PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XI - N°1 Pgs. 1-20 Lima - Perú Oct. 2008

SOLUCIÓN LOCAL PARA UNA CLASE DE ECUACIONES N0-LINEALES ABSTRACTAS TIPO KIRCHHOFF- CARRIER

Raúl Moisés Izaguirre Maguiña[1] & ***Víctor Arturo Martínez León***[2]
Julio Flores Dionicio[3]

Resumen.- *Sean,* $(V, a(u,v))$, $(H, (u,v))$ *espacios de Hilbert y la inmersión* $V \subset H$ *es densa y compacta. Consideramos el problema abstracto:*

$$\left\{ \; Bu'' + M(|u|_0^2)Au \doteq f \right. \qquad (*)$$

Donde $B : H \rightarrow H$ *es un operador lineal, simétrico y positivo,* $(W, |u|_0)$, *es un espacio de Banach, la función no lineal* M *es de clase* C^1 *y estrictamente positiva. En el trabajo demostramos la existencia local y la unicidad de solución local del problema* $(*)$.

Palabras claves: *Espacio de Hilbert, espacio de Banach, problema abstracto, ecuación de Kirchoff-Carrier, solución local, teorema del punto fijo de Rothe.*

Abstract.- *Let,* $(V, a(u,v))$, $(H, (u,v))$ *Hilbert spaces and the immersion* $V \subset H$ *is dense and compact. We consider the abstract problem:*

$$\left\{ \; Bu'' + M(|u|_0^2)Au = f \right. \qquad (*)$$

Where $B : H \rightarrow H$ *is a linear simetric and positive operator,* $(W, |u|_0)$, *is a Banach space, the non linear* M *is* C^1 *class and strictively positive. In this article we prove the existence and unicity of the local solution of the problem* $(*)$.

Key words: *Hilbert space, Banach space, abstract problem, Kirchoff-Carrier equation, local solution, fixed point theorem of Rothe.*

[1]UNMSMS, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: raul_izaguirre2222@yahoo.es
[2]UNMSMS, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: vicaml19@gmail.com
[3]UNMSMS, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: julioforesd@hotmail.com

DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL

Sean, $(V, a(u,v))$, $(H, (u,v))$ espacios de Hilbert y la inmersión $V \subset H$ es densa y compacta.

Sea $b : H \times H \to \mathbb{R}$, una forma bilineal, simétrica (luego continua) y positiva. Esto es:

(1) $b(u,v) = b(v,u)$, $u, v \in H$

(2) $b(u,u) > 0$, $u \neq 0$

Entonces $(H, b(u,v))$ es un espacio pre Hilbert. Sea $(\widehat{H}, \widehat{b}(u,v))$ su completación que es un espacio de Hilbert. Observemos que $b(u,v) = \widehat{b}(iu, iv)$, $\forall u, v \in H$, donde $i : H \to \widehat{H}$ es el operador de inmersión que es lineal, isométrico de rango denso.

Entonces $V \subset \widehat{H}$, con inmersión densa continua y compacta. Sea S el operador lineal, auto adjunto, determinado por la terna $\{V, \widehat{H}, a(u,v)\}$.

Se tiene que: $S : D(S) \subset V \to \widehat{H}$ es biyectivo, con operador inverso $S^{-1} : \widehat{H} \to D(S)$ compacto, $D(S)$ es denso en V y en $\widehat{H}$. Además se verifica la relación:

(3) $\widehat{b}(Su, iv) = a(u,v)$, $u \in D(S)$, $v \in V$.

Observación 1. El espacio $\widehat{H}$ es isomorfo al espacio dual H' de $(H, b(u,v))$ y que la inmersión $i : H \to H'$, es identificada con $i = B : H \to H'$.

Desde la teoría espectral para operadores autoadjuntos y compactos, existe una sucesión ortonormal $\{w_k\}$ de autovectores de S^{-1}, para los cuales la correspondiente sucesión de autovalores $\{\mu_k\}$ converge a cero y los autovectores forman una base para $Rg(S^{-1}) = D(A)$. Entonces tenemos que existe una base numerable $(w_k)_{k\geq 1}$ de V y una sucesión creciente de números positivos $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ tales que:

(4) $\lambda_j b(w_j, v) = a(w_j, v)$, $\forall v \in V$; $j = 1, 2, \ldots$

(5) $b(w_j, w_i) = \delta_{ij}$; $a(w_j, w_j) = \lambda_j$; $j = 1, 2, \ldots$

(6) $Sw_j = \lambda_j w_j$; $j = 1, 2, \ldots$

Desde la teoría espectral para $\alpha \in \mathbb{R}$, podemos definir la potencia S^α, con dominio $D(S^\alpha) = \{u;\ \sum\limits_{v=1}^{\infty} \lambda_v^{2\alpha} |b(u, w_v)|^2 < \infty\}$

$$S^\alpha u = \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^\alpha b(u, w_v) w_v, \ \forall u \in D(S^\alpha)$$
$$(u, v)_\alpha = \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^{2\alpha} b(u, w_v) b(v, w_v)$$
$$|u|_\alpha^2 = |S^\alpha u|^2 = \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^{2\alpha} |b(u, w_v)|^2$$

se tiene que $(D(S^\alpha), (u, v)_\alpha)$ es un espacio de Hilbert y si $\alpha < \beta$ la inmersión de $D(S^\beta) \subset D(S^\alpha)$ es compacta $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

PROBLEMA LINEAL. Sea $T > 0$. Consideremos el problema de hallar solución para la ecuación:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} Bu''(t) + M(t)Au(t) = Bf(t) \\ u(0) = u_0; \ u'(0) = u_1 \end{array} \right. \quad \text{en } V'$$

Trabajando formalmente, sea $v \in V$. Entonces

$$b(u''(t), v) + M(t)a(u(t), v) = b(f(t), v)$$

Por (3)

$$\widehat{b}(iu'', iv) + M(t)\widehat{b}(Su(t), iv) = \widehat{b}(if(t), iv)$$

Entonces desde que V es denso en $\widehat{H}$, el sistema es equivalente con:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} u''(t) + M(t)Su(t) = f(t) \\ u(0) = u_0; \ u'(0) = u_1 \end{array} \right. \quad \text{en } H'$$

Consideremos la función Ψ tal que:

(9) $\Psi \in C^1([0, T])$, $\Psi(t) \geq m_0 > 0 \ \forall s \in [0, T]$

(10) $\Psi' \in L^\infty(0, T)$; $|\Psi'|_{L^\infty(0,T)} \leq M_1$

Teorema 1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y Ψ que verifica las condiciones (1), (2).

(11) $u_0 \in D(S^{\alpha+1})$

(12) $u_1 \in D(S^{\alpha+1/2})$

(13) $f \in L^2(0, T; D(S^{\alpha+1/2}))$

Entonces existe una única solución u del problema (8) tal que:

(14) $u \in L^{\infty}(0,T;D(S^{\alpha+1}))$

(15) $u' \in L^{\infty}(0,T;D(S^{\alpha+1/2}))$

(16) $u'' \in L^{2}(0,T;D(S^{\alpha}))$

(17) $u'' + \Psi(t)Su = f$ en $L^{2}(0,T;D(S^{\alpha}))$

La solución satisface el siguiente estimado de energía:

(18) $E(t) = |S^{\alpha+1/2}u'(t)|^2 + |S^{\alpha+1}u(t)|^2 \leq D_0 \exp(D_1 t)$

donde

$C_0 = |S^{(2\alpha+1)/2}u_1|^2 + \Psi(0)|S^{\alpha+1}u_0|^2 + |f|^2_{L^2(0,T;D(S^{(2\alpha+1)/2}))}$

$C_1 = \min\{1, m_0\}$; $C_2 = \max\{1, M_1\}$.

$D_0 = \frac{C_0}{C_1}$; $D_1 = \frac{C_2}{C_1}$

Demostración. Sea $V_m = [w_1, w_2, \ldots, w_m] \subset V$. Luego V_m es un subespacio de V de dimensión finita m, e invariante bajo la acción del operador S^k.

Sea entonces:

(19) $u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)w_i \in V_m$

Donde las funciones g_{im}, son determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales:

$$(20) \quad \begin{cases} b(u''_m(t), w_j) + M(t)a(u_m(t), w_j) = a(f(t), w_j) & \forall j = 1, 2, \ldots, m \\ u_m(0) = u_{0m};\ u'_m(0) = u_{1m} \end{cases}$$

Por la selección de la base especial, el sistema es equivalente con el sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} g''_{jm}(t) + M(t)\sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_{km}(t) = b(f(t), w_j = f_j(t)) \\ g_{jm}(0) = b(u_0, w_j) = a_j \\ g'_{jm}(0) = b(u_1, w_j) = b_j \\ j = 1, 2, \ldots, m \end{cases} \qquad (**)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales lineales (**), admite una única solución en un intervalo $[0, t_m\rangle$, de donde seguimos la existencia de las soluciones aproximadas u_m para

$m \geq 1$. Seguimamente debemos obtener estimado a priori para la sucesión $\{u_m\}$ de modo que podamos prolongarlas a un intervalo uniforme de existencia.

ESTIMADO A PRIORI 1. Por linealidad la igualdad en (20) se verifica para todo $v \in V_m$. Entonces haciendo $v = S^{2\alpha+2}u_m'(t)$, obtenemos:

$$(21)\quad (S^{\alpha+1/2}u_m''(t), S^{\alpha+1/2}u_m'(t)) + M(t)(S^{\alpha+1}u_m(t), S^{\alpha+1}u_m'(t)) = (S^{\alpha+1/2}f(t), S^{\alpha+1/2}u_m'(t))$$

Luego:

$$\frac{d}{dt}\left\{|S^{\alpha+1/2}u_m'(t)|^2 + M(t)|S^{\alpha+1}u_m(t)|\right\} \leq |S^{\alpha+1/2}f(t)|^2 + |S^{\alpha+1/2}u_m'(t)|^2 + M_1|S^{\alpha+1}u_m(t)|^2$$

Ahora integrando en esta desigualdad:

$$\begin{aligned}(22)\quad & |S^{\alpha+1/2}u_m'(t)|^2 + m_0|S^{\alpha+1}u_m(t)|^2 \leq |S^{\alpha+1/2}u_m'(t)|^2 + \dot{M}(t)|S^{\alpha+1}u_m'(t)|^2 \leq \\ & \leq \int_0^t |S^{\alpha+1/2}f(s)|^2 ds + \int_0^t |S^{\alpha+1/2}u_m'(t)|^2 ds + |S^{\alpha+1/2}u_m'(0)|^2 + M(0)|S^{\alpha+1}u_m(0)|^2 \\ & + M_1 \int_0^t |S^{\alpha+1}u_m(s)|^2 ds \leq |u_1|^2_{\alpha+1/2} + M_0|u_0|^2_{\alpha+1} + T|f|^2_{L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+1/2}))} + \\ & + \int_0^t |S^{\alpha+1/2}u_m'(s)|^2 ds + M_1 \int_0^t |S^{\alpha+1}u_m(s)|^2 ds\end{aligned}$$

Entonces

$$(23)\quad \eta(t) = |S^{\alpha+1/2}u_m'(t)|^2 + |S^{\alpha+1}u_m(t)|^2 \leq D_0 + D_1 \int_0^t \eta(s) ds$$

Aplicando el lema de Gronwall obtenemos:

$$(24)\quad |S^{\alpha+1/2}u_m'(t)|^2 + |S^{\alpha+1}u_m(t)|^2 \leq D_0 e^{D_1 t} \leq D_0 e^{D_1 T}$$

Luego

(25) (u_m) es acotada en $L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+1}))$

(26) (u_m') es acotada en $L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+1/2}))$

ESTIMADO A PRIORI 2. Multiplicando en la ecuación aproximada por w_j y luego sumando, obtenemos:

$$(27)\quad \sum_{j=1}^{m}(u_m''(t), w_j)w_j + \sum_{j=1}^{m}(Su_m(t), w_j)w_j = \sum_{j=1}^{m}(f(t), w_j)w_j$$

Por la definición de la proyección, $P_m : V \to V_m$:

$$(28)\quad u_m''(t) = -M(t)Su_m(t) + P_m f(t) = -M(t)Su_m(t) + f_m(t)$$

Luego:

$$(29)\quad |S^\alpha u_m''(t)| \leq M_0|S^{\alpha+1}u_m(t)| + d_4|S^{\alpha+1/2}f(t)|$$

Por lo cual

(30) (u_m'') es acotada en $L^2(0,T;D(S^\alpha))$.

CONVERGENCIA DE LAS SOLUCIONES APROXIMADAS

Para tratar la convergencia de las soluciones aproximadas utilizamos el siguiente:

Lema 2. Sean X, Y, Z espacios de Banach tales que $X \subset Y \subseteq Z$, con inmersiones continuas y la inmersión $X \subset Y$ es compacta. Sea

$$W = \{u \in L^p(0,T;X);\ u' \in L^q(0,T;Z)\}$$

donde u' denota la derivada generalizada de $u : [0,T] \to X$, sobre $(0,T)$. Entonces

(31) Si $p = \infty$, $q > 1$ entonces $W \subseteq C([0,T];Z)$ es compacta.

(32) Si $1 \leq p < \infty$, $q = 1$ entonces $W \subseteq L^p(0,T;Y)$ es compacta.

Demostración. (Ver J. Simon [15]).

Por los estimados 1, 2, tenemos que:

(33) (u_m) es acotada en $L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+1}))$

(34) (u_m') es acotada en $L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+1/2}))$

(35) (u_m'') es acotada en $L^2(0,T;S^\alpha)$

Luego, existe una subsucesión de (u_m) que continuamos denotando de la misma forma tal que:

(36) $u_m \to u$ débil-* en $L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+1}))$

(37) $u_m' \to u'$ débil en $L^2(0,T;D(S^{\alpha+1/2}))$

(38) $u_m'' \to u''$ débil en $L^2(0,T;D(S^{\alpha}))$

Por las inmersiones continuas y compactas: $D(A^{\alpha+1}) \subset D(A^{(2\alpha+1)/2}) \subset D(A^{\alpha})$, el Lema 2, existe una adecuada subsucesión de (u_m) que continuamos denotando de la misma forma, tal que:

(39) $u_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ fuerte en $C^0([0,T];D(S^{(2\alpha+1)/2})) \subset C^0([0,T];W_0)$

(40) $u_m' \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} u'$ fuerte en $C^0([0,T];D(S^{\alpha}))$

De (37), (39) y procediendo de forma estándar obtenemos que la función u es solución del problema (3) y verifica:

(41) $u''(t)\Psi(t)Su(t) = f(t)$ en $L^2(0,T;D(S^{\alpha}))$

Para demostrar que la solución u verifica el estimado de energía (18), probaremos primero que:

(42) $u_m(t) \to u(t)$ débil en $D(S^{\alpha+1})$ $\forall t \in [0,T]$

(43) $u_m'(t) \to u'(t)$ débil en $D(S^{(2\alpha+1)/2})$ $\forall t \in [0,T]$

(44) $u_m''(t) \to u''(t)$ débil en $D(S^{\alpha})$ $\forall t \in [0,T]$

Sea $v \in V_k$; $m \geq k$. Tenemos

(45) $(S^{\alpha+1}u_m(t), S^{\alpha+1}v) = (S^{\alpha+1/2}u_m(t), S^{\alpha+3/2}v) \to$
$\to (S^{\alpha+1/2}u(t), S^{\alpha+3/2}v) = (S^{\alpha+1}u(t), S^{\alpha+1}v)$

Observación: Por (40)

(46) $|(S^{\alpha+1/2}u_m(t) - S^{\alpha+1/2}u(t), S^{\alpha+3/2}v)| \leq |S^{\alpha+1/2}u_m(t) - S^{\alpha+1/2}u(t)||S^{\alpha+3/2}v| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Análogamente:

$$(47)\ (S^{\alpha+1/2}u_m'(t), S^{\alpha+1/2}v) = (S^\alpha u_m'(t), S^{\alpha+1}v) \rightarrow$$
$$\rightarrow (S^\alpha u'(t), S^{\alpha+1/2}v) = (S^{\alpha+1/2}u'(t), S^{\alpha+1/2}v)$$

Asimismo

$$(48)\ (S^\alpha u_m''(t), S^\alpha v_k) = -M(t)(S^{\alpha+1}u_m(t), S^\alpha v_k) + (S^\alpha f_m(t), S^\alpha v_k) =$$
$$= -M(t)(S^{\alpha+1}u_m(t), S^\alpha v_k) + (f_m(t), S^{2\alpha}v_k)$$
$$= -M(t)(S^{\alpha+1}u_m(t), S^\alpha v_k) + (f(t), S^{2\alpha}v_k) \rightarrow -M(t)(S^{\alpha+1}u(t), S^\alpha v_k) + (S^\alpha f(t), S^\alpha v_k)$$
$$= (S^\alpha u'', S^\alpha v_k)$$

Luego por el Estimado 1 y (44), (45), obtenemos que:

$$(49)\ |S^{\alpha+1/2}u'(t)|^2 + |S^{\alpha+1}u(t)|^2 \leq \varliminf_{m\to\infty} \left\{|S^{\alpha+1/2}u_m'(t)|^2 + |S^{\alpha+1}u_m(t)|^2\right\} \leq D_0 e^{D_1 T}$$

UNICIDAD. Sean u, z dos soluciones de (41) y $y = u - z$. Entonces

$$(50)\ y \in L^\infty(0, T; D(S^{\alpha+1}))$$

$$(51)\ y' \in L^\infty(0, T; D(S^{(2\alpha+1)/2}))$$

$$(52)\ y'' \in L^2(0, T; D(S^\alpha))$$

$$(53)\ y(0) = 0;\ y'(0) = 0$$

Y satisface la ecuación:

$$(54)\ y'' + \Psi(t)Ay = 0 \text{ en } L^2(0, T; D(S^\alpha))$$

Componiendo con $w = 2y'(t) \in D(S^\alpha)$ en esta ecuación, obtenemos

$$(55)\ \frac{d}{dt}\{|S^\alpha y'(t)|^2 + \Psi(t)|S^{\alpha+1/2}y(t)|^2\} = \Psi'(t)|S^{\alpha+1/2}y(t)|^2 \leq M_1|S^{\alpha+1/2}y(t)|^2$$

integrando de 0 a t y teniendo en cuenta que $y(0) = y'(0) = 0$

$$(56)\ \eta(t) = |S^\alpha y'(t)|^2 + m_0|S^{(2\alpha+1)/2}y(t)|^2 \leq C\int_0^t \eta(s)ds$$

por el lema de Gronwall y desde que $y \in C^0([0, T]; D(S^{\alpha+1/2}))$, $y' \in C^0([0, T]; D(S^\alpha))$

$$(57)\ S^\alpha y'(t) = S^{\alpha+1/2}y(t) = 0,\ \forall t \in [0, T].$$

Luego $u = z$.

PROBLEMA NO-LINEAL En esta parte demostraremos la existencia de solución local del problema:

(58) $u'' + M(|u(t)|_0^2)Su = f$; en $L^2(0, T_0; D(S^\alpha))$

(59) $u(0) = u_0$; $u'(0) = u_1$

donde:

(60) $(W_0, |u|_0)$ es un espacio de Banach real, reflexivo, tal que su correspondiente espacio dual W_0^* es estrictamente convexo y verifiva la condición:

(61) $D(S^{\alpha+1/2}) \subset W_0$.

Entonces de (60) y de la teoría de los operadores máximo monótonos, obtenemos las siguientes propiedades del operador de dualidad.

Teorema 2. Si W es un espacio de Banach, real reflexivo tal que su espacio dual W^*, es estrictamente convexo. Entonces la aplicación de dualidad $J : W \to W^*$ es simple valuada, demicontinua, máximo monótona, acotada, coercitiva y

$$|Ju|_{W^*} = |u|_W$$

La función $u \to |u|_W^2$ es G-diferenciable sobre W y si $\Psi(u) = |u|_W^2$, entonces

$$\Psi'(u) = 2Ju, \forall u \in W$$

HIPÓTESIS SOBRE LA FUNCIÓN M

H-1 $M \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$

H-2 $M(s) > m_0$, $\forall s \in \mathbb{R}$; y

H-3 M, M', son crecientes.

DEFINICIÓN DE CONSTANTES. En esta parte definimos diversas constantes que aparecen en esta parte del trabajo.

Constantes de inmersión:

C-1 $|v|_0 \leq d_0|S^{\alpha+1}v|$, $\forall v \in D(S^{\alpha+1})$

C-2 $|v|_0 \leq d_1|S^{\alpha+3/2}v|$, $\forall v \in D(S^{\alpha+3/2})$

C-3 $|S^{\alpha+1/2}v| \leq b_1|S^{\alpha+1}v|$, $\forall v \in D(S^{\alpha+1})$

C-4 $|S^{\alpha+1}v| \leq b_2|S^{\alpha+3/2}v|$, $\forall v \in D(S^{\alpha+3/2})$

Consideremos los siguientes espacios de Banach:

$W = \{v \in L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+1}));\ v' \in L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+1/2}))\}$

$Z = \{v \in L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+3/2}));\ v' \in L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+1}));\ v'' \in L^2(0,T;D(S^{\alpha+1/2}))\}$

Entonces $Z \subset W$ con inmersión continua y compacta. En efecto, sea (v_m) una sucesión acotada en Z, entonces

(v_m) es acotada en $L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+3/2}))$

(v_m') es acotada en $L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+1}))$

(v_m'') es acotada en $L^2(0,T;D(S^{\alpha+1/2}))$

Desde el Teorema de Simón, podemos obtener una subsucesión $(v_k) \subset (v_m)$ y una función v, tal que:

(62) $v_k \to v$, fuerte en $C^0([0,T];D(S^{\alpha+1})) \subset L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+1}))$

(63) $v_k' \to v'$, fuerte en $C^0([0,T];D(S^{\alpha+1/2})) \subset L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+1/2}))$

Luego $v_k \to v$, en W.

Teorema 2. Sean $v \in W$,

(64) $u_0 \in D(S^{\alpha+3/2})$

(65) $u_1 \in D(S^{\alpha+1})$

(66) $f \in L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+1}))$

Entonces, existe una única solución $u \in Z$ del problema:

(67) $u'' + M(|v(t)|_0^2)Su = f$ en $L^2(0,T;D(S^{\alpha+1/2}))$

(68) $u(0) = u_0$; $u'(0) = u_1$

Demostración: Procediendo como en la demostración del Teorema 1, haciendo $\Psi(t) = M(|v(t)|_W)$, reemplazando α por $\alpha + 1/2$ en el Lema 1, se obtiene que para todo $v \in W$, existe una única función u, tal que:

(69) $u \in L^\infty(0,T_0;D(S^{\alpha+3/2}))$

(70) $u' \in L^\infty(0,T_0;D(S^{\alpha+1}))$

(71) $u'' \in L^2(0,T_0;D(S^{\alpha+1/2}))$

(72) $u'' + \Psi(t)Su = f$ en $L^2(0,T;D(S^{\alpha+1/2}))$

(73) $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$

y además satiface el estimado de energía:

(74) $|S^{\alpha+1}u'(t)|^2 + |S^{\alpha+3/2}u(t)|^2 \leq D_0e^{D_1T}$

Luego $u \in Z$.

Consideremos

$B_K = \{v \in W;\ |v|_W^2 = |S^{\alpha+1/2}v'(t)|^2 + |S^{\alpha+1}v(t)|^2 \leq K^2\}$

La bola en W con centro en 0 y radio K.

Entonces por la hipótesis (H-3) y (74), se tiene que para $v \in B_K$:

(75) $|v(t)|_0 \leq d_0K$, $|v'(t)|_0 \leq d_1K$

(76) $M(|v(t)|_0^2) \leq M(d_0^2K^2) = M_0$

(77) $M'(|v(t)|_0^2)|v(t)|_0|v'(t)|_0 \leq d_0d_1$; $\quad M'(d_0^2K^2)K^2 = M_1 = M_1(K)$

Supongamos que los datos iniciales son suficientemente pequeños tales que

(78) $\max\{b_1^2, b_2^2\}D_0e^{D_1T} \leq K^2$.

Teorema 3. Sean u_0, u_1, f, datos iniciales que satisfacen las condiciones del Teorema 2 y la condición (78). Entonces existe una única solución $u \in B$ del problema (58), (59).

Demostración. Definimos la función $G : B_K \subset W \to B_0 \subset Z$ tal que para $v \in B$, $Gv = u \in Z$, es la única solución del problema:

(79) $u'' + M(|v(t)|_0^2)Su = f$ en $L^\infty(0,T; D(S^{\alpha+1/2}))$

(80) $u(0) = u_0$; $u'(0) = u_1$

Donde:

$B_0 = \{u \in Z;\ |S^{\alpha+1}u'(t)|^2 + |S^{\alpha+3/2}u(t)|^2 \leq D_0 e^{D_1 T},\ |S^{\alpha+1/2}u''(t)| \leq C_2\}$

Entonces para $u \in B_0 \subset Z$, se tiene que:

$$\begin{aligned} |S^{\alpha+1/2}u'(t)|^2 + |S^{\alpha+1}u(t)|^2 &\leq b_1^2|S^{\alpha+1}u'(t)|^2 + b_2^2|S^{\alpha+3/2}u(t)|^2 \\ &\leq \max\{b_1^2, b_2^2\}(|S^{\alpha+1}u'(t)|^2 + |S^{\alpha+3/2}u(t)|^2) \\ &\leq \max\{b_1^2, b_2^2\}D_0 e^{D_1 T} \leq K^2 \end{aligned}$$

Luego $B_0 \subset B_K$. Sea $i : Z \to W$, la función de inmersión de Z en W, que es lineal, continua y compacta. Desde que B_0 es un conjunto acotado en Z, $\overline{i(B_0)}$, es un conjunto compacto en W. Además $\overline{i(B_0)} \subset B_K \subset W$. Entonces $iG : B \subset W \to \overline{i(B_0)} \subset B_K \subset W$, aplica la bola cerrada de W en un conjunto compacto de W y $iG(\partial B) \subset B_K$.

Ahora demostraremos que la aplicación es continua.

Sean $(v_m) \subset W$, $v \in W$, tales que $v_m \to v$, en W. Entonces:

(81) $v_m \to v$, en $L^\infty(0,T; D(S^{\alpha+1}))$

(82) $v_m' \to v'$, en $L^\infty(0,T; D(S^{\alpha+1/2}))$

Sean $(u_m) \subset Z$, $u \in Z$, las correspondientes soluciones de los problemas:

(83) $u_m'' + M(|v_m(t)|_0^2)Au_m = f$ en $L^2(0,T; D(S^{\alpha+1/2}))$

(84) $u_m(0) = u_0$; $u_m'(0) = u_1$

(85) $u'' + M(|v(t)|_0^2)Au = f$ en $L^2(0,T; D(S^{\alpha+1/2}))$

(86) $u(0) = u_0$; $u'(0) = u_1$

Consideremos la sucesión $(z_m) = (u_m - u) \subset Z$. Entonces desde (83), (84), tenemos que

(87) $z'' + M(|v_m(t)|_0^2)Az_m = (M(|v_m(t)|_0^2) - M(|v_m(t)|_0^2))Su$ en $L^2(0,T;D(S^{\alpha+1/2}))$

Entonces,

(88) $z_m(0) = z_m'(0) = 0$

componiendo con $w = S^{\alpha+1/2}z_m(t)$, obtenemos:

(89) $$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}\{|S^{\alpha+1}z_m'(t)|^2 + M(|v_m(t)|_0^2)|S^{\alpha+3/2}z_m(t)|^2\}\\ &= 2(M(|v(t)|_0^2) - M(|v_m(t)|_0^2))(S^{\alpha+3/2}u(t), S^{\alpha+1/2}z_m(t))\\ &+ M'(|v_m(t)|_0^2)\left\langle Jv_m(t), v_m'(t)\right\rangle |S^{\alpha+3/2}z_m(t)|^2\\ &\leq |M(|v(t)|_0^2) - M(|v_m(t)|_0^2)|^2|S^{\alpha+3/2}u(t)|^2 + |S^{\alpha+1}z_m'(t)|^2 + M_1|S^{\alpha+3/2}z_m(t)|^2\\ &\leq C_m(t) + |S^{\alpha+1}z_m'(t)|^2 + M_1|S^{\alpha+3/2}z_m(t)|^2\end{aligned}$$

Donde:

(90) $C_m(t) = |M(|v_m(t)|_0^2) - M(|v(t)|_0^2)||S^{\alpha+3/2}u(t)|^2$

Tenemos que:

$W \subset C^0([0,T], D(S^{\alpha+1/2})) \subset C^0([0,T], W_0)$.

Luego $v_m \to v$, en $C^0([0,T], W_0)$, lo que implica que, $|v_m(t)|_0^2 \to |v(t)|_0^2$ uniformemente y por la continuidad de M, $C_m(t) \to 0$, $m \to \infty$.

Entonces:

(91) $|S^{\alpha+1}z_m'(t)|^2 + |S^{\alpha+3/2}z_m(t)|^2 \leq C_m(t)e^{C_4T}$

Tomando límite $m \to \infty$ y desde que $C_m(t) \to 0$, obtenemos que:

(92) $z_m \to z$, en W

Lo que demuestra que la aplicación iG es continua. Para terminar la demostración, aplicaremos el siguiente resultado:

Teorema 4. (Rothe's). Sea B, denota una bola cerrada de un espacio vectorial normado X. Si f aplica B continuamente sobre un subconjunto compacto de X y si $f(\partial B) \subset B$, entonces f posee un punto fijo.

Demostración. (Ver E. Zeidler [17]).

Por aplicación directa del Teorema de Rothe's, existe un punto fijo $u = iGu \in B_k \subset W$, solución del problema :

(93) $u'' + M(|u(t)|_0^2)Su = f$ en $L^2(0, T : D(S^\alpha))$

(94) $u(0) = u_0;\ u'(0) = u_1$

UNICIDAD.

Sean u, z dos soluciones del problema (93) y (94) y $y = u - z$. Entonces se verifica que:

(95) $y \in L^\infty(0, T; D(S^{\alpha+1}))$

(96) $y' \in L^\infty(0, T_0; D(S^{\alpha+1/2}))$

(97) $y'' \in L^2(0, T_0; D(S^\alpha))$

(98) $y(0) = y'(0) = 0$

y satisface la ecuación :

(99) $y'' + M(|u(t)|_0^2)Sy = (M(|z(t)|_0^2) - M(|u(t)|_0^2))Sz$ en $L^2(0, T; D(S^{\alpha+1/2}))$

Componiendo con $w(t) = 2y'(t)$ en esta ecuación y teniendo en cuenta que:

(100) $|M(|z(t)|_0^2) - M(|u(t)|_0^2)| \leq C|y(t)|_0$

obtenemos:

(101) $\frac{d}{dt}\{|S^\alpha y'(t)|^2 + \Psi(t)|S^{\alpha+1/2}y(t)|^2\}$

$\leq C_0|y(t)|_0|S^{\alpha+1/2}z(t)||S^\alpha y'(t)| + \Psi'(t)|S^{\alpha+1/2}y(t)|^2$

$\leq C_2|S^{\alpha+1}y(t)||S^\alpha y'(t)| + C_4|S^{\alpha+1/2}y(t)|^2$

$\leq C|S^\alpha y'(t)|^2 + C|S^{\alpha+1/2}y(t)|^2$

Donde C representa diversas constantes que no dependen de t. Integrando de 0 a t:

(102) $\eta(t) = |S^\alpha y'(t)|^2 + |S^{\alpha+1/2}y(t)|^2 \leq C\int_0^t \eta(s)ds$

por el lema de Gronwall

$|S^{\alpha}y'(t)|^2 + |S^{\alpha+1/2}y(t)|^2 = 0$

Desde $y \in C^0([0,T]; D(S^{\alpha+1/2}))$, $y' \in C^0([0,T]; D(S^{\alpha}))$, obtenemos

$S^{\alpha+1}y'(t) = S^{\alpha+3/2}y(t) = 0$, $\forall t \in [0,T]$.

Luego $u = z$.

SOLUCIÓN PARA DATOS MÁS GENERALES.

Sea el espacio de Hilbert:

(103) $X = \{f \in L^2(0,T; D(S^{\alpha+1}));\ f' \in L^2(0,T; D(S^{\alpha+1/2}))\}$

(104) $Y = L^2(0,T; D(S^{\alpha+1/2}))$

Desde las inmersiones densas y compactas

$D(S^{\alpha+3/2}) \subset D(S^{\alpha+1}) \subset D(S^{\alpha+1/''\prime})$,

y el Lema 2, tenemos que:

$D(S^{\alpha+3/2}) \times D(S^{\alpha+1}) \times X \subset D(S^{\alpha+1}) \times D(S^{\alpha+1/2}) \times Y$ con inmersión compacta.

Sea F la bola cerrada con centro en 0 y de radio $D_0^{1/2}$ en $D(S^{\alpha+3/2}) \times D(S^{\alpha+1}) \times X$ donde D_0 satisface la condición (76). Entonces $\overline{F}$ es compacta en $D(S^{\alpha+1}) \times D(S^{\alpha+1/2}) \times Y$ y F es denso en $\overline{F}$.

TEOREMA 3. Sea $(u_0, u_1, f) \in \overline{F}$: Entonces existe una única u en la clase

(105) $u \in L^{\infty}(0,T; D(S^{\alpha+1}))$

(106) $u' \in L^{\infty}(0,T; D(S^{\alpha+1/2}))$

(107) $u'' \in L^2(0,T; D(S^{\alpha}))$

Solución del problema :

(108) $u'' + M(|u(t)|_0^2)Su = f$ en $L^2(0,T; D(S^{\alpha+1/2}))$

(109) $u(0) = u_0$; $u'(0) = u_1$

Demostración. Desde que $(u_0, u_1, f) \in \overline{F}$, existe una sucesión $(u_{0k}, u_{1k}, f_k) \subset F$ tal que:

(110) $u_{0k} \to u_0$, en $D(S^{\alpha+1})$

(111) $u_{1k} \to u_1$, en $D(S^{\alpha+1/2})$

(112) $f_k \to f$, en $L^2(0,T;D(S^{\alpha+1/2}))$

Sea $(u_k) \subset Z$, las correspondientes soluciones dadas por el Teorema (3) de:

(113) $u_k'' + M(|u_k(t)|_0^2)Su_k = f_k$ en $L^2(0,T;D(S^{\alpha+1/2}))$

(114) $u_k(0) = u_{0k}$; $u_k'(0) = u_{1k}$

La sucesión (u_k) satisface:

(115) $|S^{\alpha+1/2}u_k'(t)|^2 + |S^{\alpha+1}u_k(t)|^2 \leq K^2$

(116) $S^\alpha u_k''(t) = -M(|u_k(t)|_0^2)S^{\alpha+1}u_k(t) + S^\alpha f_k(t)$

Luego :

(u_k) es acotada en $L^\infty(0,T : D(S^{\alpha+1}))$

(u_k') es acotada en $L^\infty(0,T : D(S^{\alpha+1/2}))$

(u_k'') es acotada en $L^\infty(0,T : D(S^{\alpha}))$

Como en la demostración del Teorema 1, podemos obtener una subsucesión $(u_m) \subset (u_k)$ y una función u, tal que:

(117) $u_m \to u$, débil $*$ en $L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+1}))$

(118) $u_m' \to u'$, débil $*$ en $L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+1/2}))$

(119) $u_m'' \to u''$, débil $*$ en $L^\infty(0,T;D(S^{\alpha}))$

(120) $u_m \to u$, fuerte en $C^0([0,T];D(S^{\alpha+1/2})) \subset C^0([0,T];W_0)$

(121) $u_m' \to u'$, fuerte en $C^0([0,T];D(S^{\alpha}))$

Con estos estimados la función u, satisface la ecuación:

(122) $u'' + M(|u(t)|_0^2)Su = f$ en $L^2(0,T;D(S^{\alpha}))$

(123) $u(0) = u_0$; $u'(0) = u_1$

En efecto, por (120), (121)

(124) $u_m(0) = u_{0m} \to u_0 = u(0)$ en $D(S^{\alpha+1}) \subset D(S^{\alpha+1/2})$

(125) $u_m'(0) = u_{1m} \to u_1 = u'(0)$ en $D(S^{\alpha+1/2}) \subset D(S^\alpha)$

Ahora demostraremos la convergencia:

(126) $M(|u_m(t)|_0^2)Su_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} M(|u(t)|_0^2)Su$ converge débil en $L^\infty(0,T_0;D(S^\alpha))$

Por (113), $|u_m(t)|_0^2 \to |u(t)|_0^2$ en $C^0([0,T])$. Luego por la continuidad uniforme de M

(127) $M(|u_m(t)|_0^2) \to M(|u(t)|_0^2)$ en $C([0,T])$

Por otro lado, haciendo

(128) $N_m(t) = M(|u_m(t)|_0^2)$; $N(t) = M(|u(t)|_0^2)$

(129) $|\int_0^T (N_m(t)Su_m(t) - N(t)Su(t), v(t))_\alpha| dt \leq$

$\leq |\int_0^T (N_p(t)Su_m(t) - N(t)Su_m(t), v(t))_\alpha| dt$

$\leq |\int_0^T (N(t)Sz_m(t) - N(t)Su(t), v(t))_\alpha| dt$

desde que la función $N \in C([0,T])$ y es acotada, $Nv \in L^1(0,T;D(S^\alpha))$. Luego por (127), la segunda integral converge a 0. La primera integral es

(130) $|\int_0^T (N_m(t)Su_m(t) - N(t)Su_m(t), v(t))_\alpha| dt \leq \int_0^T |N_p(t) - N(t)||S^{\alpha+1}u_m(t)||S^\alpha u(t)| dt$

$\leq \sup_{t\in[0,T]} |N_p(t) - N(t)||S^{\alpha+1}u_m(t)| \int_0^T |S^\alpha(t)| dt \leq C \sup_{t\in[0,T]} |N_m(t) - N(t)| \overset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$

lo que demuestra (126). Luego :

(131) $u'' + M(|u(t)|_0^2)Su = f$ en $L^2(0,T;D(S^\alpha))$

(132) $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$

APLICACIONES

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto regular. Consideremos la función real $\rho : \Omega \to \mathbb{R}^+$, tal que $0 < \rho(x) \leq \rho_1$ y $\rho^{-1} \in L^\infty(\Omega)$.

   $V = H_0^1(\Omega)$, $W = L^p(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$

   $1 < \rho \leq \frac{2n}{n-2}$, si $n \geq 3$, y $1 < p < \infty$, si $n = 1, 2$

$M(s,r) = a + bs^{q/2}$, $q \geq 2$, $a > 0$, $b > 0$;

$Au = -\Delta u$, $Bu = \rho u$, $S = \rho^{-1}(-\Delta)$, $D(S) = D(-\Delta) = \{u \in H_0^1(\Omega);\ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$.

$(u_0, u_1, f) \in D(S^{\alpha+1}) \times D(S^{\alpha+1/2}) \times X$, datos iniciales que satisfacen las condiciones del Teorema 3.

1.1 Sea $\alpha = 0$, entonces $D(S^{1/2}) = H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. Haciendo $W_0 = H_0^1(\Omega)$. Entonces existe una única solución para los problemas:

$$(133)\quad \begin{cases} \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (a + b|\nabla u|^q_{L^2(\Omega)}) & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \Sigma \\ u(0) = u_0;\ u'(0) = u_1 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

$$(134)\quad \begin{cases} \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (a + b|u|^q_{L^p(\Omega)})(-\Delta u) = f & \text{en } Q. \\ u = 0 & \text{en } \Sigma \\ u(0) = u_0;\ u'(0) = u_1 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

En particular si $q = p = 2$, (133) es conocida como la ecuación de Kirchhoff y (134) como la ecuación de Carrier.

$$(135)\quad \begin{cases} \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (a + b\int\limits_\Omega |u|^p dx)(-\Delta u) = f & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \Sigma \\ u(0) = u_0;\ u'(0) = u_1 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

1.2 Si $\alpha = -1/2$, entonces $D(S^{\alpha+1/2}) = D(S^0) = L^2(\Omega)$. En este caso podemos tratar con datos más generales y obtener soluciones para el problema de Carrier. En efecto si $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(Q)$, entonces la solución u del problema

$$(136)\quad \begin{cases} \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (a + b\int\limits_\Omega |u|^2 dx)(-\Delta u) = f & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \Sigma \\ u(0) = u_0;\ u'(0) = u_1 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

Esta en la clase :

- $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$
- $u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$
- $u'' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$

2. Sea $J : W \to W^*$ el operador de dualidad sobre W y $\varphi(u) = |u|_W^2$. En el caso que W sea un espacio de Hilbert $\varphi'(u) = 2Ju$, donde J es el operador de Ríesz, $\langle Ju, v\rangle_{W^* \times W} = (u,v)_W$; $\forall u, v \in W$.

Como casos particulares de la aplicación 2, para $W = V = D(A^{1/2})$, tenemos el problema abstracto de Kirchhoff :

$$(137) \quad \begin{cases} u'' + M(|A^{1/2}u|^2)Au = f \\ u(0) = u_0;\ u'(0) = u_1 \end{cases}$$

formulado por Lions J.L. en [9]. Si $W = H$, se tiene el problema de Carrier abstracto:

$$(138) \quad \begin{cases} u'' + N(|u|_H^2)Au = f \\ u(0) = u_0;\ u'(0) = u_1 \end{cases}$$

Una adecuada generalización de las aplicaciones (2), (3) es considerar $W = D(A^\alpha)$ para obtener:

$$(139) \quad \begin{cases} u'' + N(|A^\alpha u|^2)Au = f \\ u(0) = u_0;\ u'(0) = u_1 \end{cases}$$

conocido como el modelo abstracto de Kirchhoff-Carrier.

BIBLIOGRAFIA

[1] CARRIER G.. F. *On the non-linear vibration problern of the elastic string.* Quart. Appl. Math. -3- (1945).

[2] COUSIN A., FROTA C., LARKIN N., MEDEIROS L. A. *On the abstrac model of Kirchhoff Carrier Equation.* Conim. In App. Analysis. - 3 - (1997).

[3] EBIHARA Y. MEDEIROS L.A. -MILLA. M. *Local Solutions for a nonlinear degenerate hyperbolic equations.* Nonlinear Analysis. Vol. 10 (1986).

[4] IZAGUIRRE R., VÉLIZ Y.*Solución local para una clase de ecuaciones no-lineales degeneradas tipo Kirchhoff - Carrier 1 Seminario Internacional de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones.* Universidad Ricardo Palma - Lima - Perú -(1999).

[5] IZAGUIRRE R., VÉLIZ V. *Solución Local para una clase de ecuaciones no-lineales de tipo Kirchhoff.* Actas del 450 Seminario Brasileiro de Analise (1997).

[6] KIRCHHOFF G *Vorlesungenuber mechanik.* Teubner, Leipzig (1883).

[7] LIONS J.L. *Quelques Methodes de Resolution des Probleme aux limites nonlinear Dunod.* Paris. (1969).

[8] MEDEIROS LA., MILLA M. *Solutionsfor the Equation of Non fibrations Sobolev Spaces of Fractionary Order.* Math. ApI. Comp. (1987).

[9] MEDEIROS L.A., MILLA M. *Rernarks on a nonlinear model vibrations of string with dammping.* 30 Seminario Brasilero deAnalise LN CC Rl (1989).

[10] ONO K. *Global existence, Decay and Blowup of Solutions for Sorne Mildly Degenerate Nonlinear KirchhoffString.* J. Diff. Eq. 137 (1997).

[11] PERLA G. *On classical solutions of a quasilinear hyperbolic equations. Nonlinear Analysis.* Vol. 3(1979).

[12] POHOZAEV 5. *The Kirchhoff quasilinear hyperbolic equation.* Differential Equations Vol. 21. (1985).

[13] POHOZAEV 5. *On a class of quasilinear hyperbolic equation.* Math. Sbornik, Vol. 96 (1975).

[14] RIVERA P. *On local strong solutions of a nonlinear partial differential equation.* AppI. Analysis Vol. 10. (1980).

[15] SIMON J. *Cornpact Sets in the Space L (O, T; B).* Universite Pierre et Marie Curie. Laboratoire d´ Analyse Numerique (1985).

[16] YAMADA Y. *Sorne Nonlinear Degenerate Wave Equations.* Non Linear Analysis, 10 (11) (1987).

[17] ZEIDLER E. Non Linear Functional Analysis. Part ll-B. (1990).