PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. X N°1, pp 33 - 44, LIMA - PERÚ. Agosto 2007

# El Lema de Nakao y algunas aplicaciones

Yolanda Silvia Santiago Ayala [1]
ysantiagoa@unmsm.edu.pe

**Resumen**

*En este trabajo se enuncia y demuestran dos Lemas importantes de Nakao. Estos Lemas nos permitirán obtener la tasa de decaimiento de la solución de algunas ecuaciones en derivadas parciales. En particular, probamos el decaimiento exponencial de la solución global de una ecuación de onda.*

**Palabras Clave:** *Lema de Nakao, decaimiento de solución, comportamiento asintótico.*

## 1. Introducción

En el área de las Ecuaciones Diferenciales Parciales se abordan los siguientes aspectos: existencia y unicidad de solución, dependencia continua de los datos iniciales y el comportamiento asintótico de soluciones globales. Para abordar el estudio de este último tema, debemos comentar que existen algunos métodos, dependiendo de la naturaleza del problema, como por ejemplo, el método de la energía, con la construcción de funcionales y el uso de técnicas multiplicativas, citamos por ejemplo [10]. Tenemos también la Teoría de Semigrupos, via el operador resolvente ( ver por ejemplo [11], [12] ) y los métodos de Komornik [5] y Nakao [6]. Debemos también mencionar a *La Invarianza de La Salle*, que nos garantiza el decaimiento de la solución sin proporcionar la tasa específica con que decae.
En este artículo, probamos el decaimiento exponencial de la solución de una ecuación de onda; damos otros ejemplos de aplicación y demostramos dos Lemas importantes de Nakao
.
El desarrollo des como sigue: En la sección 2 hacemos un estudio de dos Lemas de Nakao, en la sección 3 damos una aplicación del Lema de Diferencias de Nakao a la ecuación de onda y finalmente en la sección 4 enunciamos otros problemas, en cuyos desarrollos se usan el Lema de Nakao (como en la sección 2) y adecuadas desigualdades de interpolación en espacios de Sobolev (ver por ejemplo [1] o [3]).

---
[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, Lima - Perú.

## 2. Lemas de Nakao

**Lema 2.1 (Lema de diferencias de Nakao)** *Sea $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función acotada con $\phi(0) > 0$ y supongamos que existe $M > 0$ tal que*

$$sup_{s\in[t,t+1]}\phi(s) \leq M\{\phi(t) - \phi(t+1)\}\,, \quad \forall t \geq 1 \tag{2.1}$$

*Entonces existen $A > 0$ y $M_1 > 0$ tal que $\phi(t) \leq M_1 e^{-At}$, $\forall t \geq 1$.*
*Esto quiere decir que $\phi(t)$ decae exponencialmente a cero cuando $t \rightarrow +\infty$.*

**Observación 2.1** $M > 1$.
*En efecto, de (2.1) y tomando $s = t$ tenemos que $\phi(t) \leq M\{\phi(t) - \phi(t+1)\}$, $\forall t \geq 1$. Así*

$$M\phi(t+1) \leq (M-1)\phi(t)\,, \forall t \geq 1 \tag{2.2}$$

*Entonces $0 < (M-1)\phi(t)$ y esto implica que $\phi(t) > 0\,, \forall t \geq 1$ y $M > 1$.*

**Prueba.-** De (2.2) tenemos que $\phi(t+1) \leq \frac{M-1}{M}\phi(t)$. Defina $\alpha := \frac{M-1}{M}$, luego $0 < \alpha < 1$ y $\phi(t+1) \leq \alpha\phi(t)$, $\forall t \geq 1$.
Si $t \geq 1$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [n, n+1]$, luego $0 \leq t-n \leq 1$, i.e. $1 \leq t-(n-1) \leq 2$. Esto nos permite obtener lo siguiente

$$\phi(t) \leq \alpha\phi(t-1) \leq \alpha^2\phi(t-2) \leq ... \leq \alpha^{n-1}\phi(t-(n-1)) \leq ... \tag{2.3}$$

Como $\alpha \in (0,1)$ entonces $\alpha^n \leq \alpha^{t-1}$ para $t \in [n, n+1]$, entonces en la desigualdad (2.3) tenemos

$$\begin{aligned}
\phi(t) &\leq \alpha^{n-1}\phi(t-(n-1)) = \alpha^n \frac{\phi(t-(n-1))}{\alpha} \\
&\leq \alpha^{t-1}\frac{\phi(t-(n-1))}{\alpha} = \alpha^t \frac{\phi(t-(n-1))}{\alpha^2} \\
&\leq \alpha^t \underbrace{\frac{\sup_{s\in[1,2]}\phi(s)}{\alpha^2}}_{0<c:=} = c\,\alpha^t = ce^{t\log\alpha} = c\,e^{-At},
\end{aligned}$$

donde $A := -\log\alpha > 0$. □

**Lema 2.2** *Sea $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función acotada con $\phi(0) > 0$ supongamos que existe $M > 0$ y $\alpha > 0$ tal que*

$$\sup_{s\in[t,t+1]} [\phi(s)]^{\alpha+1} \leq M\{\phi(t) - \phi(t+1)\} + f(t)\,, \forall t \geq 0, \tag{2.4}$$

*donde $f$ es continua, $f(t) \geq 0$ y $\lim_{t\to+\infty} t^{1+\theta}f(t) = 0$ con $\theta > \frac{1}{\alpha}$. Entonces existe $M_1 > 0$ tal que*

$$\phi(t) \leq \sup_{s\in[t,t+1]} \phi(s) \leq M_1\, t^{-\frac{1}{\alpha}},\ \forall t \text{ grande.}$$

*Esto quiere decir que $\phi(t)$ decae polinomialmente a cero cuando $t \rightarrow +\infty$.*

**Prueba.-** En (2.4), si $\alpha = 0$ y $f \equiv 0$ , estamos en el caso del Lema 2.1.
De la desigualdad (2.4) se tiene

$$[\phi(s)]^{\alpha+1} \leq M\{\phi(t) - \phi(t+1)\} + f(t), \ \forall s \in [t, t+1]. \tag{2.5}$$

Como $\phi(s) > 0$, $\forall s \in I\!R^+$ entonces

$$\sup_{s\in[t,t+1]} [\phi(s)]^{\alpha+1} = [\sup_{s\in[t,t+1]} \phi(s)]^{\alpha+1}. \tag{2.6}$$

Nos interesa saber qué sucede cuando $t$ es lo suficientemente grande.

Dado $\epsilon > 0$, existe $M_o > 0$ tal que, para todo $t >> M_o$, vale: $0 \leq t^{1+\theta} f(t) < \epsilon$ con $\theta > \frac{1}{\alpha} > 0$.
i.e.

$$\text{Dado } \epsilon > 0, \ \exists M_o > 0 \text{ tal que, } 0 \leq f(t) < \epsilon t^{-1-\theta}, \ \forall t >> M - o \text{ con } \theta > \frac{1}{\alpha} > 0 \tag{2.7}$$

Observe que de (2.7) tenemos $f(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \to +\infty$.
La prueba del Lema lo haremos en dos etapas.

I) $\phi(t) \leq c_3 t^{-\frac{1}{\alpha}}$, $t >> M_1$ grande.
II) Usando I) tenemos que si $s \in [t, t+1]$, $\forall t \geq M_1$ entonces $\phi(s) \leq c_3 s^{-\frac{1}{\alpha}}$. Tomando supremo a $\phi$ tenemos

$$\sup_{s\in[t,t+1]} \phi(s) \leq c_3 \sup_{s\in[t,t+1]} s^{-\frac{1}{\alpha}} \leq c_3 t^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \forall t >> M_1,$$

pues $s^{-\frac{1}{\alpha}}$ es decreciente.
Ahora nos resta probar la primera etapa.
Para eso se define $\phi_o(t) := vt^{-\theta}$, donde $v > 0$. Luego $\phi_o'(t) = -\theta v t^{-\theta-1} < 0$. Así $\phi_o$ es decreciente.
Definimos también $w(t) := \phi(t) + \phi_o(t)$.
Usando (2.5) tenemos para $t > 0$:

$$\begin{aligned}
\sup_{s\in[t,t+1]} |w(s)|^{1+\alpha} &= sup_{s\in[t,t+1]} |\phi(s) + \phi_o(s)|^{1+\alpha} \\
&\leq 2^{1+\alpha} sup_{s\in[t,t+1]} (\phi(s)^{1+\alpha} + \phi_o{}^{1+\alpha}) \\
&\leq 2^{1+\alpha}\{M\{\phi(t) - \phi(t+1)\} + f(t) + \phi_o(t)^{1+\alpha}\} \\
&\quad \pm 2^{1+\alpha} M[\phi_o(t) - \phi_o(t+1)] \\
&= 2^{1+\alpha} M(w(t) - w(t+1)) + I(t),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

donde $I(t) := 2^{1+\alpha}\{-M\phi_o(t) + M\phi_o(t+1) + \phi_o(t)^{1+\alpha} + f(t)\}$.
**Afirmación** $I(t) < 0$, $\forall t$ suficientemente grande.
Se tiene fácilmente que

$$I(t) = vM2^{1+\alpha}(t+1)^{-\theta}\{1 - (\frac{t+1}{t})^{\theta} + \frac{v^{\alpha}}{M}(t+1)^{\theta} t^{-\theta(1+\alpha)} + \frac{1}{vM}(1+t)^{\theta} f(t)\}. \tag{2.9}$$

Por otro lado se sabe que

$$\exists T_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } (1+\frac{1}{t})^\theta - 1 \geq \frac{1}{2}\theta t^{-1}\,, \forall t > T_1. \tag{2.10}$$

De (2.10) y la hipótesis de $f(t)$ se tiene para $t \geq T_1$ que

$$I(t) \leq \text{ Constante } (t+1)^{-\theta} t^{-1}(-\frac{\theta}{2} + \frac{v^\alpha}{M}(t+1)^\theta t^{-\theta(1+\alpha)+1} + \frac{1}{vM\epsilon}). \tag{2.11}$$

Desde que $\theta > \frac{1}{\alpha}$ se tiene que $\lim_{t\to+\infty}(t+1)^\theta t^{-\theta-\theta\alpha+1} = 0$. En efecto, $(\frac{t+1}{t})^\theta t^{1-\theta\alpha} \longrightarrow 1{,}0 = 0$ cuando $t \to +\infty$, pues $1-\theta\alpha < 0$.
Por lo tanto, podemos escoger $v$ tan grande de modo que: $\frac{1}{vM\epsilon} < \frac{\theta}{2}$ y escogiendo $T(T \geq T_1)$ lo suficientemente grande, tenemos que $I(t) < 0$ para $t > T$.
En consecuencia (2.8) queda reducido a

$$\sup_{s\in[t,t+1]} [w(s)]^{1+\alpha} \leq 2^{1+\alpha} M(w(t) - w(t+1))\,. \tag{2.12}$$

Pasamos a definir $y(t) := w(t)^{-\alpha}$ y de (2.12) se tiene que

$$\begin{aligned} y(t+1) - y(t) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\theta}\{\theta w(t+1) + (1-\theta)w(t)\}^{-\alpha} d\theta. \\ &= \alpha \int_0^1 \{\theta w(t+1) + (1-\theta)w(t)\}^{-\alpha-1}[w(t) - w(t+1)]d\theta. \\ &\geq \alpha 2^{-1-\alpha} M^{-1} \sup_{s\in[t,t+1]} w(s)^{1+\alpha} \cdot \int_0^1 \underbrace{[\theta w(t+1) + (1-\theta w(t)]}_{g(\theta):=}{}^{-\alpha-1} d\theta. \end{aligned} \tag{2.13}$$

La función $g$ así definida satisface

$$\begin{aligned} g(0) &= w(t) \\ g(1) &= w(t+1) \end{aligned}$$

y $g(\theta)$ recorre el segmento $\overline{w(t)\,w(t+1)}$ de $w(t)$ a $w(t+1)$ cuando $\theta$ va de 0 a 1. Sabemos que $g'(\theta) = w(t+1) - w(t)$. Desde que $\phi_o(t)$ es decreciente y $\phi(t) > \phi(t+1)$ para $t$ grande, tenemos que $g'(\theta) < 0$, i.e. $g(\theta)$ es decreciente. Luego,

$$g(\theta) < g(0) = w(t) \text{ para } \theta > 0. \tag{2.14}$$

Integrando la desigualdad (2.14) de 0 a 1 respecto a $\theta$ tenemos

$$\int_0^1 [g(\theta)]^{-(\alpha+1)} d\theta \;\geq\; \int_0^1 g(0)^{-(\alpha+1)} d\theta = [w(t)]^{-(\alpha+1)}. \tag{2.15}$$

Finalmente la desigualdad (2.13) se transforma en

$$\begin{aligned} y(t+1)-y(t) &\geq \alpha 2^{-(1+\alpha)}M^{-1} \underbrace{\sup_{s\in[t,t+1]} [w(s)]^{1+\alpha}\cdot[w(t)]^{-(1+\alpha)}}_{\geq 1} \\ &\geq \alpha 2^{-(1+\alpha)}M^{-1} \quad \text{para } t>T. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Por lo tanto para $t > T$, escogemos un entero positivo $n$ tal que $n < t - T < n + 1$. Así de (2.16) tenemos

$$\begin{aligned} y(t) &\geq y(t-1)+\alpha 2^{-(\alpha+1)}M^{-1} \\ &\geq y(t-2)+2\alpha 2^{-(\alpha+1)}M^{-1} \\ &\geq y(t-3)+3\alpha 2^{-(\alpha+1)}M^{-1} \\ &\ \vdots \\ &\geq y(t-n)+n\alpha 2^{-(\alpha+1)}M^{-1},\ \forall n\in\mathbb{N} \text{ tal que } t-n>T. \\ &\geq \inf_{s\in[T,T+1]}\{y(s)+n\alpha 2^{-(\alpha+1)}M^{-1}\}. \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} w(t)^{-\alpha} &\geq \inf_{s\in[T,T+1]}\{w(s)^{-\alpha}+n\alpha 2^{-(\alpha+1)}M^{-1}\} \\ &= \underbrace{\{\sup_{s\in[T,T+1]} w(s)\}^{-\alpha}}_{B:=} + n\alpha 2^{-(\alpha+1)}M^{-1}. \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned} w(t)^{\alpha} &\leq [B+n\alpha 2^{-(\alpha+1)}M^{-1}]^{-1} \\ &= [B+\frac{n\alpha}{2^{\alpha+1}M}]^{-1} \\ &= \frac{2^{\alpha+1}M}{2^{\alpha+1}MB+n\alpha}, \end{aligned}$$

i.e.

$$w(t) \leq \{\frac{2^{\alpha+1}M}{2^{\alpha+1}MB+n\alpha}\}^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{2.17}$$

De la desigualdad (2.17) y desde que $n - 1 < t - T - 1 < n$, podemos obtener

$$\begin{aligned} w(t) &\leq \{\frac{2^{\alpha+1}M}{2^{\alpha+1}MB+\alpha(t-T-1)}\}^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \{\frac{2^{\alpha+1}M}{2^{\alpha+1}MB+-\alpha(T+1)+\alpha t}\}^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

De la definición de w(t) y (2.18) se tiene

$$\begin{aligned}\phi(t) \le \phi(t) + vt^{-\theta} &\le \{\frac{2^{\alpha+1}M}{2^{\alpha+1}MB + -\alpha(T+1) + \alpha t}\}^{\frac{1}{\alpha}} \\ &\le c_3 t^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \text{para } t \text{ suf. grande.} \quad \square\end{aligned}$$

# 3. Una aplicación

**Problema 1**

Sea $\Omega \subset I\!R^n$, acotada con frontera $\partial\Omega$ regular. Sea $u = u(x,t)$ solución débil del problema

$$u_{tt} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}) + b(x)u + c(x)u_t = 0 \tag{3.1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = u_o(x)\,, \quad u_t(x,0) = u_1(x)\,, u_o \in H_0^1(\Omega)\,, u_1 \in L^2(\Omega). \tag{3.3}$$

donde

$$\begin{aligned}&a_{ij} = a_{ji} \in I\!R \quad \text{(son simétricas reales)}\\ &a_{ij} \in L^\infty(I\!R)\\ &b, c \in L^\infty(\Omega)\,, \quad b(x) \ge 0\,, \quad c(x) \ge c_o > 0.\end{aligned}$$

$$\sum_{j=i}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \ge c_1|\xi|^2\,, \quad \forall \xi \in I\!R^n. \, (c_1 > 0) \tag{3.4}$$

Entonces, existe una única solución $u \in C(0,\infty, H_0^1(I\!R))$ con $u_t \in C(0,\infty, L^2(\Omega))$. Ver [2] L. Amerio and G. Prouse *Almost Periodic functions and funtional equations*, Van Nostrand Princeton. N. J. 1971.

Usando el Lema de diferencias de Nakao probaremos que $u$ satisface

$$\int_\Omega \{(u_t)^2 + |\nabla u|^2 + b(x)u^2\}dx \le Ce^{-\gamma t}\,, \quad C > 0\,, \quad \gamma > 0,$$

para $t > T$ suficientemente grande.

En efecto, primero observemos que (3.4) implica

$$c_1|\nabla u|^2 = c_1 \sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2 \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,. \tag{3.5}$$

La energía asociada a la ecuación es

$$E(t) := \int_\Omega \{(u_t)^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + b(x)u^2\}dx.$$

Luego, usando la desigualdad (3.5) tenemos

$$\int_{\Omega} \{(u_t)^2 + |\nabla u|^2 + b(x)u^2\}dx \leq E(t)\,.$$

En consecuencia, todo se reduce a probar que $E(t) \leq Ce^{-\gamma t}\,, \quad C > 0\,, \quad \gamma > 0$, para $t > T =$ suficientemente grande.
Haremos algunas consideraciones

$$||u||^2_{H^1_0(\Omega)} := < Au, u > = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + b(x)u^2 \right\} dx.$$

donde $Au := -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}) + b(x)u$.
Asicomo

$$< u, v >_{H^1_0(\Omega)} = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} . \frac{\partial v}{\partial x_j} + b(x)u.v \right\} dx.$$

Sea $u(t)$ solución acotada de

$$\begin{aligned} u_{tt}(t) + Au(t) + c(\cdot)u_t &= 0 \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Se observa que $0 \leq E(t) = ||u_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u(t)||^2_{H^1_0(\Omega)} < +\infty$, decreciente, acotada y $E(0) > 0$.
Multiplicando la ecuación (3.6) por $u_t(t)$ integrando sobre $\Omega$) y luego integrando sobre el intervalo $(\hat{t}_1, \hat{t}_2)$, tenemos:

$$E(\hat{t}_2) - E(\hat{t}_1) + \int_{\hat{t}_1}^{\hat{t}_2} (C(\cdot)u_t(s), u_t(s))ds = 0 \tag{3.7}$$

Desde que $c(x)$ está acotada inferiormente por $c_o > 0$ y haciendo $\hat{t}_1 = t$ y $\hat{t}_2 = t+1$ en (3.7) tenemos

$$\int_t^{t+1} ||u_t(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds \leq c_2 \{\underbrace{E(t) - E(t+1)}_{B(t)^2 :=}\}\,. \tag{3.8}$$

Particiondo el intervalo [t,t+1] en 4 segmentos y trabajando en los laterales tenemos que existen dos puntos: $t_1 \in [t, t+\frac{1}{4}]$ y $t_2 \in [t+\frac{3}{4}, t+1]$ satisfaciendo

$$||u_t(t_i)||_{L^2(\Omega)} \leq (c_2 4)^{\frac{1}{2}} B(t), \text{ para } i = 1, 2. \tag{3.9}$$

En efecto, usando el Teorema del Valor Medio para integrales y la ecuación (3.8) tenemos

$$\frac{1}{4}||u_t(t_1)||^2_{L^2(\Omega)} = \int_t^{t+\frac{1}{4}} ||u_t(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds \leq \int_t^{t+1} ||u_t(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds \leq c_2 B(t)^2$$

y

$$\frac{1}{4}||u_t(t_2)||^2_{L^2(\Omega)} = \int_{t+\frac{3}{4}}^{t+1} ||u_t(s)||^2_{L^2(\Omega)}ds \leq \int_t^{t+1} ||u_t(s)||^2_{L^2(\Omega)}ds \leq c_2 B(t)^2$$

A continuación, multiplicamos la ecuación (3.6) por $u(t)$ integramos sobre $\Omega$ y luego integramos de $t_1$ a $t_2$, usando (3.9) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} ||u(s)||^2_{H_0^1(\Omega)}ds &\leq |(u_t(t_1), u(t_1))| + |(u_t(t_2), u(t_2))| + \\ & \int_{t_1}^{t_2} ||u_t(s)||^2_{L^2(\Omega)}ds + \int_{t_1}^{t_2} (c(\cdot)u_t(s), u(s))ds\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Haciendo uso de la desigualdad de Holder y la desigualdad (3.9) tenemos

$$|(u_t(t_1), u(t_1))| \leq ||u_t(t_1)||_{L^2(\Omega)}||u(t_1)||_{l^2(\Omega)} \leq (c_2 4)^{\frac{1}{2}} B(t)||u(t_1)||_{L^2(\Omega)} \tag{3.11}$$

La desigualdad de Poincaré nos permite obtener la siguiente estimativa:

$$\begin{aligned} ||u(t_1)||_{L^2(\Omega)} &\leq c_p||\nabla u(t_1)||_{L^2(\Omega)} \leq c_p\{c_1^{-1}\sum_{i=1}\sum_{j=1} a_{ij}\frac{\partial u(t_1)}{\partial x_i}\frac{\partial u(t_1)}{\partial x_j}\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_p c_1^{-\frac{1}{2}}[E(t_1)]^{\frac{1}{2}} \leq c_p c_1^{-\frac{1}{2}} \sup_{s\in[t,t+1]} [E(s)]^{\frac{1}{2}}\,, \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde $c_p$ es la constante de Poincaré.
Sustituyendo (3.12) en (3.11) tenemos

$$|(u_t(t_1), u(t_1))| \leq c_p(c_2 c_1^{-1}4)^{\frac{1}{2}} B(t) \sup_{s\in[t,t+1]} [E(s)]^{\frac{1}{2}}\,. \tag{3.13}$$

Análogamente se obtiene para $u(t_2)$. i.e.

$$|(u_t(t_2), u(t_2))| \leq c_p(c_2 c_1^{-1}4)^{\frac{1}{2}} B(t) \sup_{s\in[t,t+1]} [E(s)]^{\frac{1}{2}}\,. \tag{3.14}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (c(\cdot)u_t(s), u(s))ds &\leq \int_{t_1}^{t_2} ||c(\cdot)u_t(s)||_{L^2}||u(s)||_{L^2})ds \\ &\leq C_4\int_{t_1}^{t_2} ||c(\cdot)u_t(s)||_{L^2}||u(s)||_{H_0^1}ds \\ &\leq \frac{1}{2}\hat{C}\int_{t_1}^{t_2} ||u_t(s)||^2_{L^2}ds + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} ||u(s)||^2_{H_0^1}ds\,. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Usando las desigualdades (3.13), (3.14) y (3.15) en la desigualdad (3.10) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} ||u(s)||^2_{H_0^1(\Omega)}ds &\leq 2c_p(c_2 c_1^{-1}4)^{\frac{1}{2}} B(t) \sup_{s\in[t,t+1]} [E(s)]^{\frac{1}{2}} + \\ & C_5\int_{t_1}^{t_2} ||u_t(s)||^2_{L^2(\Omega)}ds + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} ||u(s)||^2_{H_0^1(\Omega)}ds\,, \end{aligned}$$

i.e.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} ||u(s)||^2_{H_0^1(\Omega)} ds &\leq 2c_p(c_2c_1^{-1}4)^{\frac{1}{2}}B(t) \sup_{s\in[t,t+1]} [E(s)]^{\frac{1}{2}} + \\
& C_5 \int_{t_1}^{t_2} ||u_t(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds. \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

Usando (3.8) y (3.16) tenemos

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} E(s)ds &= \int_{t_1}^{t_2} ||u(s)||^2_{H_0^1(\Omega)} ds + \int_{t_1}^{t_2} ||u_t(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds \\
&\leq C_5\{B(t)^2 + B(t) \sup_{s\in[t,t+1]} [E(s)]^{\frac{1}{2}}\}. \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

Usando el Teorema del Valor Medio para integrales, tenemos que existe $t^* \in [t_1, t_2]$ tal que $\int_{t_1}^{t_2} E(s)ds = (t_2 - t_1)E(t^*) \geq cE(t^*)$; usando esto en la desigualdad (3.17) tenemos

$$
\begin{aligned}
E(t^*) &\leq C_6\{B(t)^2 + B(t) \sup_{s\in[t,t+1]} [E(s)]^{\frac{1}{2}}\} \\
&\leq C_6B(t)^2 + C_\delta B(t)^2 + \delta \sup_{s\in[t,t+1]} E(s). \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

De (3.7) con $\hat{t}_1 = s$, $\hat{t}_2 = t^*$ y (3.18) tenemos:

$$
E(s) = E(t^*) + \int_s^{t^*} (C(\cdot)u_t(r), u_t(r))dr \leq E(t^*) + \int_t^{t+1} (C(\cdot)u_t(s), u_t(s))ds. \qquad (3.19)
$$

Usando (3.18) , (3.8) y tomando supremo tenemos

$$
\begin{aligned}
E(s) &\leq \hat{C}_\delta B(t)^2 + \delta \sup_{s\in[t,t+1]} E(s) \\
\sup_{s\in[t,t+1]} E(s) &\leq \hat{C}_\delta B(t)^2 + \delta \sup_{s\in[t,t+1]} E(s).
\end{aligned}
$$

Considerando $0 < \delta < 1$ obtenemos:

$$
(1-\delta) \sup_{s\in[t,t+1]} E(s) \leq \hat{C}_\delta B(t)^2
$$

En particular para $\delta = \frac{1}{2}$ y usando la definición de $B(t)^2$ resulta

$$
\sup_{s\in[t,t+1]} E(s) \leq C_7B(t)^2 = C_7(E(t) - E(t+1))
$$

Usando el lema de diferencias de Nakao, tenemos que $\exists\, \gamma > 0$ tal que,

$$
E(t) \leq \hat{C}e^{-\gamma t}, \text{ para } t >> w = \quad \square
$$

para $w$ suficientemente grande

# 4. Comentarios

En esta sección enunciamos y comentamos algunos problemas donde se hace uso de los Lemas de Nakao.

**Problema 2**

Sea $\Omega \subset I\!R^3$ acotada y de frontera $\partial\Omega$ regular.

$$u_{tt} - \Delta u + u^3 + u_t = 0 \text{ en } \Omega \times (0, +\infty) \tag{4.1}$$

$$u = 0 \text{ en } \partial\Omega \times I\!R^+ \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = u_o(x)\,,\; u_t(x,0) = u_1(x)\,,\; u_o \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)\,,\; u_1 \in L^2(\Omega). \tag{4.3}$$

Entonces existe una única solución débil del problema $u \in L^\infty((0,\infty), H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega))$, $u_t \in L^\infty((0,\infty), L^2(\Omega))$. Para la existencia usamos el método de Galerkin y para la unicidad de solución el método de Visik-Ladyshenkaia, ver Santiago [9]
Multiplicando por $u_t$ a la ecuación (4.1) e integrando sobre $\Omega$ obtenemos

$$\int_\Omega u_{tt}u_t - \Delta u u_t + u^3 u_t + u_t u_t dx = 0 \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\frac{1}{2}\int_\Omega (u_t)^2 + |\nabla u|^2 dx\} + \frac{\partial}{\partial t}\{\frac{1}{4}\int_\Omega u^4 dx\} = -\int_\Omega (u_t)^2 dx \tag{4.5}$$

La energía asociada al problema es

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega u_t^2 + |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4}\int_\Omega u^4 dx$$

i.e. $\frac{\partial E(t)}{\partial t} \leq 0$, $E(t)$ decrece y es acotada : $0 \leq E(t) \leq E(0)$ con $E(0) > 0$.
Entonces se prueba que la solución débil satisface:

$$\exists \gamma > 0 \text{ y } C > 0 \text{ tal que } E(t) \leq Ce^{-\gamma t}\,.$$

Citamos [9] .

**Problema 3**
Sea $\Omega \subset I\!R^n$ un dominio acotado y $\partial\Omega$ su frontera. Sea $u$ solución del problema

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_o(x)u + \rho(x, u_t) = f(x,t) \tag{4.6}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{4.7}$$

Aquí se usa el Lema 1 para el decaimiento exponencial y el Lema 2 para el decaimiento polinomial de $w = u - \overline{u}$, donde $\overline{u}$ es solución del problema estático. Citamos Nakao [7].

**Problema 4**
La ecuación de onda no lineal con el Operador $p$-Laplaciano.

$$u_{tt} - \Delta_p u + (-\Delta)^\alpha u_t + g(x,u) = f(t,x) \tag{4.8}$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{4.9}$$
$$u(0) = u_o\,,\; u_t(0) = u_1 \tag{4.10}$$
$$0 < \alpha \leq 1\,,\; p \geq 2. \tag{4.11}$$

También en este problema se usan los Lemas 1 y 2. Citamos Gao-To Fu [4].

**Problema 5**
Para la ecuación de Klein Gordon del tipo Kirchhoff-Carrier.

$$u_{tt} - M(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)\Delta u + M_1(\int_\Omega |u|^2 dx)u - \Delta u_t = 0 \tag{4.12}$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{4.13}$$

Se obtiene decaimiento exponencial de la solución global, usando el Lema 1. Citamos [8].

# Referencias


[1] ADAMS R.A. *Sobolev Spaces* . Academic Press, New York, (1975).

[2] AMERIO L. and PROUSE G. *Almost Periodic functions and funtional equations* . Van Nostrand Princeton. N. J., (1971).

[3] BREZIS, H. - *Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson Paris, (1983)

[4] HONGJUN G., TO FU MA - *Global solutions for a nonlinear wave equation with the p-Laplacian Operator*,(1999).

[5] KOMORNIK V. *Exact contollability and stabilization* John Wiley & Sons, (1994).

[6] NAKAO M. *Decay of solutions of the wave equation with a local degenerate dissipation.* Israel J. of Maths 95 (1996),P. 25-42.

[7] NAKAO M. *Convergence of solutions of the wave equation with a nonlinear dissipative term to the steady state.* Memors of the Faculty of Science, Kyushu University. Ser. A, Vol 30, No. 2, (1976) pag 257-265.

[8] CORDEIRO S. , FERREIRA J. *Solucão global e decaimento exponencial para uma EDP Não-linear da Mecânica Quântica.*

[9] SANTIAGO A., Y. *Decaimiento exponencial de la solución débil de una ecuación de onda no lineal.* PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la UNMSM. Vol VIII. Nro. 2, Diciembre (2005), pág 29-43.

[10] SANTIAGO A., Y. *Global existence and exponential decay to the wave equation with localized frictional damping.* PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la UNMSM. Vol V. Nro. 2, Diciembre (2002), pág 1-19.

[11] SANTIAGO A., Y. *Sobre la Analiticidad del Semigrupo $C_o$ asociado a un sistema Viscoelástico.* PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la UNMSM. Vol VI, Nro. 2, Diciembre (2003), pág 27-36.

[12] SANTIAGO A., Y. *Estabilidad exponencial del semigrupo $C_o$ asociado a un sistema Termoelástico.* PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la UNMSM. Vol VII, Nro. 1, Junio (2004), pág 30-42.