

## Caso de un Sistema no Hiperbólico

Teodoro Sulca Paredes <sup>1</sup>

tsulcap@unmsm.edu.pe

### Resumen

*Un sistema no hiperbólico en el plano, tal como*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + P_2(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + Q_2(x, y) \end{cases}$$

*puede presentar el caso en que la matriz de la parte lineal tenga un autovalor cero o los dos autovalores nulos. En tales casos es necesario conocer el comportamiento de las trayectorias en la vecindad de un punto singular aislado. En éste trabajo se analiza la situación cuando la matriz tiene sus dos autovalores nulos.*

**Palabras Clave:** *Trayectorias , explosiones, estructuras topológicas, sistemas analíticos.*

## 1. Preliminares

Consideremos el sistema analítico

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + P_2(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + Q_2(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

bajo las condiciones

$$|a| + |b| + |c| + |d| \neq 0$$

$$\sigma = a + d = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0,$$

---

<sup>1</sup>UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, Lima - Perú.

esto es , los dos autovalores de la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  son iguales a cero, siendo  $O(0,0)$  un punto singular aislado,  $P_2(x, y)$ ,  $Q_2(x, y)$  analíticos en una vecindad de  $O(0,0)$ .

Sin perdida de generalidad podemos asumir que (1) a sido transformado en

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + P_2(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q_2(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

donde asumimos que  $P_2(x, y)$ ,  $Q_2(x, y)$  son de orden  $\geq 2$  y analíticos en la vecindad  $V_\delta(O)$ .

Si consideramos la transformación

$$T : \xi = x , \eta = y + P_2(x, y) \quad (3)$$

entonces por el teorema de la función implícita, existe en una vecindad suficientemente pequeña de  $O(0,0)$  una transformación inversa

$$T^{-1} : x = \xi , y = f(\xi, \eta) ,$$

donde  $f(\xi, \eta)$  es también analítica en  $V_\delta(O)$  y  $f(0,0) = 0$ .

La ecuación (3) transforma (2) en

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \eta \\ \frac{d\eta}{dt} = Q_2(\xi, f(\xi, \eta)) + \frac{\partial P_2}{\partial x}(\xi, f(\xi, \eta)) \eta + \frac{\partial P_2}{\partial y}(\xi, f(\xi, \eta)) Q_2(\xi, f(\xi, \eta)) \end{cases} \quad (4)$$

La función a la derecha de la segunda ecuación, que la denotaremos por  $\tilde{Q}_2(\xi, \eta)$ , es analítica en  $V_\delta(O)$ , con terminos de orden  $\geq 2$ .

Así, el sistema (2) a sido transformado a

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \eta \\ \frac{d\eta}{dt} = \tilde{Q}_2(\xi, \eta) \end{cases} \quad (5)$$

En una vecindad suficientemente pequeña de  $V_\delta(O)$ , (3) es una transformación topológica, por lo cual las trayectorias de los sistemas (2) y (4) tienen la misma estructura topológica, asi que podemos estudiar (5) en lugar de (2).

Por simplicidad notacional escribimos (5) como

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = Q_2(x, y) \end{cases} \quad (6)$$

al cual si le aplicamos la transformación

$$x = x, y = \eta x$$

resulta

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \eta x \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{Q_2(x, \eta x)}{x} - \eta^2 \end{cases} \quad (7)$$

donde  $\tilde{O}(0,0)$  es el único punto singular de (7), además  $x = 0, \eta > 0$  y  $x = 0, \eta < 0$  son trayectorias positiva y negativa, respectivamente, de (7).

Sea  $\mu$  una vecindad (circular) del punto  $O(0,0)$  y  $\Gamma$  la región correspondiente sobre el plano  $(x, \eta)$ . Supongamos que existen en el plano  $(x, \eta)$  las semitrayectorias  $\tilde{L}_1$  y  $\tilde{L}_2$  del sistema (7) las cuales tienden al punto singular  $\tilde{O}$  y están respectivamente a la derecha e izquierda del eje  $x = 0$ . Asumiremos que las semitrayectorias cruzan el borde de  $\Gamma$  en puntos  $\tilde{N}_1$  y  $\tilde{N}_2$ , en tal forma que todos los puntos entre  $\tilde{O}$  y  $\tilde{N}_1$  ( $\tilde{O}$  y  $\tilde{N}_2$ ) son puntos interiores de  $\Gamma$ .

Las semitrayectorias  $\tilde{L}_1$  y  $\tilde{L}_2$  corresponden a  $L_1$  y  $L_2$  del sistema (6) sobre el plano  $(x, y)$  las cuales están a la derecha e izquierda, respectivamente, de  $x = 0$  y tiende al punto  $O(0,0)$  en las direcciones  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ . Sean  $N_1$  y  $N_2$  los puntos correspondientes a  $\tilde{N}_1$  y  $\tilde{N}_2$  sobre el borde del círculo  $\mathcal{C}$  de la vecindad  $\mu$ . Denotemos por  $\Gamma_1$  a la subregión de  $\Gamma$  acotada por la semitrayectoria  $\eta > 0, x = 0$ , el arco  $\tilde{N}_1\tilde{O}$  de la semitrayectoria  $\tilde{L}_1$  y la correspondiente porción del borde de  $\Gamma$  (fig 1a). Similarmente, denotemos por  $\Gamma_2$  a la subregión de  $\Gamma$  acotada por la semitrayectoria  $\eta < 0, x = 0$ , el arco  $\tilde{N}_2\tilde{O}$  de la semitrayectoria  $\tilde{L}_1$  y la correspondiente porción del borde de  $\Gamma$ . Las regiones  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son las imágenes de los sectores curvilíneos  $\mu_1$  y  $\mu_2$  (fig 1b). Sea  $\tilde{N}$  una pequeña vecindad de  $\tilde{O}$  enteramente contenida en  $\Gamma$ , y  $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2$  las intersecciones de  $\tilde{N}$  con  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  respectivamente. Análogamente sea  $w$  una pequeña vecindad de  $O$  y  $w^*$  su intersección con la unión de  $\mu_1, \mu_2$  y el eje positivo  $y$ , es decir,  $w^* = w \cap (\mu_1 \cup \mu_2 \cup y^+)$ .

Los siguientes lemas, cuyas pruebas se pueden encontrar en [1] y [3], nos ayudarán en nuestro estudio.

**Lema 1.1.** *Con las notaciones anteriores se tiene que*

- i) *Si  $\tilde{v}_1$  y  $\tilde{v}_2$  son sectores parabólicos del punto singular  $\tilde{O}$ , entonces  $w^*$  es la unión de una región elíptica y dos sectores parabólicos.*
- ii) *Si  $\tilde{v}_1$  y  $\tilde{v}_2$  son regiones hiperbólicas, entonces  $w^*$  es una región hiperbólica.*
- iii) *Si una de las regiones  $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2$  es hiperbólica y la otra parabólico, entonces  $w^*$  es una región parabólica.*

**Lema 1.2.** *Sea  $\tilde{O}_1(0, k_1)$  un punto silla simple del sistema*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, \eta x) \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{g(x, \eta x)}{x^2} - \eta \frac{f(x, \eta x)}{x} \end{cases}, \quad (8)$$

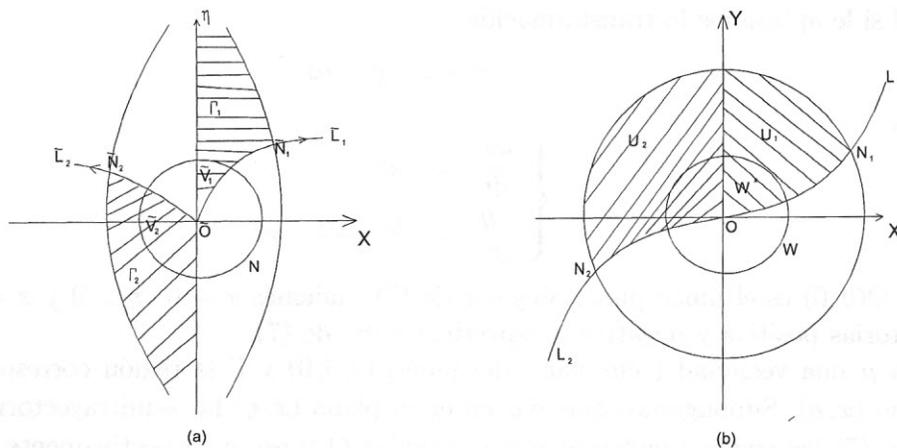


Figura 1:

entonces

- i) Si el punto singular  $\tilde{O}_2(0, k_2)$  es un nodo, la vecindad del punto singular  $O(0,0)$  es la unión de dos sectores hiperbólicos y dos sectores parabólicos.
- ii) Si  $\tilde{O}_2(0, k_2)$  es un punto silla, dos de cuyas separatrices están en ambos lados del eje  $\eta$ , entonces la vecindad de  $O$  es la unión de seis sectores hiperbólicos.
- iii) Si  $\tilde{O}_2(0, k_2)$  es una silla nodo, ambos de cuyas regiones sillas están sobre un lado del eje  $\eta$ , la vecindad de  $O$  es la unión de cuatro sectores hiperbólicos y un sector parabólico.

**Lema 1.3.** El sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy \\ \frac{dy}{dt} = -ky^2 + x^2 f(x, y) + xy f_1(x, y), \end{cases} \quad (9)$$

donde  $f(x, y)$  y  $f_1(x, y)$  son analíticas en la vecindad del origen,  $k > 0$  y  $f(x, 0) \neq 0$ , tiene exactamente dos semitrayectorias tendiendo al punto  $O(0,0)$  en las direcciones  $\theta = \pi/2$  y  $\theta = 3\pi/2$ , las cuales son el eje  $y$  positivo y el eje  $y$  negativo.

**Lema 1.4.** Sean  $f(x, y)$  y  $\varphi(x)$  analíticas en la vecindad del  $O(0,0)$ ,  $a \neq 0$ ,  $b < 0$  y  $\varphi(0) = 0$ . Entonces el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy, \\ \frac{dy}{dt} = ax[1 + \varphi(x)] + by^2 + xy f(x, y) \end{cases} \quad (10)$$

tiene un punto silla en  $O(0,0)$ , cuyas separatrices son el eje  $y$  positivo y negativo, así como dos semitrayectorias, las cuales también tienden a  $O(0,0)$  en las direcciones  $\theta = \pi/2$  y  $\theta = 3\pi/2$ ; estos últimos están respectivamente en el primer y cuarto cuadrante si  $a > 0$ , y en el segundo y tercero si  $a < 0$ .

## 2. Resultado Principal

Puesto que el punto  $O(0,0)$  es un punto singular aislado de la ecuación (6), podemos escribir tal sistema como

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = a_k x^k [1 + h(x)] + b_n x^n y [1 + g(x)] + y^2 f(x, y), \end{cases} \quad (A)$$

donde  $h(x)$ ,  $g(x)$  y  $f(x, y)$  son analíticas en la vecindad del origen,  $h(0) = g(0)$ ,  $k \geq 2$ ,  $a_k \neq 0$ .

A fin de estudiar las propiedades del punto singular  $O(0,0)$  para el sistema (A) usaremos el siguiente método. Primero aplicaremos la transformación

$$x = x, \quad y = \eta_1 x \quad (F)$$

el cual transforma (A) en

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \eta_1 x, \\ \frac{d\eta_1}{dt} = -\eta_1^2 + a_k x^{k-1} [1 + h(x)] + b_n x^n \eta_1 [1 + g(x)] + \eta_1^2 x f(x, \eta_1 x), \end{cases} \quad (A_1)$$

luego aplicamos la transformación

$$x = x, \quad \eta_1 = \eta_2 x, \quad ; \quad d\tau = x dt \quad (F_1)$$

(por simplicidad notacional usaremos  $t$  para denotar  $\tau$ ) el cual transforma (A<sub>1</sub>) en

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \eta_2 x, \\ \frac{d\eta_2}{dt} = -2\eta_2^2 + a_k x^{k-3} [1 + h(x)] + b_n x^{n-1} \eta_2 [1 + g(x)] + \eta_2^2 x f(x, \eta_2 x^2), \end{cases} \quad (A_2)$$

continuando de la misma forma aplicamos las transformaciones (F), (F<sub>1</sub>), ..., (F<sub>r-1</sub>) donde

$$x = x, \quad \eta_{r-1} = \eta_r x, \quad d\tau_{r-1} = x dt$$

y con lo cual (A) se transforma en

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \eta_r x, \\ \frac{d\eta_r}{dt} = -r\eta_r^2 + a_k x^{k-2r+1} [1 + h(x)] + b_n x^{n-r+1} \eta_r [1 + g(x)] + \eta_r^2 x f(x, \eta_r x^r). \end{cases} \quad (A_r)$$

Las transformaciones (F<sub>1</sub>), ..., (F<sub>r-1</sub>) son distintas de (F) en el sentido de que también hacemos una transformación en la variable temporal. La propiedad de la transformación (F<sub>r-1</sub>) es que descompone estructuras topológicas complicadas de los sistemas (A<sub>k-1</sub>) en estructuras topológicas más simples de puntos singulares de los sistemas (A<sub>k</sub>),  $k = 0, 1, 2, \dots$ , donde  $F_0 = F$ , (A<sub>0</sub>) = (A). Se continúa de la misma forma hasta el  $r$ -ésimo paso, cuando todos los puntos singulares de (A<sub>k</sub>) sean simples y luego de aplicar las propiedades de la transformación inversa  $F_k^{-1}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, r - 1$  hallamos la estructura topológica del punto singular  $O$  para el sistema (A).

**Definición 1.** Un punto singular cuya vecindad es la unión de dos sectores parabólicos se llama punto singular degenerado. Si la vecindad del punto singular  $O$  consiste de un sector hiperbólico y un sector elíptico, se dirá que  $O$  es un punto singular con región elíptica.

El siguiente resultado es el principal del artículo

**Teorema 2.1.** En el sistema  $(A)$ ,  $k = 2m + 1$  ( $m \geq 1$ ) y  $\lambda = b_n^2 + 4(m + 1)a_{2m+1}$ . Se tiene que

1. Si  $b_n = 0$  o  $b_n \neq 0$  con  $n > m$ , entonces el punto singular  $O$  es un centro o foco si  $a_{2m+1} < 0$ ; y es un punto silla si  $a_{2m+1} > 0$ .
2. Si  $b_n \neq 0$  con  $n < m$  entonces
  - a) Si  $a_{2m+1} > 0$ , el punto singular  $O$  es un punto silla.
  - b) Si  $a_{2m+1} < 0$  y  $n$  es par, entonces  $O$  es un nodo topológico.
  - c) Si  $a_{2m+1} > 0$  y  $n$  es impar, entonces  $O$  es un punto singular con región elíptica.
3. Si  $m = n$  y  $b_n \neq 0$ , se tiene
  - a) Si  $\lambda < 0$ , entonces  $O$  es un centro o un foco.
  - b) Si  $\lambda > 0$  y  $a_{2m+1} > 0$ ,  $O$  es un punto silla; si  $\lambda \geq 0$  y  $a_{2m+1} < 0$ ,  $O$  es un nodo topológico si  $n$  es par y  $O$  es un punto singular con región elíptica si  $n$  es impar.

### Prueba

Hay exactamente dos direcciones en el cual las trayectorias del sistema  $(A)$  pueden acercarse al punto singular  $O(0, 0)$ ; estas son las direcciones  $0$  y  $\pi$ .

Para la prueba de la primera parte, tenemos por hipótesis  $b_n = 0$  o  $b_n \neq 0$  y  $n > m$ . Para todo  $r$  tal que  $1 \leq r \leq m - 1$ , se tiene

$$2m - 2r + 2 \geq 4, \quad n - r + 1 \geq n - m + 2 \geq 3$$

Para cada  $r$  existen cuatro direcciones tal que las trayectorias del sistema  $(A_r)$  pueden tender al punto singular  $O_r(0, 0) : 0, \pi, \pi/2, 3\pi/2$ . Por lema 3, para  $1 \leq r \leq m - 1$  hay sólo dos semitrayectorias tendiendo a  $O_r$  en las direcciones  $\pi/2$  y  $3\pi/2 : x = 0, \eta_r < 0 ; x = 0, \eta_r > 0$ . Ahora por las propiedades de las transformaciones  $F_j$  y el lema 1, para cada semitrayectoria  $L$  del sistema  $(A)$  en el plano cortado  $(x, y)$  el cual tiende a  $O$  (en la dirección  $0$  o  $\pi$ ) le corresponde una semitrayectoria  $L_r$  de cada uno de los sistemas  $(A_r)$ ,  $r = 1, 2, \dots, m - 1, m$  en el plano cortado  $(x, \eta_r)$ , el cual tiende al punto singular  $O_r$  y además esta correspondencia es uno a uno. Por este motivo, el estudio del punto singular  $O$  del sistema original  $(A)$  se reduce al estudio del punto singular  $O_m(0, 0)$  del sistema  $(A_m)$ :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= \eta_m x, \\ \frac{d\eta_m}{dt} &= -m\eta_m^2 + a_{2m+1}x^2[1 + h(x)] + b_n x^{n-m+1}\eta_m[1 + g(x)] + \eta_m^2 x f(x, \eta_m x^m). \end{cases}$$

Las direcciones en las cuales las trayectorias de este sistema pueden aproximarse a  $O_m(0,0)$  son determinadas por la ecuación

$$x[(m+1)\eta_m^2 - a_{2m+1}x^2] = 0 \quad (11)$$

Se presentan dos casos:

**$a_k = a_{2m+1} < 0$ :** En éste caso las semitrayectorias del sistema  $(A_m)$  pueden tender a  $O_m$  sólo en las direcciones  $\pi/2$  y  $3\pi/2$ . Como ya se había indicado, hay exactamente dos de tales semitrayectorias ( $x=0, \eta_m > 0$ ;  $x=0, \eta_m < 0$ ). Por tanto no hay trayectorias sobre el plano cortado  $(x, \eta_m)$  que tiendan a  $O_m(0,0)$ . Luego, ninguno de los sistemas  $(A_{m-1}), (A_{m-2}), \dots, (A_1)$  tienen tales semitrayectorias y entonces el sistema original  $(A)$  no tiene trayectorias que tiendan a  $O$  en una dirección definida. Esto significa que  $O$  es un foco o un centro para el sistema  $(A)$ .

**$a_k = a_{2m+1} > 0$ :** De la ecuación (11) observamos que hay cuatro direcciones adicionales, (además de  $\pi/2$  y  $3\pi/2$ ), en las cuales las semitrayectorias del sistema  $(A_m)$  pueden acercarse al punto  $O_m$ :

$$\arctan\left(\sqrt{\frac{a_{2m+1}}{m+1}}\right), \pi + \arctan\left(\sqrt{\frac{a_{2m+1}}{m+1}}\right),$$

$$\arctan\left(-\sqrt{\frac{a_{2m+1}}{m+1}}\right), \pi + \arctan\left(-\sqrt{\frac{a_{2m+1}}{m+1}}\right)$$

Se puede ver que los puntos  $\left(0, \sqrt{\frac{a_{2m+1}}{m+1}}\right)$  y  $\left(0, \sqrt{-\frac{a_{2m+1}}{m+1}}\right)$  son puntos sillas simples para el sistema  $(A_{m+1})$ . Luego, según el lema 2, la vecindad canónica del punto singular  $O_m$  del sistema  $(A_m)$  es la unión de seis sectores hiperbólicos y el punto  $O_m$  tiene seis separatrices, dos de los cuales son los semiejes  $x=0, \eta_m > 0$  y  $x=0, \eta_m < 0$ . Finalmente, para ir del sistema  $(A_1)$  al sistema  $(A)$  se usa el lema 1 obteniéndose que  $O(0,0)$  es un punto silla de  $(A)$ .

Ahora probemos la parte (2) es decir bajo la hipótesis que  $b_n \neq 0, n < m$ . Cuando  $r = n$ , el sistema  $(A_r)$  es

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \eta_n x, \\ \frac{d\eta_n}{dt} = -n\eta_n^2 + a_{2m+1}x^{2m-2n+2}[1+h(x)] + b_n x \eta_n [1+g(x)] + \eta_n^2 x f(x, \eta_n x^n). \end{cases} \quad (A_n)$$

Aquí  $2m - 2n + 2 \geq 4$  y así las direcciones de las trayectorias de  $(A_n)$  se obtienen de

$$x\eta_n[\eta_n(1+n) - b_n x] = 0 \quad (12)$$

Tal ecuación origina seis direcciones  $\pi/2, 3\pi/2, 0, \pi, \arctan\left(\frac{b_n}{n+1}\right), \pi + \arctan\left(\frac{b_n}{n+1}\right)$  y por el lema 3 hay únicamente dos trayectorias tendiendo a  $O_n$  en las direcciones  $\pi/2$  y  $3\pi/2$ :  $x =$

$0, \eta_n > 0$  y  $x = 0, \eta_n < 0$ . Para estudiar las trayectorias tendiendo a  $O_n$ , consideremos el sistema  $(A_{n+1})$ :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \eta_{n+1}x, \\ \frac{d\eta_{n+1}}{dt} = b_n\eta_{n+1}[1 + g(x)] - (n+1)\eta_{n+1}^2 + a_{2m+1}x^{2m-2n}[1 + h(x)] + \eta_{n+1}^2 x f(x, \eta_{n+1}x^{n+1}). \end{cases}$$

Del sistema  $(A_{n+1})$  se ve que sus puntos singulares son  $O_{n+1}(0, 0)$  y  $O^*(0, \frac{b_n}{n+1})$ . Además se puede calcular que para el punto  $O^*$  se tiene que  $\Delta = -(\frac{b_n}{n+1}) < 0$ , así que  $O^*$  es un punto silla del sistema  $(A_{n+1})$ . Este punto tiene dos separatrices a lo largo del eje  $x = 0$  y los otros dos están a ambos lados de este eje. Para el punto singular  $O_{n+1}$ , también se tiene que  $\Delta = 0$  y  $\sigma = b_n \neq 0$ , lo cual nos indica que el punto singular  $O_{n+1}$  del sistema  $(A_{n+1})$  es un nodo si  $a_{2m+1} < 0$  y un punto silla si  $a_{2m+1} > 0$ . Por la segunda parte del lema 2, si  $a_{2m+1} > 0$  la vecindad canónica de  $O_n$  es la unión de seis sectores hiperbólicos y por la primera parte de tal lema, si  $a_{2m+1} < 0$  la vecindad de  $O_n$  es la unión de dos sectores hiperbólicos y dos sectores parabólicos (fig 2a). Podemos ahora caracterizar el punto singular  $O(0, 0)$  del sistema  $(A)$ , procediendo sucesivamente a través de las sucesiones de los sistemas  $(A_{n-1}), (A_{n-2}), \dots, (A_r), \dots, (A_1), (A)$ .

Notemos que en el caso  $n < m$  bajo consideración, la desigualdad  $2m - 2r + 2 > 4$  se tiene que para  $r, 1 \leq r \leq n - 1$ . Así el paso del sistema  $(A_n)$  a  $(A_{n-1}), (A_{n-2}), \dots, (A_1), (A)$  es llevado tan igual como en el caso  $n > m$  y así conseguimos al mismo tiempo que si  $a_{2m+1} > 0$  el punto  $O(0, 0)$  es un punto silla. Si  $a_{2m+1} < 0$  la paridad del número  $n$  juega un rol, puesto que la transformación  $x = x, \eta_r = \eta_r x$  mapea puntos del segundo y tercer cuadrante en el plano  $(x, \eta_r)$  sobre puntos del tercer y segundo cuadrante, respectivamente, en el plano  $(x, \eta_{r-1})$ . Así el retrato de fase del sistema  $(A_{n-1})$  en la vecindad de  $O_{n-1}$  es como está mostrado en la fig. (2b) si  $b_n < 0$ ; y si  $b_n > 0$  el retrato de fase es obtenido por reflexión en el eje  $x$ . Así los retratos de fase de los sistemas  $(A_{n-2}), (A_{n-3}), \dots$ , en la vecindad del origen son descritos alternativamente por las fig (2a) y fig (2b). Luego el retrato de fase del sistema  $(A_1)$  en la vecindad de  $(O_1(0, 0))$  es semejante al del sistema  $(A_n)$  para  $n$  impar y semejante al de  $(A_{n-1})$  para  $n$  par. Finalmente para ir del sistema  $(A_1)$  al sistema  $(A)$  se usa el lema 1 obteniéndose que el punto singular  $O(0, 0)$  es un nodo topológico si  $n$  es par y un punto singular con región elíptica si  $n$  es impar.

Ahora veamos el caso (3), es decir cuando  $m = n$ .

Para  $r = m = n$ , el sistema  $(A_r)$  es

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \eta_m x, \\ \frac{d\eta_m}{dt} = -m\eta_m^2 + a_{2m+1}x^2[1 + h(x)] + b_n x \eta_m [1 + g(x)] + \eta_m^2 x f(x, \eta_m x^m). \end{cases} \quad (A_m)$$

Las direcciones en las cuales las semitrayectorias del sistema  $(A_m)$  pueden tender al punto singular  $O_m(0, 0)$  son dadas por la ecuación

$$x[\eta_m^2(1 + m) - b_n \eta_m x - a_{2m+1} x^2] = 0 \quad (13)$$

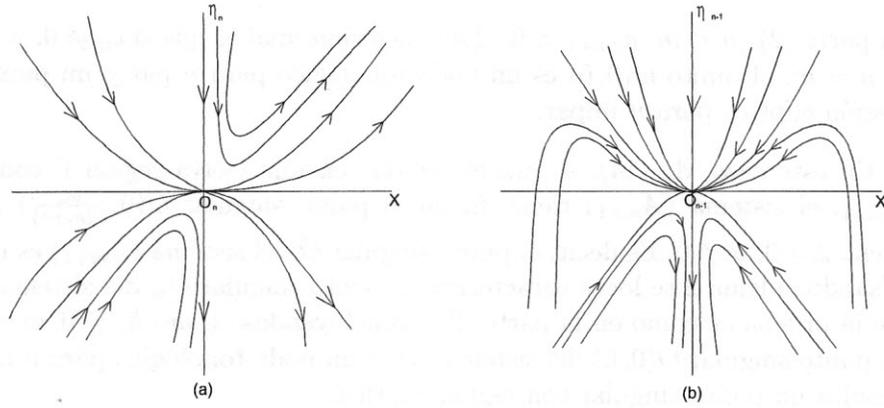


Figura 2:

Por lema 3, las únicas trayectorias que tienden a  $O_m(0, 0)$  en las direcciones  $\pi/2$  y  $3\pi/2$  son:  $x = 0, \eta_m > 0$  y  $x = 0, \eta_m < 0$ . Sea  $\lambda = b_n^2 + 4(m+1)a_{2m+1}$ . Se presentan tres casos:

$\lambda < 0$ : Por la ecuación (13)  $\pi/2$  y  $3\pi/2$  son las únicas direcciones en las cuales las semitrayectorias de  $(A_m)$  pueden tender a  $O_m$ . Pero entonces como en la parte (1) ( $n > m$ ), ninguno de los sistemas  $(A_m), (A_{m-1}), \dots, (A_1), (A)$  tienen semitrayectorias sobre el plano cortado tendiendo al origen, así que el punto singular  $O(0, 0)$  del sistema  $(A)$  es igual a un foco o a un centro.

$\lambda > 0$ : Consideremos el sistema  $(A_{m+1})$ :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \eta_{m+1}x, \\ \frac{d\eta_{m+1}}{dt} = b_n\eta_{m+1}[1 + g(x)] - (m+1)\eta_{m+1}^2 + a_{2m+1}[1 + h(x)] + \eta_{m+1}^2x f(x, \eta_{m+1}x^{m+1}), \end{cases}$$

el cual tiene dos puntos singulares  $\tilde{O}_1(0, k_1)$  y  $\tilde{O}_2(0, k_2)$ , donde

$$k_1 = \frac{b_n + \sqrt{\lambda}}{2(m+1)}, \quad k_2 = \frac{b_n - \sqrt{\lambda}}{2(m+1)} \quad (14)$$

de donde se obtiene que

$$\Delta(0, k_1) = -k_1\sqrt{\lambda}, \quad \Delta(0, k_2) = k_2\sqrt{\lambda} \quad (15)$$

Si  $a_{2m+1} > 0$ , entonces  $\sqrt{\lambda} > |b_n|$ ,  $k_1 > 0$ ,  $k_2 < 0$  y ambos puntos  $\tilde{O}_1$  y  $\tilde{O}_2$  son puntos de silla del sistema  $(A_{m+1})$ . Por consiguiente,  $O(0, 0)$  es un punto silla del sistema  $(A)$ . Si  $a_{2m+1} < 0$ , entonces  $\sqrt{\lambda} < |b_n|$  y los números  $k_1$  y  $k_2$  son del mismo signo. De (15) vemos que en este caso uno de los puntos singulares  $\tilde{O}_1$  ó  $\tilde{O}_2$  es un punto de silla del sistema  $(A_{m+1})$  y el otro es un nodo simple; además si  $b_n > 0$  el punto de silla está en el eje  $\eta_{m+1}$ , sobre el nodo y recíprocamente si  $b_n < 0$ . El razonamiento ahora es como en

la parte (2) ( $n < m$ ,  $a_{2m+1} < 0$ ). La conclusión final es que si  $b_n \neq 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $a_{2m+1} < 0$  y  $n = m$ , el punto  $O(0,0)$  es un nodo topológico para  $n$  par y un punto singular con región elíptica para  $n$  impar.

$\lambda = 0$ : En este caso, de (14), se puede ver que en una cierta región  $\Gamma$  conteniendo el eje  $\eta_{m+1}$ , el sistema  $(A_{m+1})$  tiene un único punto singular  $O(0, \frac{b_m}{2(m+1)})$  para el cual se tiene  $\Delta = 0$ ,  $\sigma \neq 0$ . Es decir, el punto singular  $\tilde{O}$  del sistema  $(A_{m+1})$  es una silla-nodo. Usando el lema 2 se logra caracterizar el punto singular  $O_m$  del sistema  $(A_m)$ . El resto de la prueba es como en la parte (2), concluyéndose (para  $b_n \neq 0$ ,  $m = n$ ,  $\lambda = 0$ ) que el punto singular  $O(0,0)$  del sistema  $(A)$  es un nodo topológico para  $n$  par y si  $n$  impar resulta un punto singular con región elíptica.

### 3. Conclusiones

El resultado probado es sólo un caso de un sistema no hiperbólico y para la situación en que  $k = 2m + 1$ . Para tener un estudio completo debería analizarse el caso  $k = 2m$  y también cuando  $\Delta = 0$  y  $\sigma \neq 0$ , ver [4]. Para el caso de sistemas hiperbólicos se puede ver [2].

### Referencias

- [1] ANDRONOV, A. A. and LEONTOVICH; *Qualitative theory of Second-Order Dynamic Systems*; Israel program for Scientific translations, Jerusalem, Wiley, New York, (1973).
- [2] SOTOMAYOR, J.; *Licoes de Equações Diferenciais Ordinarias*, Projeto Euclides (1979).
- [3] SULCA, T.; *Tesis de Licenciatura*, Lima-Perú. Abril (1997).
- [4] ZHANG ZHI-FEN; *Qualitative theory of differential equations*, Translations of Mathematical Monographs, (1992).