PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XI - N°1 Pgs. 41-54 Lima - Perú Oct. 2008

SINGULARIDAD DE SOLUCIONES PARA UNA ECUACIÓN DE ONDA DEGENERADA NO LINEAL CON TÉRMINO DISIPATIVO

Teófanes Quispe Méndez[1]

Resumen.- *En el presente trabajo, estudiamos la singularidad en tiempo finito de las soluciones del problema mixto para un tipo de ecuación de onda degenerada no lineal con término disipativo.*

Palabras claves: *Singularidad de soluciones, Existencia no global, Ecuación de onda degenerada no lineal, Ecuación de evolución.*

BLOW-UP OF SOLUTIONS FOR A NONLINEAR DEGENERATE WAVE EQUATION WITH DISSIPATIVE TERM

Abstract. *In present work, we study the blow-up infinite time of solutions to the mixed problem for a type of nonlinear degenerate wave equation with dissipative term.*

Key Words. *Blow-up of solutions, Global nonexistence, Nonlinear degenerate wave equation, Evolution equation.*

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo consideramos el siguiente problema de valores iníciales y frontera:

$$\begin{aligned} & u_{tt} + \alpha(x)u_t - \beta\Delta u_t - \Delta_p u = f(x,u) && , \; x \in \Omega, t \geq 0, \\ & u = 0 && , \; x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ & u(x,0) = u_0(x), \;\; u_t(x,0) = u_1(x) && , \; x \in \Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera bien regular $\partial\Omega$, Δ es el operador laplaciano, β es una constante positiva, $\alpha(x)$ es una función real no negativa para

[1]Profesor de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
E-mail: tquispem@unmsm.edu.pe

$x \in \Omega$, $f(x,s)$ es una función real no lineal para $s \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$ y el operador p-laplaciano definido para $p \geq 2$:

$$-\Delta_p u := -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Las ecuaciones de tipo (1.1) se utilizan para describir el movimiento longitudinal en la mecánica viscoelástica [1, 16]. También puede considerarse como un sistema que rige el movimiento longitudinal de una configuración viscoelástica que obedece el modelo de Voight no lineal [16].

En el caso que $p = 2$, se ha producido sobre la ecuación en (1.1) una literatura bastante impresionante sobre la existencia y la no existencia de las soluciones globales, y las propiedades de éstas, citamos algunas de ellas [3, 7, 9, 10, 11, 12]. Cuando $p > 2$, no se tiene muchos resultados conocidos. Gao and Ma [2], obtuvieron soluciones globales con el método de aproximación de Galerkin y el comportamiento asintótico de las soluciones, usando una desigualdad de diferencia de Nakao. Ye [19], obtiene la existencia global de soluciones combinando los métodos de aproximación de Galerkin y del pozo potencial, y el comportamiento asintótico, usando una desigualdad de diferencia de Nakao. Messaoudi and Houari [8], obtienen la no existencia de la solución global con energía inicial negativa (el cual es una mejora del resultado de Yang [16], quien obtiene con energía inicial negativa restringida), utilizando las técnicas empleadas por Levine and Serrin [5]. Wu and Tsai [14], obtienen que la solución local con la energía inicial no positiva y con energía positiva inicial pequeña la solución explota en tiempo finito, con modificación del método empleado por Vitillaro [13].

En este trabajo probaremos la propiedad de singularidad en tiempo finito de las soluciones del problema (1.1) con energía inicial no positiva y con energía inicial positiva restringida, por el método directo [6]. También se obtiene las estimativas para el tiempo de vida de las soluciones.

2. PRELIMINARES

En esta sección daremos algunas notaciones, conceptos, lemas y teoremas sin demostración que serán utilizados en el desarrollo del presente trabajo.

Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera bien regular $\partial\Omega$. Denotamos el producto interno y la norma de $L^2(\Omega)$ y $L^p(\Omega)$, con $(.,.)$ y $|\,.\,|_p$, respectivamente, para $1 \leq p \leq \infty$. Además $((.,.))$ y $\|.\|$, denotaran el producto interno y la norma de $H_0^1(\Omega)$, donde $((u,v)) := \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx$ es la forma de Dirichlet. En el espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ usamos la norma

$$\|u\|_{1,p} := \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Sea X un espacio de Banach, $0 < T \leq \infty$ y $1 \leq p \leq \infty$. Representamos con $L^p(0,T;X)$ al espacio de Banach de las funciones vectoriales $u :]0,T[\longrightarrow X$ tales que son medibles y $\|u(t)\|_X \in L^p(0,T)$, con la norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := \sup_{0<t<T} \text{ess} \|u(t)\|_X \ , \quad p = \infty.$$

Denotamos $v' := v_t$, $v'' := v_{tt}$ y $v(t)(x) := v(x,t)$.

Hipótesis. Imponemos sobre las funciones reales $\alpha(x)$ y $f(x,s)$ las siguientes condiciones para la existencia local:

$(H1)$ $\alpha \in L^\infty(\Omega)$.

$(H2)$ $f \in C^0(\Omega \times \mathbb{R})$ y existen constantes positivas a y b tal que

$$|f(x,s)| \leq a|s|^{\sigma-1} + b, \ \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

donde $2 < p < \sigma < \frac{pn}{n-p}$ si $n > p$ y $1 < p < \sigma < \infty$ si $n \leq p$.

Imponemos sobre las funciones $\alpha(x)$ y $f(x,s)$ las siguientes condiciones adicionales para la singularidad de soluciones:

$(H3)$ $\alpha(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega$.

$(H4)$ $f(x,s)\, s \geq 2(2\gamma+1) F(x,s)$, $\forall x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}$, donde γ es una constante positiva y $F(x,s) := \int_0^s f(x,\xi)\, d\xi$.

Lema 2.1 (Desigualdad de Sobolev-Poincaré). *Si* $1 \leq r \leq \frac{pn}{n-p}$ *para* $1 < p < n$ *o* $1 \leq r < \infty$ *para* $1 \leq n \leq p$, *entonces existe una constante positiva* B_1 *tal que*

$$|u|_r \leq B_1 \|u\|_{1,p}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Lema 2.2. *El operador p-laplaciano* $\Delta_p u$ *es acotado, monótono, semicontinuo de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *en* $W^{-1,q}(\Omega)$,

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx, \ \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

y

$$|\langle -\Delta_p u, v\rangle| \leq \|u\|_{1,p}^{p-1} \|v\|_{1,p}, \ \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

donde $W^{-1,q}(\Omega)$ *es el espacio dual de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *y* $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Definición 2.3. Una función $u : \Omega \times [0, T_{\max}[\longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada solución del problema (1.1) sobre $[0, T_{\max}[$ si satisface las condiciones $(1.1)_2 - (1.1)_3$ y la igualdad

$$u_{tt} + \alpha(x) u_t - \beta \Delta u_t - \Delta_p u = f(x,u) \quad \text{en} \quad L^2\left(0, T_{\max}; W^{-1,q}(\Omega)\right),$$

donde $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Teorema 2.4 (Existencia Local [15, 17, 18]). *Supongamos que las funciones* α *y* f *satisfacen las hipótesis* $(H1)$ *y* $(H2)$, *respectivamente, y que* $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *y* $u_1 \in L^2(\Omega)$. *Entonces existe un único intervalo* $[0, T_{\max}[$ *con* $0 < T_{\max} \leq \infty$ *y el problema* (1.1) *admite una única solución* u *sobre* $[0, T_{\max}[$ *tal que*

$$u \in L^\infty\left(0, T_{\max}; W_0^{1,p}(\Omega)\right),$$
$$u' \in L^\infty\left(0, T_{\max}; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0, T_{\max}; H_0^1(\Omega)\right),$$
$$u'' \in L^2\left(0, T_{\max}; W^{-1,q}(\Omega)\right),$$

donde $p^{-1}+q^{-1}=1$.

Lema 2.5 ([6]). *Sea* $\gamma>0$ *y sea* $B\in C^2([0,\infty[)$ *una función no negativa que satisface*

$$B''(t)-4(\gamma+1)B'(t)+4(\gamma+1)B(t)\geq 0.$$

Si $B'(0)>r_2B(0)+K_0$, *entonces* $B'(t)>K_0$, *para* $t>0$, *donde* K_0 *es una constante y*

$$r_2:=2(\gamma+1)-2\sqrt{(\gamma+1)\gamma}$$

es la menor raíz de la ecuación cuadrática $r^2-4(\gamma+1)r+4(\gamma+1)=0$.

Lema 2.6 ([6]). *Si* $J(t)$ *es una función no creciente en* $[t_0,\infty[$, $t_0\geq 0$ *y satisface la inecuación diferencial*

$$[J'(t)]^2\geq a+b[J(t)]^{2+\frac{1}{\gamma}},\quad \textit{para } t\geq t_0,$$

donde $a>0$, $\gamma>0$ *y* $b\in\mathbb{R}$, *entonces existe un número real positivo* T_* *tal que* $\lim_{t\to T_*^-}J(t)=0$ *y una cota superior de* T_* *puede ser estimado, respectivamente, en los siguientes casos:*

(*i*) *Si* $b<0$ *y* $J(t_0)<\min\left\{1,\sqrt{\frac{a}{-b}}\right\}$, *entonces*

$$T_*\leq t_0+\frac{1}{\sqrt{-b}}\ln\left(\frac{\sqrt{\frac{a}{-b}}}{\sqrt{\frac{a}{-b}}-J(t_0)}\right).$$

(*ii*) *Si* $b=0$, *entonces*

$$T_*\leq t_0+\frac{J(t_0)}{\sqrt{a}}.$$

(*iii*) *Si* $b>0$, *entonces*

$$T_*\leq\frac{J(t_0)}{\sqrt{a}}\quad o\quad T_*\leq t_0+2^{\frac{3\gamma+1}{2\gamma}}\frac{\gamma c}{\sqrt{a}}\left(1-[1+cJ(t_0)]^{-\frac{1}{2\gamma}}\right),$$

donde $c:=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}$.

3. EL RESULTADO PRINCIPAL

El objetivo central del presente trabajo es discutir la propiedad de singularidad en tiempo finito de las soluciones del problema (1.1) sobre un intervalo maximal $[0, T_{\max}[$. Para este propósito, utilizamos las técnicas desarrolladas por Li and Tsai [6], llamada método directo.

Definición 3.1. Una solución u del problema (1.1) sobre $[0, T_{\max}[$ tiene la propiedad de explosión o singularidad en tiempo finito, si

$$T_{\max} < \infty \ \text{ y } \lim_{t \to T_{\max}^-} \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 \, dx = \infty.$$

Definición 3.2. La función energía $E(t)$ del problema (1.1), se define por

$$E(t) := \frac{1}{2} |u'(t)|_2^2 + \frac{1}{p} \|u(t)\|_{1,p}^p - \int_\Omega F(x, u(x,t)) \, dx, \quad t \geq 0,$$

donde

$$F(x,s) := \int_0^s f(x,\xi) \, d\xi.$$

Lema 3.3. *Supongamos que se cumplen las hipótesis $(H1)-(H2)$. Si u es una solución del problema (1.1) sobre $[0, T_{\max}[$ con datos iniciales $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y $u_1 \in L^2(\Omega)$, entonces*

$$E(t) + \int_0^t \left|\sqrt{\alpha} u'(s)\right|_2^2 ds + \beta \int_0^t \|u'(s)\|^2 \, ds = E(0), \tag{3.1}$$

donde $E(0)$ es la energía inicial definida por

$$E(0) := \frac{1}{2} |u_1|_2^2 + \frac{1}{p} \|u_0\|_{1,p}^p - \int_\Omega F(x, u_0(x)) \, dx.$$

Demostración. Multiplicando a la ecuación $(1.1)_1$ por u_t, integrando sobre Ω , aplicando el teorema de la divergencia, obtenemos

$$E'(t) + \left|\sqrt{\alpha} u'(t)\right|_2^2 + \beta \|u'(t)\|^2 = 0.$$

De aquí, se obtiene el resultado. □

Definición 3.4. Para una solución u del problema (1.1) sobre $[0, T_{\max}[$, se define la función explosión

$$A(t) := |u(t)|_2^2 + \int_0^t \left|\sqrt{\alpha} u(s)\right|_2^2 ds + \beta \int_0^t \|u(s)\|^2 ds, \quad t \geq 0. \tag{3.2}$$

Lema 3.5. *Supongamos que se cumplen las hipótesis $(H1) - (H4)$. Si u es una solución del problema (1.1) sobre $[0, T_{\max}[$ con datos iniciales $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y $u_1 \in L^2(\Omega)$, entonces*

$$\begin{aligned} A''(t) - 4(\gamma+1) \Bigg[|u'(t)|_2^2 &+ \int_0^t \left|\sqrt{\alpha} u'(s)\right|_2^2 ds \\ &+ \beta \int_0^t \|u'(s)\|^2 ds \Bigg] \geq -4(2\gamma+1) E(0). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Demostración. Por diferenciación de (3.2), se tiene

$$A'(t) = 2(u'(t), u(t)) + \left|\sqrt{\alpha} u(t)\right|_2^2 + \beta \|u(t)\|^2. \tag{3.4}$$

Diferenciando (3.4), utilizando la ecuación $(1.1)_1$ y el teorema de la divergencia, se obtiene

$$A''(t) = 2|u'(t)|_2^2 - 2\|u(t)\|_{1,p}^p + 2(f(u(t)), u(t)), \tag{3.5}$$

donde $(f(u(t)), u(t)) := \int_\Omega f(x, u(x,t)) u(x,t) dx$. Por (3.1), se obtiene de (3.5)

$$\begin{aligned} A''(t) - 4(\gamma+1) \Big[|u'(t)|_2^2 &+ \textstyle\int_0^t \left|\sqrt{\alpha} u'(s)\right|_2^2 ds \\ + \beta \textstyle\int_0^t \|u'(s)\|^2 ds \Big] &= -4(2\gamma+1) E(0) \\ &\quad + \tfrac{2}{p}(4\gamma + 2 - p) \|u(t)\|_{1,p}^p \\ &\quad + 2 \textstyle\int_\Omega [f(x,u)u - 2(2\gamma+1) F(x,u)] dx \\ &\quad + 4\gamma \textstyle\int_0^t \left|\sqrt{\alpha} u'(s)\right|_2^2 ds + 4\gamma\beta \textstyle\int_0^t \|u'(s)\|^2 ds. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Por las hipótesis y (3.6), se obtiene el resultado (3.3). □

Lema 3.6. *Supongamos que se cumplen las hipótesis $(H1) - (H4)$. Si u es una solución* *del problema* (1.1) *sobre* $[0, T_{\max}[$ *con datos iniciales* $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *y* $u_1 \in L^2(\Omega)$, *y satisfaciendo una de las siguientes condiciones:*

(*i*) $E(0) < 0$,

(*ii*) $E(0) = 0$ *y* $A'(0) > K_0$,

(*iii*) $E(0) > 0$ *y* $A'(0) > r_2\left[A(0) + \dfrac{K_1}{4(\gamma+1)}\right] + K_0$,

donde

$$K_0 := \left|\sqrt{\alpha}u_0\right|_2^2 + \beta\left\|u_0\right\|^2,$$

$$A(0) := |u_0|_2^2\,, \quad A'(0) := 2(u_1, u_0) + K_0,$$

$$K_1 := 4(2\gamma+1)E(0) + 4(\gamma+1)K_0,$$

$$r_2 := 2(\gamma+1) - 2\sqrt{(\gamma+1)\gamma},$$

entonces

$$A'(t) > K_0, \quad \textit{para } t > t_0, \tag{3.7}$$

donde $t_0 := \max\left\{\frac{A'(0)-K_0}{4(1+2\gamma)E(0)}, 0\right\}$ *en el caso* (*i*) *y* $t_0 := 0$ *en los casos* (*ii*) *y* (*iii*).

Demostración. Consideremos tres casos de acuerdo al signo de la energía inicial $E(0)$.

(i) Si $E(0) < 0$, de (3.3), se tiene

$$A''(t) \geq -4(2\gamma+1)E(0)$$

y por integración, resulta

$$A'(t) \geq A'(0) - 4(2\gamma+1)E(0)t, \quad \text{para} \quad t \geq 0.$$

Considerando $A'(0) - K_0 - 4(2\gamma+1)E(0)t > 0$, se obtiene

$$A'(t) > K_0, \text{ para } t > t_0,$$

donde

$$t_0 := \max\left\{\frac{A'(0)-K_0}{4(1+2\gamma)E(0)}, 0\right\}.$$

(ii) Si $E(0) = 0$, de (3.3), se tiene

$$A''(t) \geq 0$$

e integrando, resulta

$$A'(t) \geq A'(0), \quad \text{para } t \geq 0.$$

Considerando $A'(0) - K_0 > 0$, se obtiene

$$A'(t) > K_0, \quad \text{para } t > 0.$$

(iii) Para $E(0) > 0$. Primero notemos que se cumple

$$2\int_0^t (\alpha u'(s), u(s))\, ds = \left|\sqrt{\alpha}u(t)\right|_2^2 - \left|\sqrt{\alpha}u_0\right|_2^2 \tag{3.8}$$

y

$$2\int_0^t ((u'(s), u(s)))\, ds = \|u(t)\|^2 - \|u_0\|^2. \tag{3.9}$$

Usando la desigualdad de Hölder y la desigualdad de Young de (3.8) y (3.9), se obtiene

$$\left|\sqrt{\alpha}u(t)\right|_2^2 \leq \left|\sqrt{\alpha}u_0\right|_2^2 + \int_0^t \left|\sqrt{\alpha}u(s)\right|_2^2 ds + \int_0^t \left|\sqrt{\alpha}u'(s)\right|_2^2 ds \tag{3.10}$$

y

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u_0\|^2 + \int_0^t \|u(s)\|^2 ds + \int_0^t \|u'(s)\|^2 ds. \tag{3.11}$$

Nuevamente usando la desigualdad de Hölder y la desigualdad de Young en (3.4) y por (3.10) – (3.11), resulta

$$A'(t) \leq A(t) + K_0 + |u'(t)|_2^2 + \int_0^t \left|\sqrt{\alpha}u'(s)\right|_2^2 ds + \beta \int_0^t \|u'(s)\|_2^2 ds. \tag{3.12}$$

De (3.3) y (3.12), obtenemos

$$A''(t) - 4(\gamma+1)A'(t) + 4(\gamma+1)A(t) + K_1 \geq 0,$$

donde

$$K_1 := 4(2\gamma+1)E(0) + 4(\gamma+1)K_0.$$

Definamos la función

$$B(t) := A(t) + \frac{K_1}{4(\gamma+1)}, \quad \text{para } t \geq 0.$$

Considerando $B'(0) > r_2 B(0) + K_0$, la función B satisface las condiciones del Lema 2.5. Así se tiene $A'(t) > K_0$, para $t > 0$. Con esto se concluye la demostración del Lema 3.6. □

Definición 3.7. Para las estimativas del tiempo finito de la función explosión A, definamos la función

$$J(t) := [A(t) + (T_1 - t) K_0]^{-\gamma}, \quad \text{para } t \in [0, T_1], \tag{3.13}$$

donde T_1 es una constante positiva que será determinada más tarde.

Teorema 3.8 (Singularidad de Soluciones). *Supongamos que se cumplen las hipótesis* $(H1)-(H4)$. *Si u es una solución del problema* (1.1) *sobre* $[0, T_{\max}[$ *con datos iniciales* $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *y* $u_1 \in L^2(\Omega)$, *y satisfaciendo una de las siguientes condiciones:*

(*i*) $E(0) < 0$,

(*ii*) $E(0) = 0$ *y* $A'(0) > K_0$,

(*iii*) $0 < E(0) < \dfrac{[A'(0) - K_0]^2}{8[A(0) + T_1 K_0]}$ *y* $A'(0) > r_2\left[A(0) + \dfrac{K_1}{4(\gamma+1)}\right] + K_0$,

entonces $T_{\max} < \infty$ *y* $\lim_{t \to T_{\max}^-} \|u(t)\|^2 = \infty$. *Además el tiempo finito* $T_{\max}$ *es estimado, en el caso* (i),

$$T_{\max} \leq t_0 - \frac{J(t_0)}{J'(t_0)}. \tag{3.14}$$

Además, si $J(t_0) \leq \min\left\{1, \sqrt{\frac{a}{-b}}\right\}$, *entonces*

$$T_{\max} \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{a}{-b}}}{\sqrt{\frac{a}{-b}} - J(t_0)}\right). \tag{3.15}$$

En el caso (ii),

$$T_{\max} \leq t_0 - \frac{J(t_0)}{J'(t_0)} \tag{3.16}$$

o

$$T_{\max} \leq t_0 + \frac{J(t_0)}{\sqrt{a}}. \tag{3.17}$$

En el caso (iii),

$$T_{\max} \leq \frac{J(t_0)}{\sqrt{a}} \tag{3.18}$$

o

$$T_{\max} \leq t_0 + 2^{\frac{3\gamma+1}{2\gamma}} \frac{\gamma c}{\sqrt{a}} \left\{1 - [1 + cJ(t_0)]^{-\frac{1}{2\gamma}}\right\}, \tag{3.19}$$

donde $a := \gamma^2 [J(t_0)]^{\frac{2}{\gamma}+2} \left[[A'(t_0) - K_0]^2 - 8E(0)[J(t_0)]^{\frac{-1}{\gamma}}\right]$, $b := 8\gamma^2 E(0)$ *y* $c := \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}$

En el caso (i), $t_0 := \max\left\{\frac{A'(0)-K_0}{4(1+2\gamma)E(0)}, 0\right\}$ *y* $t_0 := 0$ *en los casos (ii) y (iii).*

Demostración. Por diferenciación de (3.13), resulta

$$J'(t) = -\gamma [J(t)]^{\frac{1}{\gamma}+1} [A'(t) - K_0] \tag{3.20}$$

y

$$J''(t) = -\gamma [J(t)]^{\frac{2}{\gamma}+1} V(t), \tag{3.21}$$

donde

$$V(t) := A''(t)[A(t) + (T_1 - t) K_0] - (\gamma+1)[A'(t) - K_0]^2.$$

Por $(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$, (3.8) – (3.9) y la desigualdad de Hölder, de (3.4), resulta

$$\begin{aligned}[A'(t) - K_0]^2 \leq\ & 4[A(t) + (T_1 - t)K_0]\Big[\|u'(t)\|_2^2 \\ & + \int_0^t \left|\sqrt{\alpha}u'(s)\right|_2^2 ds + \beta \int_0^t \|u'(s)\|_2^2 ds\Big].\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$J''(t) \leq -\gamma [J(t)]^{\frac{1}{\gamma}+1} K(t), \tag{3.23}$$

donde

$$K(t) := A''(t) - 4(\gamma+1)\left[|u'(t)|_2^2 + \int_0^t \left|\sqrt{\alpha}u'(s)\right|_2^2 ds + \beta\int_0^t \|u'(s)\|^2 ds\right].$$

Por (3.3) y (3.23), resulta

$$J''(t) \leq 4\gamma(2\gamma+1)E(0)[J(t)]^{\frac{1}{\gamma}+1}, \quad \text{para } t \geq t_0. \tag{3.24}$$

De (3.7) y (3.20), se tiene

$$J'(t) < 0, \text{ para } t > t_0. \tag{3.25}$$

Multiplicando (3.24) por $J'(t)$ y luego integrando de t_0 a t, se obtiene

$$[J'(t)]^2 \geq a + b[J(t)]^{2+\frac{1}{\gamma}}, \quad \text{para } \ t \geq t_0, \tag{3.26}$$

donde

$$\begin{aligned} a &:= [J'(t_0)]^2 - 8\gamma^2 E(0)[J(t_0)]^{\frac{1}{\gamma}+2} \\ &= \gamma^2[J(t_0)]^{\frac{2}{\gamma}+2}\left[[A'(t_0)-K_0]^2 - 8E(0)[J(t_0)]^{\frac{-1}{\gamma}}\right] \end{aligned}$$

y

$$b := 8\gamma^2 E(0).$$

Observemos que $a > 0$ si y sólo si $E(0) < \dfrac{[A'(t_0)-K_0]^2}{8[A(t_0)+(T_1-t_0)K_0]}$.

Por (3.25) y (3.26), la función J satisface las condiciones del Lema 2.6. Entonces existe un tiempo finito T_* tal que $\lim\limits_{t\to T_*^-} J(t) = 0$ y la cota superior de T_* son estimadas respectivamente de acuerdo al signo de la energía inicial $E(0)$.

El caso particular en el que $E(0) < 0$, por (3.24) y (3.25), se tiene que la función $J(t)$ es decreciente y cóncava hacia abajo para $t \geq t_0$. Así, la gráfica de $J(t)$ esta debajo de cualquier tangente, y se obtiene directamente $\lim\limits_{t\to T_*^-} J(t) = 0$ y la estimativa (3.14). Este es el argumento de la concavidad de Levine [4].

Observar que las estimativas (3.16) y (3.17) son equivalentes.

Desde que $[0, T_{\max}[$ es el intervalo maximal de las soluciones del problema (1.1), resulta que $T_{\max} = T_{*}$. También por $\lim\limits_{t\to T_{\max}^{-}} J(t) = 0$, se obtiene

$$\lim_{t\to T_{\max}^{-}} A(t) = \infty.$$

De aquí y la desigualdad de Sobolev-Poincaré, se deduce

$$\lim_{t\to T_{\max}^{-}} \|u(t)\|^2 = \infty.$$

Con todo esto se concluye la demostración del Teorema 3.8. □

Observación 3.9. El parámetro T_1 de (3.13), se obtiene de acuerdo al signo de la energía inicial $E(0)$. Los cálculos para obtener T_1 es similar al trabajo de Quispe Méndez [12].

BIBLIOGRAFÍA

[1] Andrews G., *On the existence of solutions to the equation* $u_{tt} - u_{xxt} = \sigma(u_x)_x$, Journal of Differential Equations, 35(1980), 200-231.

[2] Gao, H. and Ma, T. F., *Global solutions for a nonlinear wave equation with the p-laplacian operator*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 11(1999), 1-13.

[3] Gazzola, F. and Squassina M., *Global solutions and finite time blow up for damped semilinear wave equations*, Ann. I. H. Poincaré - AN, 23(2006), 185-207.

[4] Levine, H.A., *Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form* $Pu_{tt} = -Au + F(u)$, Trans. Amer. Math. Soc., 192(1974), 1-21.

[5] Levine, H. A., and Serrin, J. A, *Global Nonexistence Theorem for Quasilinear Evolution Equation with Dissipation*, Arch. Rational Mech. Anal.,137(1997), 341- 361.

[6] Li, M. R. and Tsai, L. Y., *Existence and nonexistence of global solutions of some systems semilinear wave equations*, Nonlinear Anal. TMA., 54(2003), 1397-1415.

[7] Messaoudi S. A., *Blow up and global existence in a nonlinear viscoelastic wave equation*, Math. Nachr., 260(2003), 58-66.

[8] Messaoudi S. A and Houari, B. S., *Global nonexistence of solutions of a class of wave equations with non-linear damping and source terms*, Math. Meth. Appl. Sci., 27(2004), 1687-1696.

[9] Ono, K., *Global existence, decay and blowup of solutions for some mildly degenerate nonlinear Kirchhoff strings*, Journal of Differential Equations, 137(1997), 273-301.

[10] Quispe Méndez, T., *Singularidad de soluciones de una ecuación de Kirchhoff no lineal con término disipativo*, Pesquimat Revista de la Fac. CC. MM. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos Vol. VII, No.1, pág. 18-29, LIMA-PERÚ. Junio 2004.

[11] Quispe Méndez, T., *Solución local de una ecuación de Kirchhoff no lineal viscoelástica con término disipativo*, Pesquimat Revista de la Fac. CC. MM. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos Vol. X, No.1, pp 11-32, LIMA-PERÚ. Agosto 2007.

[12] Quispe Méndez, T., *Singularidad de soluciones para una ecuación de Kirchhoff no lineal viscoelástica con término disipativo*, Pesquimat Revista de la Fac. CC. MM. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos Vol. X, No.2, pp 67-80, LIMA-PERÚ. Noviembre 2007.

[13] Vitillaro, E., *Global nonexistence theorems for a class of evolution equations with dissipation*, Arch. Rational Mech. Anal., 149(1999), 155-182.

[14] Wu S. T. and Tsai L. Y., *Blowup of solutions for evolution equations with nonlinear damping*, Applied Mathematics E-Notes, 6(2006), 58-65.

[15] Yang, Z. J., *Existence and asymptotic behaviour of solutions for a class of quasilinear evolution equations with nonlinear damping and source terms*, Math. Meth. Appl. Sci., 25(2002), 795-814.

[16] Yang, Z. J., *Blow up of solutions for a class of nonlinear evolution equations with nonlinear damping and source terms*, Math. Meth. Appl. Sci., 25(2002), 825- 833.

[17] Yang, Z. J. and Chen, G. W., *Global existence of solutions for quasilinear wave equations with viscous damping*, J. Math. Anal. Appl., 285(2003), 604-618.

[18] Yang, Z. J., *Initial boundary value problem for a class of nonlinear strongly damped wave equations*, Math. Meth. Appl. Sci., 26(2003), 1047-1066.

[19] Ye, Y., *Global existence and asymptotic behavior of solutions for a class of nonlinear degenerate wave equations*, Differential Equations and Nonlinear Machanics, Volume 2007, Article ID 19685, 9 pages.