{cases} \mu^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi & , \quad \operatorname{sen}\varphi \geq 0 \\ \lambda^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi & , \quad \operatorname{sen}\varphi < 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Como puede verse en (2.8) , la función $\varphi(t)$ es creciente pues $\varphi' > 0$, y la derivada de $\varphi(t)$ es independiente de $\rho(t)$. □

De esta manera, nuestro problema en estudio se convierte en

$$\begin{cases} \varphi' = \begin{cases} \mu^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi & , \quad \operatorname{sen}\varphi \geq 0 \\ \lambda^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi & , \quad \operatorname{sen}\varphi < 0 \end{cases} \\ \varphi(0) = \alpha \ , \ \varphi(\pi) = \beta \end{cases}$$

donde

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \pi \, .$$

La interpretación geométrica de este problema es : hallar la curva integral que empieza en la recta $\varphi(0) = \alpha$ y termina en $\varphi(\pi) = \beta$.
A continuación presentamos los resultados que nos permiten resolver este problema .

Proposición 2.2 *La solución del problema*

$$\begin{cases} \varphi' = k^2 \, sen^2\varphi + \cos^2\varphi & , \ k > 0 \\ \varphi(t_0) = \varphi_0 \, , \end{cases}$$

siendo $0 \leq \varphi_0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ *, es dada por*

$$\frac{1}{k} \arctan(k \tan\varphi) - \frac{1}{k} \arctan(k \tan\varphi_0) = t - t_0 \quad .$$

Prueba.- De la ecuación, tenemos

$$\frac{d\varphi}{k^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi} = dt \quad .$$

Ahora, integramos y llegamos a

$$\int_{t_0}^{t} dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{k^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{sec^2\varphi \, d\varphi}{k^2 \tan^2\varphi + 1} = \frac{1}{k} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d(k\tan\varphi)}{(k\tan\varphi)^2 + 1} \quad ,$$

es decir

$$t - t_0 = \frac{1}{k} \arctan(k\tan\varphi) \, |_{\varphi_0}^{\varphi} = \frac{1}{k} \arctan(k\tan\varphi) - \frac{1}{k} \arctan(k\tan\varphi_0) \quad . \square$$

Proposición 2.3 *La solución del problema*

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi' = k^2 \, sen^2\varphi + \cos^2\varphi \quad , \; k > 0 \\ \varphi(t_0) = \varphi_0 \, , \end{array} \right.$$

siendo $0 \leq \varphi_0 < \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$ *, es dada por*

$$\frac{1}{k} \arctan (k \tan \varphi) + \frac{\pi}{k} - \frac{1}{k} \arctan (k \tan \varphi_0) = t - t_0 \quad .$$

Prueba.- Por hipótesis $\frac{\pi}{2} \in < \varphi_0 \, , \varphi >$. Entonces la integral de la derecha en

$$\int_{t_0}^{t} dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{k^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi}$$

es igual a la suma de dos integrales:

$$\begin{aligned}
t - t_0 &= \frac{1}{k} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d(k \tan \varphi)}{(k \tan \varphi)^2 + 1} \\
&= \frac{1}{k} \left\{ \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(k \tan \varphi)}{(k \tan \varphi)^2 + 1} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{d(k \tan \varphi)}{(k \tan \varphi)^2 + 1} \right\} \\
&= \frac{1}{k} \left\{ \lim_{\epsilon_1 \to 0} \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2} - \epsilon_1} \frac{d(k \tan \varphi)}{(k \tan \varphi)^2 + 1} + \lim_{\epsilon_2 \to 0} \int_{\frac{\pi}{2} + \epsilon_2}^{\varphi} \frac{d(k \tan \varphi)}{(k \tan \varphi)^2 + 1} \right\} \\
&= \frac{1}{k} \left\{ \lim_{\epsilon_1 \to 0} [\arctan (k \tan(\frac{\pi}{2} - \epsilon_1)) - \arctan (k \tan \varphi_0)] \quad + \right. \\
&\qquad \left. + \quad \lim_{\epsilon_2 \to 0} [\arctan (k \tan \varphi) - \arctan (k \tan(\frac{\pi}{2} + \epsilon_2))] \right\} \\
&= \frac{1}{k} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctan (k \tan \varphi_0) + \arctan (k \tan \varphi) + \frac{\pi}{2} \right\} \\
&= \frac{1}{k} \arctan (k \tan \varphi) + \frac{\pi}{k} - \frac{1}{k} \arctan (k \tan \varphi_0) \, . \, \square
\end{aligned}$$

Proposición 2.4 *Sea el problema*

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi' = \left\{ \begin{array}{lll} \mu^2 sen^2\varphi + \cos^2\varphi & , & sen\varphi \geq 0 \, , \\ \lambda^2 sen^2\varphi + \cos^2\varphi & , & sen\varphi < 0 \, , \end{array} \right. \\ \varphi(t_0) = \varphi_0 \, . \end{array} \right.$$

Si $2n\pi \leq \varphi_0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ *o* $\frac{\pi}{2} + 2n\pi \leq \varphi_0 \leq \varphi \leq \pi + 2n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *, entonces la solución satisface*

$$\frac{1}{\mu} \arctan (\mu \tan \varphi) - \frac{1}{\mu} \arctan (\mu \tan \varphi_0) = t - t_0 \quad .$$

Si $2n\pi \leq \varphi_0 < \frac{\pi}{2} + 2n\pi < \varphi \leq \pi + 2n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *, entonces la solución satisface*

$$\frac{1}{\mu} \arctan (\mu \tan \varphi) + \frac{\pi}{\mu} - \frac{1}{\mu} \arctan (\mu \tan \varphi_0) = t - t_0 \quad .$$

Prueba.- Por hipótesis, $2n\pi \leq \varphi_0 \leq \varphi \leq \pi + 2n\pi$ y por ello $\operatorname{sen}\varphi \geq 0$. Luego, en este intervalo de valores de φ , el problema se reduce a

$$\begin{cases} \varphi' = \mu^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi \,, \\ \varphi(t_0) = \varphi_0 \,. \end{cases}$$

Usando las proposiciones 2.2 y 2.3 obtenemos el resultado . □

Proposición 2.5 *Sea el problema*

$$\begin{cases} \varphi' = \begin{cases} \mu^2 sen^2\varphi + \cos^2\varphi & , \quad sen\varphi \geq 0 \\ \lambda^2 sen^2\varphi + \cos^2\varphi & , \quad sen\varphi < 0 \end{cases} \\ \varphi(t_0) = \varphi_0 \,. \end{cases}$$

Si $\pi + 2n\pi \leq \varphi_0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ *o* $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi \leq \varphi_0 \leq \varphi \leq 2\pi + 2n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *entonces la solución satisface*

$$\frac{1}{\lambda} \arctan(\lambda \tan\varphi) - \frac{1}{\lambda} \arctan(\lambda \tan\varphi_0) = t - t_0 \quad .$$

Si $\pi + 2n\pi \leq \varphi_0 \leq \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \leq \varphi \leq 2\pi + 2n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *entonces la solución satisface*

$$\frac{1}{\lambda} \arctan(\lambda \tan\varphi) + \frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \arctan(\lambda \tan\varphi_0) = t - t_0 \quad .$$

Prueba.- De la hipótesis, $\pi + 2n\pi \leq \varphi_0 \leq \varphi \leq 2\pi + 2n\pi$ y de ahí que $\operatorname{sen}\varphi \leq 0$. Luego, en este intervalo de valores de φ , el problema se reduce a

$$\begin{cases} \varphi' = \lambda^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi \,, \\ \varphi(t_0) = \varphi_0 \,. \end{cases}$$

Nuevamente, usando las proposiciones 2.2 y 2.3 obtenemos el resultado . □

3. Espectro de Fučik para el problema de valor frontera Sturm-Liouville

En esta sección obtendremos el Espectro de Fučik para el problema

$$\begin{cases} w'' = -\mu^2 w^+ + \lambda^2 w^- \,, \\ w(0)\cos\alpha - w'(0)\operatorname{sen}\alpha = 0 \,, \\ w(\pi)\cos\beta - w'(\pi)\operatorname{sen}\beta = 0 \,, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \pi \,. \end{cases} \tag{3.1}$$

Denotamos con F_k^+ y F_k^-, $k = 0, 1, 2, \ldots$, las diferentes ramas del espectro, donde el subíndice indica el número exacto de ceros que tiene las respectivas soluciones no triviales $w(t)$ en el

intervalo $< 0, \pi >$ y el signo indica si $w'(0) > 0$ ó $w'(0) < 0$.
Hallaremos el espectro de (3.1) resolviendo la ecuación

$$\varphi' = \begin{cases} \mu^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi\,, & \text{si } \operatorname{sen}\varphi \geq 0 \\ \lambda^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi\,, & \text{si } \operatorname{sen}\varphi < 0\,, \end{cases} \tag{3.2}$$

con las condiciones de frontera $\varphi(0) = \alpha$, $\varphi(\pi) = \beta$.
En primer lugar, obtendremos las ecuaciones de las ramas F_0^+, F_0^-, F_1^+, F_1^-, F_2^+ y F_2^-. Luego, generalizamos el estudio obteniendo fórmulas para las ramas F_k^+ y F_k^-, $\forall k \in I\!N$.

3.1. La rama F_0^+

Esta rama del espectro de (3.1) está formada por todos los puntos (λ, μ) que dan lugar a soluciones $w(t)$ del problema (3.1) tales que $w(t) > 0$, $\forall t \in < 0, \pi >$.
Por las condiciones de frontera, la recta asociada a estas soluciones gira en el plano de fase un ángulo igual a $\beta - \alpha$ en el tiempo $T = \pi$, y para cualquier t en este intervalo de tiempo tenemos que $\operatorname{sen}\varphi \geq 0$.
Entonces, el problema (3.2) con las condiciones de frontera se reduce al problema

$$\begin{cases} \varphi' = \mu^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi\,, \\ \varphi(0) = \alpha\,, \\ \varphi(\pi) = \beta\,. \end{cases}$$

y usando la proposición 2.4 , tenemos que

$$\frac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan\beta) + \frac{\pi}{\mu} - \frac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan\alpha) = \pi\,. \tag{3.3}$$

Así, la rama F_0^+ consiste en todos los puntos (λ, μ) que resuelven la ecuación (3.3).

3.2. La rama F_0^-

Esta rama del espectro está formada por todos los puntos (λ, μ) que dan lugar a soluciones $w(t)$ del problema (3.1) que satisfacen $w(t) < 0$, $\forall t \in < 0, \pi >$.
Para estas soluciones, la recta asociada a ellas en el plano de fase gira un ángulo igual a $\beta - \alpha$ en el tiempo $T = \pi$, y para todo t en este intervalo de tiempo se tiene que $\operatorname{sen}\varphi \leq 0$.
Entonces, el problema (3.2) con las condiciones de frontera se reduce al problema

$$\begin{cases} \varphi' = \lambda^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi\,, \\ \varphi(0) = \alpha + \pi\,, \\ \varphi(\pi) = \beta + \pi\,. \end{cases}$$

De aquí, usando la proposición 2.5, tenemos que

$$\frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan(\beta+\pi)) + \frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan(\alpha+\pi)) = \pi\,,$$

o lo que es igual a

$$\frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\beta) + \frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\alpha) = \pi\,. \tag{3.4}$$

Así, la rama F_0^- consiste en todos los puntos (λ, μ) que resuelven la ecuación (3.4).

3.3. La rama F_1^+

Esta rama está formada por todos los puntos (λ, μ) que dan lugar a soluciones $w(t)$ del problema (3.1), las cuales tienen exactamente un cero en el intervalo $< 0, \pi >$ y satisfacen $w'(0) > 0$.
En este caso, la recta asociada a tales soluciones gira en el plano de fase un ángulo igual a $\pi + \beta - \alpha$ en el tiempo $T = \pi$. El intervalo $[0, \pi]$ es descompuesto en dos intervalos $J_{T_1} := [0, T_1]$ y $J_{T_2} := [T_1, \pi]$, donde $T_2 := \pi - T_1$. La recta en el plano de fase gira en el tiempo T_1 desde el ángulo α hasta π, y en consecuencia sen$\varphi \geq 0$. Para el resto del tiempo T_2, la recta en el plano de fase gira desde el ángulo π hasta $\pi + \beta$, y para los respectivos valores de t se tiene que sen$\varphi \leq 0$.
En el intervalo J_{T_1} el problema (3.2) se reduce al problema

$$\begin{cases} \varphi' = \mu^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi\,, \\ \varphi(0) = \alpha\,, \\ \varphi(T_1) = \pi\,, \end{cases}$$

y en el intervalo J_{T_2} se reduce a

$$\begin{cases} \varphi' = \lambda^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi\,, \\ \varphi(T_1) = \pi\,, \\ \varphi(\pi) = \beta + \pi\,. \end{cases}$$

Usando las proposiciones 2.4 y 2.5, obtenemos que

$$T_1 = \frac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan\pi) + \frac{\pi}{\mu} - \frac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan\alpha)$$

o

$$T_1 = \frac{\pi}{\mu} - \frac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan\alpha)\,,$$

y

$$\pi - T_1 = \frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan(\beta+\pi)) + \frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\pi)\,,$$

o

$$T_2 = \frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\beta) + \frac{\pi}{\lambda}\,.$$

Introduciendo la notación $\gamma = \pi - \beta$, tenemos

$$T_2 = \frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\gamma)\,,$$

y como $T_1 + T_2 = \pi$, llegamos a la relación

$$[\frac{\pi}{\mu} - \frac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan\alpha)] + [\frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\gamma)] = \pi\,. \tag{3.5}$$

De este modo, la rama F_1^+ consiste en todos los puntos (λ, μ) que satisfacen la ecuación (3.5).

3.4. La rama F_1^-

Esta rama la forman todos los puntos (λ, μ) que dan lugar a soluciones $w(t)$ del problema (3.1), las cuales tienen exactamente un cero en el intervalo $< 0, \pi >$, y satisfacen $w'(0) < 0$. La respectiva recta en el plano de fase gira un ángulo igual a $\pi + \beta - \alpha$ en el tiempo $T = \pi$. El intervalo $[0, \pi]$ se descompone en los intervalos $J_{T_1} := [0, T_1]$ y $J_{T_2} := [T_1, \pi]$, donde $T_2 := \pi - T_1$. En el tiempo T_1, la respectiva recta en el plano de fase gira desde el ángulo $\pi + \alpha$ hasta 2π, y para $t \in J_{T_1}$ se tiene que $\text{sen}\varphi \le 0$. En el tiempo restante T_2 la recta gira desde el ángulo 2π a $2\pi + \beta$, y para $t \in J_{T_2}$ tenemos que $\text{sen}\varphi \ge 0$.
En el intervalo J_{T_1}, el problema (3.2) se reduce a la ecuación

$$\begin{cases} \varphi' = \lambda^2 \text{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi. \\ \varphi(0) = \pi + \alpha \\ \varphi(T_1) = 2\pi \end{cases}$$

De la cual, usando la proposición 2.3 obtenemos que

$$\frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan 2\pi) + \frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan(\pi + \alpha)) = T_1$$

o

$$\frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\alpha) = T_1$$

En el intervalo J_{T_2}, el problema (3.2) se reduce a

$$\begin{cases} \varphi' = \mu^2 \text{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi \\ \varphi(T_1) = 2\pi \\ \varphi(\pi) = 2\pi + \beta \end{cases}$$

Usando la proposición 2.4, obtenemos que

$$\pi - T_1 = \frac{1}{\mu}\arctan\mu\tan(2\pi + \beta) + \frac{\pi}{\mu} - \frac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan 2\pi)\,,$$

o

$$T_2 = \frac{\pi}{\mu} - \frac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan\gamma)$$

donde $\gamma = \pi - \beta$. Y como $T_1 + T_2 = \pi$, tenemos la siguiente relación

$$[\frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\alpha)] + [\frac{\pi}{\mu} - \frac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan\gamma)] = \pi\,. \tag{3.6}$$

Así, la rama F_1^- del espectro de (3.1) consiste de todos los puntos (λ, μ) que satisfacen la ecuación (3.6).

3.5. La rama F_2^+

Esta rama está formada por todos los puntos (λ, μ) que dan lugar a soluciones $w(t)$ del problema (3.1), las cuales tienen exactamente dos ceros en el intervalo $< 0, \pi >$ y satisfacen $w'(0) > 0$.

La linea recta asociada a tales soluciones, gira en el plano de fase un ángulo igual a $2\pi + \beta - \alpha$ en el tiempo $T = \pi$. El intervalo $[0, \pi]$ se descompone en tres intervalos $J_{T_1} := [0, T_1]$, $J_{T_2} := [T_1, T_1 + T_2]$ y $J_{T_3} := [\pi - T_3, \pi]$, donde $T_3 := \pi - T_1 - T_2$. En el tiempo T_1 la recta en el plano de fase gira desde el ángulo α a π, y por tanto sen$\varphi \geq 0$; en el tiempo T_2 gira desde el ángulo π a 2π, y para los respectivos valores de t, sen$\varphi \leq 0$; en el tiempo T_3 restante la recta gira desde el ángulo 2π a $2\pi + \beta$, y sen$\varphi \geq 0$.

En la subsección 3.3 calculamos el tiempo necesario para la rotación desde el ángulo α a π, esto es,

$$T_1 = \frac{\pi}{\mu} - \frac{1}{\mu} \arctan(\mu \tan \alpha).$$

Para hallar el tiempo T_2, necesario para la rotación del ángulo π a 2π, usamos la proposición 2.3

$$T_2 = \frac{1}{\lambda} \arctan(\lambda \tan 2\pi) + \frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \arctan(\lambda \tan \pi) = \frac{\pi}{\lambda}.$$

El tiempo necesario para la rotación desde el ángulo 2π a $2\pi + \beta$ ya fue calculado en la subsección 3.4, por tanto el tiempo T_3 es conocido:

$$T_3 = \frac{\pi}{\mu} - \frac{1}{\mu} \arctan(\mu \tan \gamma),$$

donde $\gamma = \pi - \beta$. Ahora, usamos la relación $T_1 + T_2 + T_3 = \pi$ y llegamos a la fórmula

$$[\frac{\pi}{\mu} - \frac{1}{\mu} \arctan(\mu \tan \alpha)] + \frac{\pi}{\lambda} + [\frac{\pi}{\mu} - \frac{1}{\mu} \arctan(\mu \tan \gamma)] = \pi. \tag{3.7}$$

Así, la rama F_2^+ consiste en todos los puntos (λ, μ) que satisfacen la ecuación (3.7).

3.6. La rama F_2^-

Esta rama del espectro la forman los puntos (λ, μ), para los cuales las soluciones $w(t)$ del problema (3.1) tienen exactamente dos ceros en el intervalo $< 0, \pi >$ y satisfacen $w'(0) < 0$. En este caso, la recta en el plano de fase gira un ángulo igual a $2\pi + \beta - \alpha$ en el tiempo $T = \pi$. El intervalo se descompone en tres subintervalos: $J_{T_1} := [0, T_1]$, $J_{T_2} := [T_1, T_1 + T_2]$ Y $J_{T_3} := [\pi - T_1, \pi]$, donde $T_3 := \pi - T_1 - T_2$. En el tiempo T_1, la recta en el plano de fase gira desde el ángulo $\pi + \alpha$ a 2π. Y por tanto, sen$\varphi \leq 0$; en el tiempo T_2, la recta gira desde 2π a 3π y para esos valores de t se tiene sen$\varphi \geq 0$; en el tiempo T_3 restante la recta gira desde el ángulo 3π a $3\pi + \beta$, siendo sen$\varphi \leq 0$ para estos valores de t.

Ahora, usamos los resultados previamente obtenidos. En la subsección 3.4 hallamos el tiempo necesario para que la recta en el plano de fase gire desde el ángulo $\pi + \alpha$ a 2π, esto es

$$T_1 = \frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \arctan(\lambda \tan \alpha).$$

Usando la proposición 2.4, obtenemos que el tiempo T_2 necesario para que la recta gire de 2π a 3π, es igual a

$$T_2 = \frac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan 3\pi) + \frac{\pi}{\mu} - \frac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan 2\pi) = \frac{\pi}{\mu}.$$

Similarmente, el tiempo T_3 necesario para el giro desde el ángulo 3π a $3\pi + \beta$, se calcula usando la proposición 2.5:

$$T_3 = \frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\gamma),$$

donde $\gamma = \pi - \beta$. Como $T_1 + T_2 + T_3 = \pi$, obtenemos

$$[\frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\alpha)] + \frac{\pi}{\mu} + [\frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\gamma)] = \pi. \tag{3.8}$$

De este modo, la rama F_2^- consiste en todos los puntos (λ, μ) que satisfacen la ecuación (3.8).

3.7. El caso general

Sea $w(t)$ una solución no trivial del problema (3.1) que tenga exactamente n ceros en el intervalo $< 0, \pi >$. Para esta solución, el intervalo $[0, \pi]$ puede ser descompuesto en $n+1$ subintervalos $J_{T_1} := [0, T_1]$, $J_{T_2} := [T_1, T_1+T_2]$, $J_{T_3} := [T_1+T_2, T_1+T_2+T_3], \ldots, J_{T_{n+1}} = [\sum_{i=1}^{n} T_i, \pi]$ de manera que en cualquiera de estos intervalos el signo de $w(t)$ no cambia.

Observación 3.1 *1. Si $n = 2k$, $w(t)$ tiene el mismo signo en los intervalos J_{T_1} y $J_{T_{n+1}}$.*

2. Si $n = 2k - 1$, $w(t)$ tiene signos diferentes en los intervalos J_{T_1} y $J_{T_{n+1}}$.

Usamos las proposiciones 2.3, 2.4, 2.5 y la anterior observación para obtener la descripción analítica de las ramas F_n^+ y F_n^-. Así llegamos a que la descomposición del intervalo $[0, \pi]$ en subintervalos es tal que

- Para F_{2k}^+:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \tfrac{\pi}{\mu} - \tfrac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan\alpha), \\
T_2 &= T_4 = T_6 = \ldots = T_{2k-2} = T_{2k} = \tfrac{\pi}{\lambda} \\
T_3 &= T_5 = T_7 = \ldots = T_{2k-1} = \tfrac{\pi}{\mu} \\
T_{2k+1} &= \tfrac{\pi}{\mu} - \tfrac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan\gamma).
\end{aligned}$$

- Para F_{2k}^-:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \tfrac{\pi}{\lambda} - \tfrac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\alpha), \\
T_2 &= T_4 = T_6 = \ldots = T_{2k-2} = T_{2k} = \tfrac{\pi}{\mu} \\
T_3 &= T_5 = T_7 = \ldots = T_{2k-1} = \tfrac{\pi}{\lambda} \\
T_{2k+1} &= \tfrac{\pi}{\lambda} - \tfrac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\gamma).
\end{aligned}$$

- Para F^+_{2k-1}:

$$\begin{aligned} T_1 &= \tfrac{\pi}{\mu} - \tfrac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan\alpha)\,, \\ T_2 &= T_4 = T_6 = \ldots = T_{2k-2} = \tfrac{\pi}{\lambda}\,, \\ T_3 &= T_5 = T_7 = \ldots = T_{2k-1} = \tfrac{\pi}{\mu}\,, \\ T_{2k} &= \tfrac{\pi}{\lambda} - \tfrac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\gamma)\,. \end{aligned}$$

- Para F^-_{2k-1}:

$$\begin{aligned} T_1 &= \tfrac{\pi}{\lambda} - \tfrac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\alpha)\,, \\ T_2 &= T_4 = T_6 = \ldots = T_{2k-2} = \tfrac{\pi}{\mu} \\ T_3 &= T_5 = T_7 = \ldots = T_{2k-1} = \tfrac{\pi}{\lambda} \\ T_{2k} &= \tfrac{\pi}{\mu} - \tfrac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan\gamma)\,. \end{aligned}$$

Como la suma de todos los intervalos $J_{T_1}\,,\, J_{T_2}\,,\, J_{T_3}\,, \ldots, J_{T_{n+1}}$ es π :

$$\sum_{i=1}^{n+1} T_i = \pi\,,$$

obtenemos ecuaciones para las ramas del espectro de Fučik del problema (3.1) , las cuales quedan establecidas en la siguiente proposición.

Proposición 3.1 *Las ramas del espectro de Fučik para el problema de valor frontera*

$$\begin{cases} w'' = -\mu^2 w^+ + \lambda^2 w^-\,, \\ w(0)\cos\alpha - w'(0)\,sen\alpha = 0\,, \\ w(\pi)\cos\beta - w'(\pi)\,sen\beta = 0\,, \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \le \beta \le \pi\,, \end{cases}$$

son dadas por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} F_0^+ &: \frac{\pi}{\mu} - \frac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan\gamma) - \frac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan\alpha) = \pi\,, \\ F_0^- &: \frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\gamma) - \frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\alpha) = \pi\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^+_{2k} &: \left[\frac{\pi}{\mu} - \frac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan\alpha)\right] + \frac{(k-1)\pi}{\mu} + \frac{k\pi}{\lambda} + \left[\frac{\pi}{\mu} - \frac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan\gamma)\right] = \pi\,, \\ F^-_{2k} &: \left[\frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\alpha)\right] + \frac{k\pi}{\mu} + \frac{(k-1)\pi}{\lambda} + \left[\frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\gamma)\right] = \pi\,, \\ F^+_{2k-1} &: \left[\frac{\pi}{\mu} - \frac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan\alpha)\right] + \frac{(k-1)\pi}{\mu} + \frac{(k-1)\pi}{\lambda} + \left[\frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\gamma)\right] = \pi\,, \\ F^-_{2k-1} &: \left[\frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\alpha)\right] + \frac{(k-1)\pi}{\mu} + \frac{(k-1)\pi}{\lambda} + \left[\frac{\pi}{\mu} - \frac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan\gamma)\right] = \pi\,, \end{aligned}$$

$\forall k \in I\!N\,,\ \lambda \ge 0\,,\ \mu \ge 0\,,\ \gamma = \pi - \beta\,.$

4. Propiedades del espectro de Fučik para el problema de Sturm - Liouville

Aquí estudiaremos las propiedades de las curvas F_k^+ y F_k^- del espectro de (3.1), cuyas ecuaciones se obtuvieron en la sección anterior. Para ello, introducimos la función

$$g(z,\alpha) = \frac{1}{z}[\pi - \arctan(z\tan\alpha)], \quad z > 0\,,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\,.$$

Esta función tiene las siguiente propiedades:

- g es monótona decreciente en el primer argumento. Más aún, si z crece en el intervalo $< 0, +\infty >$, g decrece de $+\infty$ a 0, y si z está en el intervalo $< z_0, +\infty >$, los valores de g están en el rango de $g(z_0,\alpha)$ a 0.
- Para $z > 0$ (fijo), g es monótona decreciente en α. Más aún, si α crece de 0 a $\frac{\pi}{2}$, g decrece de $\frac{\pi}{z}$ a $\frac{\pi}{2z}$.

Empezamos con el estudio de las ramas impares F_{2k-1}^+ y F_{2k-1}^- . De la proposición 3.1, tenemos que

$$F_{2k-1}^+ : \quad [\frac{\pi}{\mu} - \frac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan\alpha)] + \frac{(k-1)\pi}{\mu} + \frac{(k-1)\pi}{\lambda} + [\frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\gamma)] = \pi\,,$$

$$F_{2k-1}^- : \quad [\frac{\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\arctan(\lambda\tan\alpha)] + \frac{(k-1)\pi}{\mu} + \frac{(k-1)\pi}{\lambda} + [\frac{\pi}{\mu} - \frac{1}{\mu}\arctan(\mu\tan\gamma)] = \pi\,,$$

las cuales pueden escribirse como:

$$F_{2k-1}^+ : \quad g(\mu,\alpha) + \frac{(k-1)\pi}{\mu} + \frac{(k-1)\pi}{\lambda} + g(\lambda,\gamma) = \pi\,, \tag{4.1}$$

$$F_{2k-1}^- : \quad g(\lambda,\alpha) + \frac{(k-1)\pi}{\mu} + \frac{(k-1)\pi}{\lambda} + g(\mu,\gamma) = \pi\,. \tag{4.2}$$

Así tenemos los siguientes resultados:

Proposición 4.1 *Para todo $k \in I\!N$, las ramas F_{2k-1}^+ y F_{2k-1}^- son simétricas respecto a la diagonal en el primer cuadrante. Es decir, si $(\mu,\lambda) \in F_{2k-1}^+$, entonces $(\lambda,\mu) \in F_{2k-1}^-$ y viceversa.*

Observación 4.1 *Si $\alpha = \gamma$, entonces las ramas F_{2k-1}^+ y F_{2k-1}^- coinciden.*

Proposición 4.2 *La función $\mu = f(\lambda)$, dada por (4.1), decrece monótonamente.*

Prueba.- Usando el hecho que $g(z,\alpha)$ y $\frac{\pi}{z}$ son funciones monótonas decrecientes en z, probaremos que $\lambda_1 < \lambda_2$ implica que $\mu_1 > \mu_2$. En efecto, tenemos las siguientes implicaciones:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 < \lambda_2 &\Longrightarrow g(\lambda_1,\gamma) + \frac{(k-1)\pi}{\lambda_1} > g(\lambda_2,\gamma) + \frac{(k-1)\pi}{\lambda_2} \\
&\Longrightarrow \pi - g(\lambda_1,\gamma) - \frac{(k-1)\pi}{\lambda_1} < \pi - g(\lambda_2,\gamma) - \frac{(k-1)\pi}{\lambda_2} \\
&\Longrightarrow g(\mu_1,\alpha) + \frac{(k-1)\pi}{\lambda_1} < g(\mu_2,\alpha) + \frac{(k-1)\pi}{\mu_2}\,.
\end{aligned}$$

De la última desigualdad se tiene que $\mu_1 > \mu_2$. □

Observación 4.2 *Las ramas F^+_{2k-1} y F^-_{2k-1} son los gráficos de funciones monótonas decrecientes.*

Proposición 4.3 *Para la curva F^+_{2k-1} existen la asíntota vertical $\lambda = \lambda^+_{2k-1}$ y la asíntota horizontal $\mu = \mu^+_{2k-1}$, $\forall k \in I\!N$.*

Prueba.- Si $\mu \longrightarrow +\infty$, entonces $g(\mu,\alpha) \longrightarrow 0$ y $\frac{(k-1)\pi}{\mu} \longrightarrow 0$. De (4.1) tenemos que

$$\frac{(k-1)\pi}{\lambda} + g(\lambda,\gamma) \longrightarrow \pi\,.$$

De esto, y usando el hecho que las funciones $\mu = f(\lambda)$ y $\frac{(k-1)\pi}{\lambda} + g(\lambda,\gamma)$ son monótonas, llegamos a que existe λ^+_{2k-1} tal que $\lambda \longrightarrow \lambda^+_{2k-1}$. El valor λ^+_{2k-1} se halla de la ecuación

$$\frac{(k-1)\pi}{\lambda} + g(\lambda,\gamma) = \pi\,,$$

o

$$\pi(k-\lambda) = \arctan(\lambda\tan\gamma)\,.$$

Del mismo modo se prueba que existe una asíntota horizontal $\mu = \mu^+_{2k-1}$.
El valor de $\mu = \mu^+_{2k-1}$ se puede hallar de

$$\frac{(k-1)\pi}{\mu} + g(\mu,\alpha) = \pi\,,$$

o

$$\pi(k-\mu) = \arctan(\mu\tan\alpha)\,. \ \square$$

Observación 4.3 *Por la simetría de F^+_{2k-1} y F^-_{2k-1} respecto a la diagonal, existe una asíntota vertical $\lambda = \lambda^-_{2k-1}$ y una asíntota horizontal $\mu = \mu^-_{2k-1}$ para la curva F^-_{2k-1}, $\forall k \in I\!N$. Los valores de λ^-_{2k-1} y μ^-_{2k-1} se hallan de las ecuaciones*

$$\pi(k-\lambda) = \arctan(\lambda\tan\alpha) \quad y \quad \pi(k-\mu) = \arctan(\mu\tan\gamma)\,,$$

respectivamente.

Observación 4.4 *De las proposiciones 4.1 y 4.3 se tiene que* $\lambda_{2k-1}^{+} = \mu_{2k-1}^{-}$ *y* $\mu_{2k-1}^{+} = \lambda_{2k-1}^{-}$.

Proposición 4.4 (Comparación de asíntotas) *Las asíntotas de* F_{2k-1}^{+} *y* F_{2k-1}^{-} *se relacionan de la siguiente forma:*
Si $\alpha > \gamma$*, entonces*

$$\lambda_{2k-1}^{-} < \lambda_{2k-1}^{+}, \quad \mu_{2k-1}^{-} > \mu_{2k-1}^{+}.$$

Si $\alpha < \gamma$*, entonces*

$$\lambda_{2k-1}^{-} > \lambda_{2k-1}^{+}, \quad \mu_{2k-1}^{-} < \mu_{2k-1}^{+}.$$

Prueba.- Probaremos que $\alpha > \gamma$ implica $\lambda_{2k-1}^{-} < \lambda_{2k-1}^{+}$.
Observamos que $z_1 = \lambda_{2k-1}^{-}$ y $z_2 = \lambda_{2k-1}^{+}$ son soluciones de

$$\pi(k-z) = \arctan(z\tan\alpha) \quad \text{y} \quad \pi(k-z) = \arctan(z\tan\gamma),$$

respectivamente.
Como $\alpha > \gamma$ y $z > 0$, tenemos que

$$\tan\alpha > \tan\gamma \text{ y } \arctan(z\tan\alpha) > \arctan(z\tan\gamma)$$

y por tanto

$$\pi(k-z_1) > \pi(k-z_2)$$

de donde

$$z_1 = \lambda_{2k-1}^{-} < z_2 = \lambda_{2k-1}^{+}.$$

La relación $\mu_{2k-1}^{-} > \mu_{2k-1}^{+}$ se obtiene del hecho que las ramas F_{2k-1}^{+} y F_{2k-1}^{-} son simétricas con respecto a la diagonal en el primer cuadrante.
Para el caso $\alpha < \gamma$, similarmente se prueba

$$\lambda_{2k-1}^{-} > \lambda_{2k-1}^{+}, \quad \mu_{2k-1}^{-} < \mu_{2k-1}^{+}. \square$$

Ahora veamos las propiedades de las ramas pares F_{2k}^{+} y F_{2k}^{-}. Estas pueden escribirse como:

$$F_{2k}^{+} \; : \; g(\mu,\alpha) + \frac{(k-1)\pi}{\mu} + \frac{k\pi}{\lambda} + g(\mu,\gamma) = \pi, \tag{4.3}$$

$$F_{2k}^{-} \; : \; g(\lambda,\alpha) + \frac{k\pi}{\mu} + \frac{(k-1)\pi}{\lambda} + g(\lambda,\gamma) = \pi. \tag{4.4}$$

Análogamente a los resultados para las ramas impares, tenemos los siguientes resultados:

Proposición 4.5 *Las ramas* F_{2k}^{+} *y* F_{2k}^{-} *son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante.*

Proposición 4.6 *La función* $\mu = f(\lambda)$ *definida por la relación (4.4) decrece monótonamente.*

Observación 4.5 *Las ramas F_{2k}^+ y F_{2k}^- son los gráficos de funciones monótonas decrecientes.*

Proposición 4.7 *Las curvas F_{2k}^+ tienen asíntotas verticales $\lambda = \lambda_{2k}^+$ y asíntotas horizontales $\mu = \mu_{2k}^+$, $\forall k \in I\!N$.*

Corolario 4.1 *Para cualquier k, las curvas F_{2k}^+ tienen asíntota vertical común $\lambda_{2k}^+ = k$, cuando α y γ difieren.*

Observación 4.6 *Por la simetría de las ramas F_{2k}^+ y F_{2k}^-, existen asíntotas verticales y horizontales $\lambda = \lambda_{2k}^-$ y $\mu = \mu_{2k}^-$ para las curvas F_{2k}^-, $\forall k \in I\!N$.*
El valor de la asíntota vertical λ_{2k}^- puede hallarse de

$$\pi((k+1) - \lambda) = \arctan(\lambda \tan\alpha) + \arctan(\lambda \tan\gamma)\,,$$

y la asíntota horizontal es dada por

$$\mu_{2k}^- = k\,.$$

Corolario 4.2 *Para cualquier $k \in I\!N$, las ramas F_{2k}^- tienen asíntota horizontal común $\mu_{2k}^- = k$, cuando α y γ difieren.*

Observación 4.7 *Por simetría (ver proposición 4.5) tenemos que $\lambda_{2k}^+ = \mu_{2k}^-$ y $\mu_{2k}^+ = \lambda_{2k}^-$.*

Proposición 4.8 (Comparación de asíntotas) *Para las asíntotas de las ramas F_{2k}^+ y F_{2k}^- se cumplen las siguientes relaciones:*

$$\lambda_{2k}^- > \lambda_{2k}^+\,, \quad \mu_{2k}^- < \mu_{2k}^+\,, \quad \forall k \in I\!N\,.$$

Observación 4.8 *A diferencia de las ramas impares, las ramas F_{2k}^+ y F_{2k}^- no coinciden si $\alpha = \gamma$. En la siguiente sección veremos que F_{2k}^+ y F_{2k}^- coinciden sólo si $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{2}$.*

5. Casos específicos de problemas de frontera Sturm - Liouville

5.1. Caso $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{3\pi}{4}$

Consideramos el problema

$$\begin{cases} w'' = -\mu^2 w^+ + \lambda^2 w^- \\ w(0)\cos\frac{\pi}{4} - w'(0)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4} = 0 \\ w(\pi)\cos\frac{3\pi}{4} - w'(\pi)\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4} = 0 \end{cases}$$

que es equivalente al problema

$$\begin{cases} w'' = -\mu^2 w^+ + \lambda^2 w^- \\ w(0) = w'(0) \\ w(\pi) = -w'(\pi) \end{cases}$$

y en coordenadas polares:

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi' = \left\{\begin{array}{lll} \mu^2\mathrm{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi\,, & \text{si} & \mathrm{sen}\varphi \geq 0 \\ \lambda^2\mathrm{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi\,, & \text{si} & \mathrm{sen}\varphi < 0 \end{array}\right. \\ \varphi(0) = \frac{\pi}{4} \\ \varphi(\pi) = \frac{3\pi}{4} \end{array}\right.$$

En este caso, por la proposición 3.1, obtenemos las siguientes expresiones para las ramas del espectro:

$$\begin{array}{ll}
F_0^+ : & \dfrac{\pi}{\mu} - 2\dfrac{\arctan\mu}{\mu} = \pi \\
F_0^+ : & \dfrac{\pi}{\lambda} - 2\dfrac{\arctan\lambda}{\lambda} = \pi \\
F_1^\pm : & \dfrac{\pi}{\mu} - \dfrac{\arctan\mu}{\mu} + \dfrac{\pi}{\lambda} - \dfrac{\arctan\lambda}{\lambda} = \pi \\
F_2^+ : & \dfrac{2\pi}{\mu} - 2\dfrac{\arctan\mu}{\mu} + \dfrac{\pi}{\lambda} = \pi \\
F_2^- : & \dfrac{2\pi}{\lambda} - 2\dfrac{\arctan\lambda}{\lambda} + \dfrac{\pi}{\mu} = \pi \\
\vdots & \\
F_{2k-1}^\pm : & \dfrac{k\pi}{\mu} - \dfrac{\arctan\mu}{\mu} + \dfrac{k\pi}{\lambda} - \dfrac{\arctan\lambda}{\lambda} = \pi \\
F_{2k}^+ : & \dfrac{(k+1)\pi}{\mu} - 2\dfrac{\arctan\mu}{\mu} + \dfrac{k\pi}{\lambda} = \pi \\
F_{2k}^- : & \dfrac{(k+1)\pi}{\lambda} - 2\dfrac{\arctan\lambda}{\lambda} + \dfrac{k\pi}{\mu} = \pi\,, \quad \forall k \in I\!N
\end{array}$$

Cálculo de asíntotas:
Si $\mu \longrightarrow \infty$, la asíntota vertical es dada por $\lambda = \lambda_k^\pm$ y viceversa, si $\lambda \longrightarrow \infty$, la asíntota horizontal es dada por $\mu = \mu_k^\pm$. Aquí presentamos algunas de tales asíntotas:

$$\begin{array}{ll}
F_0^+ : & \mu_0^+ \approx 0{,}638322\,, \quad F_0^- : \ \lambda_0^- \approx 0{,}638322\,, \\
F_1^\pm : & \mu_1^\pm \approx 0{,}787637\,, \quad \lambda_1^\pm \approx 0{,}787637\,, \\
F_2^+ : & \mu_2^+ \approx 1{,}39577\,, \quad \lambda_2^+ \approx 1\,, \quad F_2^- : \ \mu_2^- \approx 1\,, \ \lambda_2^- \approx 1{,}39577\,, \\
F_3^\pm : & \mu_3^\pm \approx 1{,}67161\,, \quad \lambda_3^\pm \approx 1{,}67161\,, \ \text{etc}\,.
\end{array}$$

Observación 5.1 *En este caso las ramas del espectro no tienen asíntotas comunes.*

5.2. Caso $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ (El problema tipo Neuman)

Aquí nuestro problema en estudio, se escribe

$$\begin{cases} w'' = -\mu^2 w^+ + \lambda^2 w^- \\ w(0)\cos\frac{\pi}{2} - w'(0)\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 0 \\ w(\pi)\cos\frac{\pi}{2} - w'(\pi)\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

esto es, el problema tipo Neuman

$$\begin{cases} w'' = -\mu^2 w^+ + \lambda^2 w^- \\ w'(0) = w'(\pi) = 0, \end{cases}$$

o, en términos de coordenadas polares

$$\begin{cases} \varphi' = \begin{cases} \mu^2\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi\,, & \text{si} \quad \operatorname{sen}\varphi \geq 0 \\ \lambda^2\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi\,, & \text{si} \quad \operatorname{sen}\varphi < 0 \end{cases} \\ \varphi(0) = \frac{\pi}{2} \\ \varphi(\pi) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

En este caso, por la proposición 3.1, obtenemos las siguientes expresiones para las ramas del espectro:

$$\begin{array}{ll} F_0^+ : & \mu = 0 \\ F_0^+ : & \lambda = 0\,, \\ F_1^\pm : & \dfrac{1}{2\mu} + \dfrac{1}{2\lambda} = 1 \\ F_2^+ : & \dfrac{1}{\mu} + \dfrac{1}{\lambda} = 1 \\ F_2^- : & \dfrac{1}{\mu} + \dfrac{1}{\lambda} = 1 \\ \vdots & \\ F_{2k-1}^\pm : & \dfrac{2k-1}{2\mu} + \dfrac{2k-1}{2\lambda} = 1 \\ F_{2k}^\pm : & \dfrac{k}{\mu} + \dfrac{k}{\lambda} = 1 \\ \vdots & \\ F_n^\pm : & \dfrac{n}{2\mu} + \dfrac{n}{2\lambda} = 1\,, \quad \forall n \in I\!N\,. \end{array}$$

Ahora, calculamos sus asíntotas. Como en el caso anterior, si $\mu \longrightarrow \infty$ la asíntota vertical es dada por $\lambda = \lambda_k^\pm$ y viceversa, si $\lambda \longrightarrow \infty$, la asíntota horizontal es dada por $\mu = \mu_k^\pm$.

Así obtenemos las siguientes asíntotas:

$$
\begin{array}{ll}
F_0^+ : & \mu = 0\,, \quad F_0^- : \lambda = 0 \\
F_1^\pm : & \mu = 0{,}5\,, \quad \lambda = 0{,}5 \\
F_2^\pm : & \mu = 1\,, \quad \lambda = 1 \\
F_3^\pm : & \mu = 1{,}5\,, \quad \lambda = 1{,}5 \\
\vdots & \\
F_n^\pm : & \mu = \dfrac{n}{2}\,, \quad \lambda = \dfrac{n}{2}\,, \quad \forall n \in I\!\!N\,.
\end{array}
$$

Observación 5.2 *En este caso, las ramas del espectro tampoco tienen asíntotas comunes.*

Referencias

[1] DANCER, E. N. -*On the Dirichlet problem for weakly nonlinear elliptic partial equations.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 76, 1997, pág 283-300.

[2] FUČIK, S. and KUFNER, A. -*Nonlinear Differential Equations.* Elsevier Scientific Publishing Company. The Netherlands, 1980.

[3] ROJAS, S. -*Un ejemplo del espectro de Fučik.* PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la UNMSM. Vol V. Nro. 2, Diciembre 2002, pág 55-63.