PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. X N^{o}2, pp 1 - 18, LIMA - PERÚ. Noviembre 2007

Ecuación No-lineal Abstracta de Kirchhoff-Carrier en espacios de Banach

Raúl Izaguirre[1]
rizaguirrem@unmsm.edu.pe
Ricardo Fuentes[2] Manuel Milla[3]

Resumen

Sean $(V, a(u,v))$, $(H,(u,v))$ *espacios de Hilbert con inmersión* $V \subset H$ *densa y compacta. Consideramos el problema abstracto siguiente*

$$(*) \qquad \begin{cases} Bu'' + M\left(|u|_0, |u'|_1^2\right) Au = f & \text{en} \quad V' \\ u(0) = u_0 \;\; ; \;\; u'(0) = u_1 \end{cases}$$

donde $B : H \to H$ *es un operador lineal simétrico y positivo ;* $(W_0, |u|_0)$, $(W_1, |u|_1)$ *son espacios de Banach. M es una función real a dos variables de clase* C^1 *y no negativa. En el trabajo se demuestra existencia local y unicidad de solución del problema (*).*

Palabras Clave: *Kirchhoff-Carrier, Espacios de Banach*

1. Introducción

Sean $(V, a(u,v))$, $(H,(u,v))$, espacios de Hilbert, $V \subset H$, la inmersión de V en H es densa y compacta. Sea A, el operador definido por la terna $\{V, H, a(u,v)\}$. Entonces, A es un operador no-acotado, auto-adjunto y positivo de H, con espectro discreto. Asimismo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el operador A^α esta bien definido. En este contexto $V = D\left(A^{1/2}\right)$.

El modelo abstracto

$$\begin{cases} u'' + M\left(|A^\alpha u|^2\right) A^\beta u = f \\ u(0) = u_0 \;\; ; \;\; u'(0) = u_1 \end{cases} \tag{1.1}$$

considera como casos particulares los siguientes problemas:

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, Lima - Perú.
[2]Instituto de Matemática . UFF-Brasil.
[3]Instituto de Matemática. UFRJ - Brasil.

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ con frontera regular Γ ; Q el cilindro Ω x]0,T[0 < T < ∞ con frontera lateral $\Sigma = \Gamma \times]0,T]$. La ecuación diferencial parcial no-lineal

$$\begin{cases} \rho(x)\, u_{tt} + \left(1 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx\right)(-\Delta u) = f(t) & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \Sigma \\ u(0) = u_0 \ ; \ u_t(0) = u_1 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{1.2}$$

es un modelo generalizado de la ecuación de Kirchhoff estudiado en [8], planteada para estudiar las vibraciones de pequeña amplitud, de una cuerda fija en sus extremos y cuando la dependencia de la tensión no puede dejarse de lado en el modelo.

Asimismo el problema mixto

$$\begin{cases} \rho(x)\, u_{tt} + \left(1 + \int_{\Omega} |\, u\,|^2 \, dx\right)(-\Delta u) = f(t) & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \Sigma \\ u(0) = u_0 \ ; \ u_t(0) = u_1 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

Es una generalización de un problema estudiado por Carrier en [2].

En [18] Pohozaev , trata el sistema

$$\begin{cases} u'' + (-1)^m \left(1 + \int_{\Omega} |\,\nabla^m u\,|^2 \, dx\right)\Delta^m u = f & \text{en } Q \\ \gamma_0 u = \gamma_1 u = \ldots\ldots\ldots = \gamma_{m-1} = 0 & \text{en } \Sigma \\ u(0) = u_0 ; \ u'(0) = u_1 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{1.4}$$

Obsérvese que si $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $A = -\Delta$, $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$, estamos en la Ecuación de Kirchhoff [10] ; si $\alpha = 0$, $\beta = 1$, es el modelo de Carrier [2] ; si $V = H_0^m(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $A = -\Delta$; $\alpha = m/2$, $\beta = m$, es el modelo de Pohozaev. En los casos señalados $M(s) = 1 + s^2$.

Con relación a esta formulación, se plantea entre otros problemas, el estudio de la ecuación (1.1) para el caso en que la función no-lineal M sea no-negativa (caso degenerado). La existencia y unicidad de soluciones locales para el caso degenerado de la ecuación de Kirchhoff $\alpha = 1/2$ y $\beta = 1$, son obtenidas por ejemplo en Ebihara -.Medeiros -Milla [5], asumiendo que $M \in C^1$ y que $|\, M'(s)\, s\,| \leq a\, M(s)$, donde la constante a es positiva. En [4] Crippa trata un caso bastante general suponiendo que la función $M \in C^1([0,\infty))$, $M(0) = 0$ y $\forall\ \delta \succ 0,\ \inf_{s \geq \delta} M(s) \succ 0$, demostrando que existe una única solución local débil al problema de Cauchy asociado a (1.1). En relación al modelo de Kirchoff- Carrier (1.3), se tiene las referencias [3] y [7], y donde la función no-lineal M es de clase C^1 y estrictamente positiva. En [3], se obtiene soluciones globales con datos analíticos "suficientemente pequeños". En [7], se obtiene solución local, pero en una clase mayor de datos iniciales. Para el caso degenerado se tiene la referencia [5] donde M es de clase C^1 y verifica cierta condición de crecimiento polinomial.

Una generalización del modelo (1.3) se da en la ecuación

$$K\, u''(t) + M\left(|Bu(t)\,|^2\right) Au(t) = f(t) \tag{1.5}$$

donde K y B son operadores que conmutan con el operador A y cumplen ciertos requisitos técnicos .

Por ejemplo, para tratar el caso

$$\begin{cases} \rho(x)\, u_{tt} + \left(1 + \int_{\Omega} |\, u\,|^{p}\, dx\right)(-\Delta u) = f(t) & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \Sigma \\ u(0) = u_0 \;;\; u_t(0) = u_1 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{1.6}$$

Se tiene la referencia [6], donde se obtiene solución local para el modelo abstracto

$$\begin{cases} Bu'' + M\left(|\, u\,|_{W}^{\beta}\right) Au \;=\; f \\ \text{en } V' \\ u(0) = u_0 \neq 0 \;\;;\;\; u'(0) = u_1 \end{cases} \tag{1.7}$$

Donde V es un espacio de Hilbert, con dual V' y $A, B : V \longrightarrow V'$ son operadores lineales simétricos con $\langle Av, v\rangle \geq 0$, $\langle Bu, u\rangle > 0$, $u \neq 0$. W es un espacio de Banach con $V \subset W$ con inmersión contínua ; β es un número real , $\beta \geq 1$ y $M(\xi)$, una función no negativa y regular en una vecindad de $|u_0|_W$.

Otra manera de tratar unificadamente los sistemas (1.1), (1.4) y (1.7), es considerar el modelo

$$u''(t) + M\left(|A^{\alpha} u(t)\,|^{2}, |A^{\beta} u(t)\,|^{2}\right) A^{\gamma} u(t) = f(t) \tag{1.8}$$

donde la función no-lineal $M(s, r)$ es no- negativa y de clase C^1 en las dos variables. En la referencia [7] Izaguirre – García demuestran la existencia de solución para el caso $\alpha = 1/2$; $\beta = 0$; $\gamma = 1$, y en la referencia [6] de Izaguirre-Fuentes-Milla, se demuestra la existencia de solución para un caso más general, que en otros trabajos del autor a ser publicados. Una extensión natural de los casos tratados es considerar la ecuación

$$\begin{cases} u'' + M\left(|\, A^{\alpha} u|^{2}, |A^{\beta} u'|^{2}\right) A^{\gamma} u = f \\ \text{en } \mathrm{V}' \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \end{cases} \tag{1.9}$$

En la referencia [12] Long trata la ecuación de onda no lineal, con condiciones de frontera mixtas, según el siguiente modelo

$$\begin{cases} u_{tt} + M\left(|u|^{2}, |\nabla u|^{2}\right)(-\Delta u) = f(t) & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \Sigma \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + hu = 0 & \text{en } \Sigma \\ u(0) = u_0 \;;\; u_t(0) = u_1 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{1.10}$$

donde Ω es la bola abierta unitaria en dimensión N=1,2 .

Una natural generalización de estos problemas es considerar el caso

$$Bu'' + M\left(\,|\, u|_{0}, |u'|_{1}^{2}\right) Au = f \;\;,\;\; \text{en } V' \qquad u(0) = u_0 \;\;;\;\; u'(0) = u_1 \tag{1.11}$$

Donde $|u|_0$, $|u|_1$ son las normas en espacios de Banach convenientes.

2. Descomposición Espectral del Operador T

Sean $(V, a(u,v))$, $(H,(u,v))$ espacios de Hilbert reales con inmersión $V \subset H$ densa y compacta.
Sea $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, una forma bilineal , simétrica (luego continua) y positiva ,esto es :

$$b(u,v) = b(v,u) \qquad u,v \in H \tag{2.1}$$

$$b(u,u) < 0 \ , \quad u \neq 0 \tag{2.2}$$

Entonces $(H, b(u,v))$ es un espacio pre- Hilbert . Sea $\left(\hat{H}, \hat{b}(u,v)\right)$ su completación que es un espacio de Hilbert . Observemos que $b(u,v) = \hat{b}(iu, iv)$, $\forall u,v \in H$, donde $i : H \rightarrow \hat{H}$ es el operador de inmersión que es lineal , isométrico de rango denso.
Entonces $V \subset \hat{H}$, con inmersión densa continua y compacta. Sea S el operador lineal, autoadjunto determinado por la terna $\left\{V, \hat{H}, a(u,v)\right\}$ .Se tiene que: $S : D(S) \subset V \rightarrow \hat{H}$ es biyectivo, con operador inverso $S^{-1} : \hat{H} \rightarrow D(S)$ compacto, $D(S)$ es denso en V y en $\hat{H}$. Además se verifica la relación

$$\hat{b}(Su, iv) = a(u,v) \quad , \ u \in D(S) , \ v \in V. \tag{2.3}$$

Observación 1. El espacio $\hat{H}$ es isomorfo al espacio dual fuerte H' de $(H, b(u,v))$ H y la inmersión $i : H \rightarrow H'$ puede ser identificada con $B : H \rightarrow H'$..
De acuerdo a la Teoria Espectral para operadores autoadjuntos y compactos, existe una sucesión ortonormal $\{ w_k \}$ de autovectores de S^{-1} , para los cuales la correspondiente sucesión de autovalores $\{\mu_k\}$ converge a cero y los autovectores forman una base para $Rg(S^{-1}) = D(A)$.
Entonces tenemos que existe una base numerable $(w_k)_{k \geq 1}$ de V y una sucesión creciente de números positivos $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ tales que:

$$\lambda_j \, b(w_j, v) \;=\; a(w_j, v) \qquad \forall \ v \ \in \ V \ ; \ j = 1,2,....... \tag{2.4}$$

$$b(w_j, w_i) = \ \delta_{ij} \quad ; \quad a(w_j, w_j) = \ \lambda_j \quad ; \ j = 1,2,....... \tag{2.5}$$

$$Sw_j = \lambda_j w_j \quad ; \quad j = 1,2,... \tag{2.6}$$

Según la Teoría Espectral para $\alpha \in \mathbb{R}$, podemos definir la potencia S^α , con dominio

$$\begin{array}{l} D(S^\alpha) = \ \left\{u ; \ \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^{2\alpha} \ |b(u, w_v)|^2 < \infty \ \right\} \\ S^\alpha u = \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^\alpha b(u, w_v) \ w_v \qquad \forall \, u \in D(S^\alpha) \\ (u,v)_\alpha = \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^{2\alpha} \, b(u, w_v) \ b(v, w_\nu) \\ |\, u \,|_\alpha^2 = |\, S^\alpha u \,|^2 = \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^{2\alpha} \,|\, b\ (u, w_v)|^2 \end{array} \tag{2.7}$$

se tiene que $(D(S^\alpha) \ , (u,v)_\alpha)$ es un espacio de Hilbert y sí $\alpha < \beta$ la inmersión de $D\left(S^\beta\right) \subset D(S^\alpha)$ es compacta $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. Problema Lineal

Sea $T > 0$. Consideremos el problema de hallar solución para el sistema

$$\begin{cases} Bu''(t) + M(t)\, Au(t) = Bf(t) \\ u(0) = u_0 \quad ; \quad u'(0) = u_1 \end{cases} \tag{3.1}$$

en V'

Trabajando formalmente, sea $v \in V$. Entonces

$$b(u''(t), v) + M(t)\, a(u(t), v) = b(f(t), v)$$

Por (2.3)

$$\hat{b}(iu''(t), iv) + M(t)\, \hat{b}(Su(t), iv) = \hat{b}(if(t), iv)$$

Entonces desde que iv es denso en $\hat{H}$, el sistema es equivalente con

$$\{u''(t) + M(t)\, Su(t) = f(t) \qquad u(0) = u_0 \quad ; \quad u'(0) = u_1 \tag{3.2}$$

en H'

3.1. Problema (Solución Global)

Sea $T > 0$ y

$$\psi \in C^1([0,T]) \;,\; \psi(t) \geq m_0 > 0 \quad \forall\, s \in [0,T] \;; \tag{3.3}$$

$$\psi \in L^\infty(0,T) \quad ; \quad |\psi|_{L^\infty(0,T)} \leq M_1 \,. \tag{3.4}$$

Teorema 1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y ψ que verifica las condiciones (3.3) y (3.4) .

$$u_0 \in D\left(S^{\alpha+1}\right) \tag{3.5}$$

$$u_1 \in D\left(S^{(2\alpha+1)/2}\right) \tag{3.6}$$

$$f \in L^\infty\left(0,T; D\left(S^{(2\alpha+1)/2}\right)\right) \tag{3.7}$$

Entonces existe una única solución u del problema (3.1) tal que:

$$u \in L^\infty\left(0,T; D\left(S^{\alpha+1}\right)\right) \tag{3.8}$$

$$u' \in L^\infty\left(0,T; D\left(S^{(2\alpha+1)/2}\right)\right) \tag{3.9}$$

$$u'' \in L^\infty\left(0,T; D\left(S^{\alpha}\right)\right) \tag{3.10}$$

$$u'' + \psi(t)\, Su = f \qquad \text{en } L^\infty\left(0,T; D\left(S^{\alpha}\right)\right) \tag{3.11}$$

La solución satisface el siguiente estimado de energía:

$$E(t) = |S^{\alpha}u'(t)|^2 + \left|S^{2\alpha+1/2}u(t)\right|^2 \leq D_0 \exp(D_1 t) \tag{3.12}$$

donde

$$C_0 = \left|S^{(2\alpha+1)/2}u_1\right|^2 + \psi(0)\left|S^{\alpha+1}u_0\right|^2 + T|f|^2_{L^{\infty}(0,T;D(S^{(2\alpha+1)/2}))}$$
$$C_1 = \text{mín}\{1, m_0\} \quad ;$$
$$C_2 = Max\{1, M_0\} \quad ;$$
$$D_0 = \frac{C_0}{C_1} \ ; \ D_1 = \frac{C_2}{C_1}.$$

Demostración . Sea $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m] \subset V$. Luego Vm es un subespacio de V de dimensión finita m, e invariante bajo la acción del operador S^k .
Sea entonces

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\, w_i \quad \in \quad V_m \tag{3.13}$$

Donde las funciones g_{im}, son determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

$$\begin{cases} b(u''_m(t), w_j) \ + \ \psi(t)\, a(u_m(t), w_j) \ = \ a(f(t), w_j) & \forall\, j = 1, 2, ..., m \\ u_m(0) = u_{0m} \ ; \ u'_m(0) = u_{1m} \end{cases} \tag{3.14}$$

Por la selección de la base especial, el sistema es equivalente con el sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} g''_{jm}(t) \ + \ \psi(t)\sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, g_{km}(t) \ = \ b(f(t), w_j) = f_j(t) \\ g_{jm}(0) = \ b(u_0, w_j) = a_j \\ g'_{jm}(0) \ = \ b(u_1, w_j) = b_j \\ j = 1, 2........m. \end{cases} \tag{3.15}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales lineales (3.15), admite una única solución en un intervalo $[0, t_m\rangle$, de donde seguimos la existencia de las soluciones aproximadas u_m para $m \geq 1$. Seguidamente debemos obtener estimados a priori para la sucesión $\{u_m\}$ { um } de modo que podamos prolongarlas a un intervalo uniforme de existencia .

3.2. Estimado a Priori 1

Por linealidad la igualdad en (3.14) se verifica para todo $v \in V_m$. Entonces haciendo $v = S^{2\alpha+2}u'_m(t)$, obtenemos

$$\left(S^{\alpha+1/2}u''_m(t), S^{\alpha+1/2}u'_m(t)\right) + \psi(t)\left(S^{\alpha+1}u_m(t), S^{\alpha+1}u'_m(t)\right) = \left(S^{\alpha+1/2}f(t), S^{\alpha+1/2}u'_m(t)\right) \tag{3.16}$$

Luego

$$\frac{d}{dt}\left\{ \left|S^{\alpha+1/2}u_m'(t)\right|^2 + \psi(t)\left|S^{\alpha+1}u_m(t)\right|\right\} \leq \left|S^{\alpha+1/2}f(t)\right|^2 + \left|S^{\alpha+1/2}u_m'(t)\right|^2 + M_1\left|S^{\alpha+1}u_m(t)\right|^2 \quad (3$$

Ahora integrando en esta desigualdad obtenemos

$$\begin{aligned}
\tau(t) = {} & \left|S^{\alpha+1/2}u_m'(t)\right|^2 + m_0\left|S^{\alpha+1}u_m(t)\right|^2 \\
\leq {} & \left|S^{\alpha+1/2}u_m'(t)\right|^2 + \psi(t)\left|S^{\alpha+1}u_m(t)\right|^2 \\
\leq {} & \textstyle\int_0^t \left|S^{\alpha+1/2}f(s)\right|^2 ds + \int_0^t \left|S^{\alpha+1/2}u_m'(s)\right|^2 ds + \left|S^{\alpha+1/2}u_m'(0)\right|^2 \\
& +\psi(0)\left|S^{\alpha+1}u_m(0)\right|^2 + M_1\textstyle\int_0^t \left|S^{\alpha+1}u_m(s)\right|^2 ds \\
\leq {} & |u_1|_{\alpha+1/2}^2 + M_0|u_0|_{\alpha+1}^2 + T|f|^2_{L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+1/2}))} + \textstyle\int_0^t \left|S^{\alpha+1/2}u_m'(s)\right|^2 ds \\
& +M_1\textstyle\int_0^t \left|S^{\alpha+1}u_m(s)\right|^2 ds \\
\leq {} & C_0 + C_2\textstyle\int_0^t \tau(s)\,ds
\end{aligned}$$

Aplicando el lema de Gronwall obtenemos

$$\left|S^{\alpha+1/2}u_m'(t)\right|^2 + \left|S^{\alpha+1}u_m(t)\right|^2 \leq \frac{C_0}{C_1}e^{C_2 t/C_1} = D_0e^{D_1 t} \qquad (3.19)$$

luego

$$\begin{array}{ll}
(u_m) & \text{es acotada en } L^\infty\left(0,T;D\left(S^{\alpha+1}\right)\right) \\
(u_m') & \text{es acotada en } L^\infty\left(0,T;D\left(S^{\alpha+1/2}\right)\right)
\end{array} \qquad (3.20)$$

3.3. Estimado a Priori 2

Multiplicando en la ecuación aproximada por w_j y luego sumando, obtenemos

$$\sum_{j=1}^m (u_m''(t), w_j)\, w_j + \psi(t)\sum_{j=1}^m (Su_m(t), w_j)\, w_j = \sum_{j=1}^m (f(t), w_j)\, w_j \qquad (3.22)$$

Entonces por definición de la proyección se obtiene

$$\begin{aligned}
u_m''(t) &= -\psi(t)\,Su_m(t) + P_m f(t) = \\
&= -\psi(t)\,Su_m(t) + f_m(t)
\end{aligned} \qquad (3.23)$$

Luego

$$(u_m'') \quad \text{es acotada en} \quad L^\infty\left(0,T;D\left(S^\alpha\right)\right) \qquad (3.24)$$

y

$$\left|S^\alpha u_m''(t)\right| \leq M_0\left|S^{\alpha+1}u_m(t)\right| + d_4\left|S^{\alpha+1/2}f(t)\right| \qquad (3.25)$$

4. Convergencia de las Soluciones Aproximadas

Para tratar la convergencia de las soluciones aproximadas utilizamos el siguiente
Lema 2. Sean X, Y, Z espacios de Banach tales que $X \subset Y \subseteq Z$, con inmersiones continuas y la inmersión $X \subset Y$ es compacta. Sea

$$W = \{ u \in L^p(0,T;X) \; ; \; u' \in L^q(0,T;Z) \}$$

donde u' denota la derivada generalizada de $u : [0,T] \to X$, sobre $(0,T)$. Entonces

$$\text{Si } p = \infty, \; q > 1 \text{ entonces } W \subseteq C([0,T] \; ; \; Z) \text{ es compacta.} \tag{4.1}$$

$$\text{Si } 1 \leq p < \infty, \; q = 1 \text{ entonces } W \subseteq L^p(0,T\,;Y) \text{ es compacta.} \tag{4.2}$$

Demostración . (Ver J. Simon [20]).
Entonces , por los estimados 1,2 , tenemos que:

$$(u_m) \quad \text{es acotada en} \quad L^\infty\left(0,T; D\left(S^{\alpha+1}\right)\right) \tag{4.3}$$

$$(u_m') \quad \text{es acotada en} \quad L^\infty\left(0,T; D\left(S^{\alpha+1/2}\right)\right) \tag{4.4}$$

$$(u_m'') \quad \text{es acotada en} \quad L^\infty\left(0,T; S^\alpha\right) \tag{4.5}$$

Luego , existe una subsucesión de (u_m) que continuamos denotando de la misma forma tal que :

$$u_m \to u \quad \text{debil} - * \quad \text{en} \quad L^\infty\left(0,T; D\left(S^{\alpha+1}\right)\right) \tag{4.6}$$

$$u_m' \to u' \quad \text{debil en} \quad L^2\left(0,T; D\left(S^{\alpha+1/2}\right)\right) \tag{4.7}$$

$$u_m'' \to u'' \quad \text{debil} - * \quad \text{en} \quad L^\infty\left(0,T; D\left(S^\alpha\right)\right) \tag{4.8}$$

Por las inmersiones continuas y compactas: $D\left(A^{\alpha+1}\right) \subset D\left(A^{(2\alpha+1)/2}\right) \subset D\left(A^\alpha\right)$, y el Lema 2 , existe una adecuada subsucesión de (u_m) que continuamos denotando de la misma forma, tal que :

$$u_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{fuerte en} \quad C^0\left([0,T]; D\left(S^{(2\alpha+1)/2}\right)\right) \subset C^0\left([0,T]; W_0\right) \tag{4.9}$$

$$u_m' \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} u' \quad \text{fuerte en} \quad C^0\left([0,T]; D\left(S^\alpha\right)\right) \subset C^0\left([0,T]; W_1\right) \tag{4.10}$$

De (4.9), (4.10) y procediendo de forma estándar obtenemos que la función u es solución del problema (3.1) y verifica

$$u'' + \psi(t)\; Su(t) = f(t) \quad \text{en} \quad L^\infty\left(0,T; D\left(S^\alpha\right)\right) \tag{4.11}$$

Para demostrar que la solución u verifica el estimado de energía (3.12), probaremos primero que :

$$u_m(t) \to u(t) \quad \text{debil en} \quad D\left(S^{\alpha+1}\right) \qquad \forall\, t \in [0,T] \tag{4.12}$$

$$u'_m(t) \to u'(t) \text{ debil en } D\left(S^{(2\alpha+1)/2}\right) \quad \forall\, t \in [0,T] \tag{4.13}$$

$$u''_m(t) \to u''(t) \text{ debil en } D(S^\alpha) \quad \forall\, t \in [0,T] \tag{4.14}$$

Sea $v \in V_k$; $m \geq k$. Tenemos

$$\begin{aligned}(S^{\alpha+1}u_m(t), S^{\alpha+1}v) = \left(S^{(2\alpha+1)/2}u_m(t), S^{(4\alpha+3)/4}v\right) \to \quad & \left(S^{(2\alpha+1)/2}u(t), S^{(4\alpha+3)/4}v\right) = \\ & = (S^{\alpha+1}u(t), S^{\alpha+1}v)\end{aligned} \tag{4.15}$$

Observación: Por (4.10)

$$\begin{aligned}&\left|\left(S^{(2\alpha+1)/2}u_m(t) - S^{(2\alpha+1)/2}u(t), S^{(4\alpha+3)/4}v\right)\right| \\ &\qquad \leq \left|S^{(2\alpha+1)/2}u_m(t) - S^{(2\alpha+1)/2}u(t)\right| \left|S^{(4\alpha+3)/4}v\right| \\ &\qquad \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}\left(S^{(2\alpha+1)/2}u'_m(t), S^{(2\alpha+1)/2}v\right) = \left(S^{(4\alpha+1)/4}u'_m(t), S^{(4\alpha+3)/4}v\right) \to \quad & \left(S^{(4\alpha+1)/4}u'(t), S^{(4\alpha+3)/4}v\right) = \\ & = \left(S^{(2\alpha+1)/2}u'(t), S^{(2\alpha+1)/2}v\right)\end{aligned} \tag{4.17}$$

Asimismo

$$\begin{aligned}(S^\alpha u''_m(t), S^\alpha v_k) &= -M(t)\left(S^{\alpha+1}u_m(t), S^\alpha v_k\right) + (S^\alpha f_m(t), S^\alpha v_k) = \\ &= -\psi(t)\left(S^{\alpha+1}u_m(t), S^\alpha v_k\right) + (f_m(t), S^{2\alpha}v_k) \\ &= -\psi(t)\left(S^{\alpha+1}u_m(t), S^\alpha v_k\right) + (f(t), S^{2\alpha}v_k) \to \\ &\quad -\psi(t)\left(S^{\alpha+1}u(t), S^\alpha v_k\right) + (S^\alpha f(t), S^\alpha v_k) = (S^\alpha u'', S^\alpha v_k)\end{aligned} \tag{4.18}$$

Luego por el Estimado 1 , (4.16), (4.17) y (4.18) , obtenemos que

$$\begin{aligned}&|S^\alpha u''(t)|^2 + \left|S^{(2\alpha+1)/2}u'(t)\right|^2 + \left|S^{\alpha+1}u(t)\right|^2 \leq \\ &\quad \leq \underset{m\to\infty}{\underline{\lim}} \left\{|S^\alpha u''_m(t)|^2 + \left|S^{(2\alpha+1)/2}u'_m(t)\right|^2 + \left|S^{\alpha+1}u_m(t)\right|^2\right\} \\ &\leq 2M_0^2 D_0 e^{D_1 t} + 2d_2^2 |f|_\infty^2 + D_0 e^{D_1 t}\end{aligned} \tag{4.19}$$

5. Unicidad

Sean u , z dos soluciones de (3.1) ; y= z . Entonces

$$y \in L^\infty\left(0,T; D\left(S^{\alpha+1}\right)\right) \tag{5.1}$$

$$y' \in L^\infty\left(0,T; D\left(S^{(2\alpha+1)/2}\right)\right) \tag{5.2}$$

$$y'' \in L^2\left(0,T; D\left(S^\alpha\right)\right) \tag{5.3}$$

$$y\,(0)=0\;;\quad y'\,(0)=0 \tag{5.4}$$

y satisface la ecuación

$$y''+\psi\,(t)\,Ay=0 \qquad \text{en} \quad L^2\,(0,T;D\,(S^\alpha)) \tag{5.5}$$

Componiendo con $w=\;2y'\,(t)\in D\,(S^\alpha)$ en esta ecuación, obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left\{|\,S^\alpha y'\,(t)\,|^2+\psi\,(t)\,\left|S^{(2\alpha+1)/2}y\,(t)\,\right|^2\right\}\;=\psi'\,(t)\;\;\left|S^{(2\alpha+1)/2}y\,(t)\,\right|^2\leq M_1\;\;\left|S^{(2\alpha+1)/2}y\,(t)\,\right|^2 \tag{5.6}$$

integrando de 0 a t y teniendo en cuenta que $y\,(0)=y'\,(0)=0$ se obtiene

$$\eta\,(t)=\;|\,S^\alpha y'\,(t)|^2+m_0\left|S^{(2\alpha+1)/2}y\,(t)\right|^2\leq\;C\;\int_0^t\eta\,(s)\,ds \tag{5.7}$$

y por el lema de Gronwall

$$S^\alpha y'\,(t)=S^{(2\alpha+1)/2}y\,(t)=0 \qquad \forall\; t\in\;[0,T] \tag{5.8}$$

Luego $u=z$.

6. Problema no Lineal (Solución Local)

En esta parte demostraremos la existencia de solución local del problema no-lineal.

$$u''\;\;+\;\;M\left(\,|\,u\,(t)\,|_0\,,|u'|_1^2\right)\;Su\;=f\;\;;\quad \text{en}\;\;L^\infty\,(0,T_0;D\,(S^\alpha)) \tag{6.1}$$

$$u\,(0)=u_0\;;\;u'\,(0)=u_1 \tag{6.2}$$

donde W_0,W_1 son espacios de Banach, reales, reflexivos, tales que sus correspondientes espacios duales W_0^* , W_1^* son estrictamente convexos.

$$D\left(S^{(2\alpha+1)/2}\right)\;\subset\;W_0\;. \tag{6.3}$$

$$D\,(S^\alpha)\;\subset\;W_1\;. \tag{6.4}$$

Entonces de (6.3) y de la teoría de los operadores máximo monótonos, obtenemos las siguientes propiedades del operador de dualidad .

Teorema 2. Si W es un espacio de Banach , real reflexivo tal que su espacio dual W^* , es estrictamente convexo. Entonces la aplicación de dualidad $J\,:\,W\longrightarrow W^*$ es simple valuada , semicontinua , máximo monótona , acotada , coercitiva y

$$|\,Ju\,|_{W^*}\;=\;|\,u\,|_W$$

La norma $u\longrightarrow|\,u\,|_W$ es G-diferenciable sobre $W\;-\;\{0\}$ y si $\psi\,(u)\;=\;|\,u\,|_W$, entonces

$$\psi'(u) = \frac{Ju}{|u|_W} \qquad \forall\, u \neq 0$$

La función $u \longrightarrow |u|_W^2$ es G-diferenciable sobre W y si $\varphi(u) = |u|_W^2$, entonces

$$\varphi'(u) = 2Ju \qquad \forall\, u \in W$$

7. Hipótesis sobre la Función M

H-1 $M \in C^1([0,T] \times [0,T]\ ;\ \mathbb{R}^+)$, donde T es un número real positivo.
H-2 $M(0,0) = 0$. ; y
H-3 Si $s > 0$, entonces $M(s,r) > 0$, $\forall r \geq 0$ ..

8. Definición de Constantes

Aqui definimos diversas constantes que aparecen en esta parte del trabajo. Para datos iniciales $0 \neq u_0, u_1, f$ convenientes, consideramos:

$C-1$	$0 \prec m_0 = M\left(\frac{\lvert u_0\rvert_W}{2}, 0\right)$
$C-2$	$C_0 = \left\lvert S^{(2\alpha+1)/2}u_1\right\rvert^2 + M(\lvert u_0\rvert_W)\,\lvert S^{\alpha+1}u_0\rvert^2 + \lvert f\rvert^2_{L^\infty\left(0,T;D\left(A^{(2\alpha+1)/2}\right)\right)}$
$C-3$	$C_1 = \text{mín}\{1, m_0\}$
$C-4$	$D_0 = \frac{C_0}{C_1}$

Consideremos las constantes de inmersión

$C-5$	$\lvert v\rvert_0 \leq d_0\, \lvert S^{\alpha+1}v\rvert$	$\forall\, v \in D(S^{\alpha+1})$
$C-6$	$\lvert v\rvert_0 \leq d_1\, \left\lvert S^{(2\alpha+1)/2}v\right\rvert$	$\forall\, v \in D\left(S^{(2\alpha+1)/2}\right)$
$C-7$	$\lvert v\rvert_1 \leq d_2\, \lvert S^{\alpha}v\rvert$	$\forall\, v \in D(S^{\alpha})$
$C-8$	$\lvert v\rvert_1 \leq d_3\, \left\lvert S^{(2\alpha+1)/2}v\right\rvert$	$\forall\, v \in D\left(S^{(2\alpha+1)/2}\right)$
$C-9$	$\lvert S^{\alpha}v\rvert_1 \leq d_4\, \left\lvert S^{(2\alpha+1)/2}v\right\rvert$	$\forall\, v \in D\left(S^{(2\alpha+1)/2}\right)$

Desde la hipótesis (H.3) podemos considerar:

$C-10$	$M_0 = Sup\{M(s,r)\,/\,(s.r) \in [0, d_0K] \times [0, d_1^2K^2]\}$
$C-11$	$M_1 = Sup\{M_s(s,r)\,/\,(s.r) \in [0, d_0K] \times [0, d_1^2K^2]\}$
$C-12$	$M_2 = Sup\{M_r(s,r)\,/\,(s.r) \in [0, d_0K] \times [0, d_1^2K^2]\}$
$C-13$	$C_2 = Max\{1, M_0\}$
$C-14$	$D_1 = \frac{C_2}{C_1}$
$C-15$	$0 \prec K^2 = D_0\,(2M_0^2e + d_3^2) \leq 1$
$C-16$	$0 \prec T^* = \frac{\lvert u_0\rvert_W}{2d_2K}$
$C-17$	$T_0 = \text{mín}\left\{T, T^*, \frac{1}{D_1}\right\}$

Consideremos el siguiente conjunto

$$G=\left\{\begin{array}{lll} v\in L^{\infty}\left(0,T_0;D\left(S^{\alpha+1}\right)\right) & / & v'\in L^{\infty}\left(0,T_0;D\left(S^{2\alpha+1/2}\right)\right)\,, \quad v''\in L^{2}\left(0,T_0;\,D\left(S^{\alpha}\right)\right) \\ v\left(0\right)=u_0\neq 0 & ; & \mid S^{\alpha}v''\left(t\right)\mid^2+\ \left| S^{(2\alpha+1)/2}v'\left(t\right)\right|^2+\ \left|S^{\alpha+1}v\left(t\right)\right|^2\leq K^2 \quad \forall\, t\in[0.T_0] \end{array}\right\}$$

Lema 1 . Sí $v\in G$ y $\psi\left(t\right)=M\left(\mid v\left(t\right)\mid_W\right)$, entonces

$$0<m_0\leq\psi\left(t\right) \qquad \forall\ t\ \in[0,T^*] \tag{8.1}$$

$$\mid\psi'\left(t\right)\mid\ \leq M_1d_1+2M_2d_2d_3=M_4 \quad \forall\ t\ \in[0,T^*] \tag{8.2}$$

Demostración. Sea $v\ \in\ G$, entonces

$$\mid\ \left|v\left(t\right)\right|_0-\ \left|v\left(0\right)\right|_0\mid\ \leq\ \mid v\left(t\right)-v\left(0\right)\mid_0=\left|\int_0^t v'\left(s\right)ds\right|_0\leq\int_0^t\mid v'\left(s\right)\mid_0 ds\leq d_2\,K\,t$$

De esta desigualdad obtenemos :

$$\mid u_0\mid_0-d_2K\,t=\mid v\left(0\right)\mid_0-\,d_2\,K\,t\leq\,\mid v\left(t\right)\mid_0$$

Luego

$$0\prec\frac{\mid u_0\mid_0}{2}=\mid u_0\mid_0-\frac{\mid u_0\mid_0}{2}\leq\mid u_0\mid_0-d_2\,K\,T^*\leq\mid u_0\mid_0-d_2\,K\,t\leq\mid v\left(t\right)\mid_0 \qquad \forall\ t\in[0,T^*]$$

Por la hipótesis H-2

$$\psi\left(t\right)=M\left(\mid v\left(t\right)\mid_0,\mid v'\left(t\right)\mid_1^2\right)\geq M\left(\frac{\mid u_0\mid_W}{2},0\right)=m_0\succ 0$$

lo que demuestra (8.1).
Debemos ahora obtener estimados para $\psi'\left(t\right)$. Tenemos por la regla de la cadena, que

$$\begin{aligned}\psi'\left(t\right)=&\ M_s\left(\left|v\left(t\right)\right|_0,\left|v'\left(t\right)\right|_1^2\right)\ \left\langle\tfrac{J_0v(t)}{|v(t)|_0},v'\left(t\right)\right\rangle_{W_0^*\times W_0}+\\ =&\ 2M_r\left(\left|v\left(t\right)\right|_0,\left|v'\left(t\right)\right|_1^2\right)\ \left\langle J_1v'\left(t\right),v''\left(t\right)\right\rangle_{W_1^*\times W_1}\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}&|\psi'\left(t\right)\mid\ \leq\ M_1\ \left|v'\left(t\right)\right|_0+2M_2\left|v'\left(t\right)\right|_1\ \left|v''\left(t\right)\right|_1\leq\\ &\leq M_1d_1\ \left|S^{(2\alpha+1)/2}v'\left(t\right)\right|+2M_2d_2d_3\left|S^{\alpha+1/2}v'\left(t\right)\right|\ \left|S^{\alpha}v''\left(t\right)\right|\leq M_1d_1+2M_2d_2d_3=M_4\end{aligned}$$

Teorema 2. Sean $v\in G$,

$$0\neq\ u_0\ \in D\left(S^{\alpha+1}\right) \tag{8.3}$$

$$u_1 \in D\left(S^{(2\alpha+1)/2}\right) \tag{8.4}$$

$$f \in L^2\left(0,T_0; D\left(S^{(2\alpha+1)/2}\right)\right) \tag{8.5}$$

Entonces, existe una única solución $u \in G$ del problema

$$u'' + M\left(|v(t)|_0, |v'(t)|_1^2\right) Su = f \quad \text{en } L^\infty(0,T_0; D(S^\alpha)) \tag{8.6}$$

$$u(0) = u_0 \; ; \; u'(0) = u_1 \tag{8.7}$$

Demostración : Procediendo como en la demostración del Teorema 1 , haciendo $T = T_0$, $\psi(t) = M\left(|v(t)|_0, |v'(t)|_1^2\right)$ y utilizando el Lema 1, se obtiene que para todo $v \in G$, existe una única función u , tal que:

$$u \in L^\infty\left(0,T_0; D\left(S^{\alpha+1}\right)\right) \tag{8.8}$$

$$u' \in L^\infty\left(0,T_0; D\left(S^{(2\alpha+1)/2}\right)\right) \tag{8.9}$$

$$u'' \in L^2(0,T_0; D(S^\alpha)) \tag{8.10}$$

$$u'' + \psi(t)\, Au = f \quad \text{en } L^\infty(0,T; D(S^\alpha)) \tag{8.11}$$

y además satisface el siguiente estimado de energía

$$|S^\alpha u''(t)|^2 + \left|S^{(2\alpha+1)/2}u'(t)\right|^2 + \left|S^{\alpha+1}u(t)\right|^2 \leq K^2 \tag{8.12}$$

Luego $u \in G$.

Teorema 3. Sean u_0, u_1, f , datos iniciales que satisfacen las condiciones del Teorema 2. Entonces existe una única solución $u \in G$ del problema (8.6)-(8.7).

Demostración. La idea es resolver una sucesión de problemas de la forma

$$z_p'' + M\left(|z_{p-1}(t)|_W\right) Az_p = f \quad \text{en } L^2(0,T_0; D(S^\alpha)) \tag{8.13}$$

$$z_p(0) = u_0 \; ; \; z_p'(0) = u_1 \qquad p \geq 2 \tag{8.14}$$

donde z_2 es la única solución del problema

$$z_2'' + M(|u_0|_W)\, Az_2 = f \quad \text{en } L^2(0,T_0; D(S^\alpha)) \tag{8.15}$$

$$z_2(0) = u_0 \; ; \; z_2'(0) = u_1 \tag{8.16}$$

Desde el Teorema 2, podemos definir una función $S : G \to G$ tal que $S\,z_{p-1} = z_p$, $p \geq 3$ donde z_p es la única solución del problema (8.13)-(8.14).

Demostraremos la convergencia

$$\begin{gathered} M\left(|z_{p-1}(t)|_0, \left|z_{p-1}'(t)\right|_1\right) Sz_p \overset{p\to\infty}{\longrightarrow} M\left(|z(t)|_0, |z'(t)|_1\right) Sz \\ \text{débil en } L^\infty(0,T_0; D(S^\alpha)) \end{gathered} \tag{8.17}$$

En primer lugar probaremos que

$$M\left(\,|\,z_{p-1}\,|_0\,,\,|\,z'_{p-1}\,(t)\,|_1\right) \overset{p\to\infty}{\longrightarrow} M\left(\,|\,z\,|_0\,,\,|\,z'\,(t)\,|_1\,\right) \qquad \text{en} \qquad C^0\left([0,T_0]\right) \tag{8.18}$$

En efecto;
desde que la sucesión $(z_p)_{p\geq 2} \subset G$, obtenemos que existe una función

$$z_p \to z \quad \text{debil } * \quad \text{en } L^\infty\left(0,T_0\,;\,D\left(S^{\alpha+1}\right)\right) \tag{8.19}$$

$$z'_p \to z' \quad \text{debil } * \quad \text{en } L^\infty\left(0,T_0\,;\,D\left(S^{(2\alpha+1)/2}\right)\right) \tag{8.20}$$

$$z''_p \to z'' \quad \text{debil} \quad \text{en } L^2\left(0,T_0\,;\,D\left(S^{\alpha}\right)\right) \tag{8.21}$$

además por el Lema 2

$$z_{p-1} \overset{p\to\infty}{\longrightarrow} z \qquad \text{en} \quad C\left([0,T_0]\,;\,D\left(S^{(2\alpha+1)/2}\right)\right) \subset C\left([0,T_0]\,;\,W_0\right) \tag{8.22}$$

$$z'_{p-1} \overset{p\to\infty}{\longrightarrow} z' \qquad \text{en} \quad C\left([0,T_0]\,;\,D\left(S^{\alpha}\right)\right) \subset C\left([0,T_0]\,;W_1\right) \tag{8.23}$$

Luego, haciendo

$$N_p\,(t) = M\left(|z_{p-1}\,(t)|_0\,,|z_{p-1}\,(t)|_1^2\right) \quad ; \quad N\,(t) = M\left(|z\,(t)|_0\,,|z\,(t)|_1^2\right) \tag{8.24}$$

$$\begin{aligned} \left|\int_0^T \left(N_p\,(t\,)\,Sz_p\,(t) - N\,(t)\,Sz\,(t)\,,v\,(t)\right)_\alpha\right| dt \;\leq\; & \left|\int_0^T \left(N_p\,(t\,)\,Sz_p\,(t) - N\,(t)\,Sz_p\,(t)\,,v\,(t)\right)_\alpha\right| dt \\ & + \left|\int_0^T \left(N\,(t\,)\,S_p z\,(t) - N\,(t)\,Sz\,(t)\,,v\,(t)\right)_\alpha\right| dt \end{aligned} \tag{8.25}$$

desde que la función $N \in C\left([0,T_0]\right)$ y es acotada , $Nv \in L^1\left(0,T_0,D\left(S^\alpha\right)\right)$. Luego por

$$\left|\int_0^T \left(N_p\,(t\,)\,Sz_p\,(t) - N\,(t)\,Sz_p\,(t)\,,v\,(t)\right)_\alpha\right| dt \leq \int_0^T |N_p\,(t) - N\,(t)|\,|S^{\alpha+1}z_p\,(t)|\,|S^\alpha v\,(t)|\,dt \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[0,T_0]} |N_p\,(t) - N\,(t)|\,|S^{\alpha+1}z_p|\int_0^T |S^\alpha\,(t)|\,dt \leq C \sup_{t\in[0,T_0]} |N_p\,(t) - N\,(t)| \overset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

lo que demuestra (8.18). Luego

$$z'' + M\left(|z\,(t)|_0\,,|z'\,(t)|_1^2\right)\,Sz = f \qquad \text{en } L^\infty\left(0,T;D\left(S^\alpha\right)\right) \tag{8.27}$$

Procediendo como en la demostración del Teorema 1, se prueba que :

$$z_p\,(t) \to z\,(t) \quad \text{debil en } D\left(S^{\alpha+1}\right) \qquad \forall\, t \in [0,T_0] \tag{8.28}$$

$$z'_p\,(t) \to z'\,(t) \quad \text{debil en } D\left(S^{(2\alpha+1)/2}\right) \qquad \forall\, t \in [0,T_0] \tag{8.29}$$

$$z''_p\,(t) \to z''\,(t) \quad \text{debil en } D\left(S^{\alpha}\right) \qquad \forall\, t \in [0,T_0] \tag{8.30}$$

Entonces

$$\begin{aligned} & |S^\alpha z''\,(t)|^2 + \left|S^{\alpha+1/2}z'\,(t)\right|^2 + |S^{\alpha+1}z\,(t)|^2 \leq \\ & \leq \varliminf_{p\to\infty} \left\{|S^\alpha z_p\,(t)|^2 + \left|S^{(2\alpha+1)/2}z'_p\,(t)\right|^2 + |S^{\alpha+1}z_p\,(t)|^2\right\} \leq K^2 \end{aligned} \tag{8.31}$$

por lo tanto $z \in G$.

9. Unicidad

Sean u , z dos soluciones del problema (8.6), (8.7) y $y = u - z$. Entonces se verifica que
y $\in$ $L^{\infty}(0, T_0; D(S^{\alpha+1}))$
y'$\in$ $L^{\infty}\left(0, T_0; D\left(S^{2\alpha+1/2}\right)\right)$
y"$\in$ $L^{\infty}(0, T_0; D(S^{\alpha}))$
y(0) $=$ $y'(0)$ $=$ 0
y satisface la ecuación

$$y'' + M\left(|u|_0, |u'|_1^2\right) Sy = \left(M\left(|u|_0, |u'|_1^2\right) - M\left(|z|_0, |z'|_1^2\right)\right) Sz \quad \text{en} \quad L^2(0, T_0; D(S^{\alpha}))$$

Componiendo con $w(t) = 2y'(t)$ en esta ecuación y teniendo en cuenta que

$$|M(|z(t)|_0, |z'(t)|_1) - M(|u(t)|_0, |u'(t)|_1)| \leq C|y(t)|_0 + C_1|y'(t)|_1 \tag{9.1}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\left\{|S^{\alpha}y'(t)|^2 + \psi(t)\,\left|S^{(2\alpha+1)/2}y(t)\right|^2\right\} \leq\ & C_0|y(t)|_0|S^{\alpha}z(t)||S^{\alpha}y'(t)| + \\
& +C_1|y'(t)|_1|S^{\alpha}z(t)||S^{\alpha}y'(t)| \\
& +\psi'(t)\left|S^{(2\alpha+1)/2}y(t)\right|^2 \\
\leq\ & C_2\left|S^{(2\alpha+1)/2}y(t)\right||S^{\alpha}y'(t)| + C_3|S^{\alpha}y'(t)|^2 \\
& +C_4\left|S^{(2\alpha+1)/2}y(t)\right|^2 \\
\leq\ & C|S^{\alpha}y'(t)|^2 + C\left|S^{(2\alpha+1)/2}y(t)\right|^2
\end{aligned}$$

donde C representa diversas constantes que no dependen de t. Integrando de 0 a t y teniendo en cuenta que $y(0) = y'(0) = 0$ obtenemos

$$\eta(t) = |S^{\alpha}y'(t)|^2 + m_0\left|S^{(2\alpha+1)/2}y(t)\right|^2 \leq C\int_0^t \eta(s)\,ds \tag{9.2}$$

y por el lema de Gronwall $S^{\alpha}y'(t) = S^{(2\alpha+1)/2}y(t) = 0 \quad \forall\, t \in [0, T_0]$. Luego $u = z$.

10. Aplicaciones

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto regular . Consideremos : $\rho : \Omega \to \mathbb{R}^+$, continua, positiva en casi todo punto y acotada superiormente digamos $0 < \rho(x) \leq \rho_1$

$$V = H_0^1(\Omega)\ ,\ W = L^p(\Omega)\ ,\ H = L^2(\Omega)$$

$$1 < p \leq \frac{2n}{n-2}\ , \quad \text{si} \quad n \geq 3 \quad , \quad \text{y} \quad 1 < p < \infty\ , \text{si} \quad n = 1, 2$$

$$M(s,r) = a + bs^q + cr, \;\; q \geq 1, \;\; a \geq 0, b \succ 0\,;\, c \geq 0.$$

$$Au = -\Delta u \;,\;\; Bu = \rho u,$$

Entonces existe una única solución del problema

$$\begin{cases} \rho(x)\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \;+\; \left(a + b \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^p\, dx + c \int |u'(x,t)|^2\, dx\right)\, (-\Delta u) = f & \text{en } \;Q \\ u = 0 & \text{en } \;\Gamma \\ u(0) = u_0 \;\; ; \qquad u'(0) = u_1 & \text{en } \;\Omega \end{cases}$$

2. Sea $M(s) = N(s^2)$ y $J : W \to W^*$ el operador de dualidad sobre W . Consideramos el problema

$$\begin{cases} u'' + N\left(|\, u\,|_W^2\right) Au \;=\; f \\ u(0) = u_0 \;\; ; \;\; u'(0) = u_1 \end{cases}$$

En este caso si $\varphi(u) = |u|_W^2$, entonces $\varphi'(u) = 2J(u)$, $\forall\, u \in W$, lo que facilita los cálculos desde que no requiere que $u \neq 0$.
En el caso que W sea un espacio de Hilbert $\varphi'(u) = 2\,Ju$, donde J es el operador de Riesz , $\langle Ju, v\rangle_{W^* \times W} = (u,v)_W$; $\forall u, v \in W$.
Como casos particulares de la aplicación 2, para $W = V = D\left(A^{1/2}\right)$, tenemos el problema abstracto de Kirchhoff

$$\begin{cases} u'' + N\left(\left|\, A^{1/2} u\,\right|^2\right) Au \;=\; f \\ u(0) = u_0 \;\; ; \;\; u'(0) = u_1 \end{cases}$$

formulado por Lions J.L. en [9]. Si $W = H$, se tiene el problema de Carrier abstracto

$$\begin{cases} u'' + N\left(|\, u\,|_H^2\right) Au \;=\; f \\ u(0) = u_0 \;\; ; \;\; u'(0) = u_1 \end{cases}$$

Una adecuada generalización de las aplicaciones (1) y (2) es considerar $W = D(A^\alpha)$ para obtener

$$\begin{cases} u'' + N\left(|\, A^\alpha u\,|^2\right) Au \;=\; f \\ u(0) = u_0 \;\; ; \;\; u'(0) = u_1 \end{cases}$$

conocido como el modelo abstracto de Kirchhoff-Carrier.

Referencias

[1] AROSIO A –SPAGNOLO S..- "Global solutions of the Cauchy problem for a non-linear Hyperbolic Equation ".Universita di Pisa . Departamento de Matematica. Roma (1982).

[2] CARRIER G.F. " On the non-linear vibration problem of the elastic string" Quart. Appl. Math. – 3 – pp:157-165 (1945).

[3] COUSIN A. ,FROTA C., LARKIN N. ,MEDEIROS L.A. "On the abstrac model of Kirchhoff-Carrier Equation". Comm. In App. Analysis. – 3 – (1997).

[4] CRIPPA H. "On Local Solutions of Some mildly Degenerate Hyperbolic Equations" Non-linear Analysis, vol. 21 (8)(1993).

[5] EBIHARA Y.-MEDEIROS L.A. -.MILLA.M- "Local solutions for a nonlinear degenerate hyperbolic equations". Nonlinear Analysis.Vol.10. pp 27-40 (1986).

[6] IZAGUIRRE R. FUENTES R. MILLA M . "Existente of local solutions of the Kirchhoff – Carrier equation in Banach spaces" Theory, Methods and Applications (2007).

[7] IZAGUIRRE R. – GARCIA - "Solución Local para una clase de ecuaciones no lineales de tipo Kirchhoff-Carrier"44 Seminario Brasilero de Anàlisis (1998)

[8] IZAGUIRRE R. – VELIZ V. " Solucion local para una clase de ecuaciones no-lineales degeneradas tipo Kirchhoff- Carrier" . I Seminario Internacional de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones. Universidad Ricardo Palma – Lima –Perú- (1999).

[9] IZAGUIRRE R.-VELIZ V. "Solución Local para una clase de ecuaciones no-lineales de tipo Kirchoff". Actas del 45° Seminario Brasileiro de Analise (1997).

[10] KIRCHHOFF G. "Vorlesungenuber mechanik"ch. 9 §7 Taubner, Leipzig (1883).

[11] LIONS J.L. "Quelques Methodes de Resolution des Probleme aux limites nonlinear".Dunod.Paris, (1969).

[12] LONG N. "Non linear Kirchhoff-Carrier Wave Equation in a unit membrane with mixed homogenous boundary conditions" Electronic Journal of Differential Equations . Vol. 138, pp 1-18 (2005).

[13] MEDEIROS L.A. – MILLA M. " Solutions for the Equation of Nonlinear Vibrations Sobolev Spaces of Fractionary Order" Math. Apl. Comp. 6 (1987).

[14] MEDEIROS L.A. -.MILLA M. "Remarks on a nonlinear model vibrations of string with damping".30 Seminario Brasileiro de Analise.L.N.C.C.-R.J. (1989).

[15] ONO K. " Global existence,Decay,and Blowup of Solutions for Some Mildly Degenerate Nomlinear Kirchhoff String" J. Diff. Eq. 137 (1997).

[16] PERLA G.- "On classical solutionsof a quasilinear hyperbolic equations". Nonlinear Analysis.Vol.3.PP 613-627 (1979).

[17] POHOZAEV S.- "The Kirchoff quasilinear hyperbolic equation ". Differential Equations Vol.21 pp. 101-107 (1985).

[18] POHOZAEV S. " On a class of quasilinear hyperbolic equations" Math. Sbornik, Vol 96 PP. 152-156 (1975).

[19] RIVERA P. "On local strong solutions of a nonlinear partial differential equation".Appl. Analysis vol.10. (1980).

[20] SIMON J. Compact Sets in the Space $L^p(0,T;B)$. Universite Pierre et Marie Curie. Laboratoire dÁnalyse Numerique (1985).

[21] YAMADA Y. "Some Nonlinear Degenerate Wave Equations" Non Linear Analysis, 10 (11) (1987).

[22] ZEIDLER E. "Non Linear Functional Analysis" Part II-B (1990).