PESQUIMAT , Revista de la F. C. M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XI - N°2, pp. 56-70, Lima - Perú, Oct. 2008

SOLUCIÓN LOCAL PARA UNA ECUACIÓN DEL CALOR DEGENERADA NO LINEAL

Teófanes Quispe Méndez[1]

Resumen.- *En el presente trabajo, estudiamos la existencia de las soluciones locales del problema mixto para un tipo de ecuación del calor degenerada no lineal con una función de Lewis generalizada.*

Palabras Claves.- *Solución local, Ecuación del calor degenerada no lineal, Método de Galerkin, Método de estimativas de Tartar, Ecuación de evolución.*

LOCAL SOLUTION FOR A NONLINEAR DEGENERATE HEAT EQUATION

Abstract.- *In present work, we study the existence of the local solutions to the mixed problem for a type of nonlinear degenerate heat equation with a generalized Lewis function.*

Key Words.- *Local solution, Nonlinear degenerate heat equation, Galerkin method, Tartar estimates method, Evolution equation.*

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo consideramos el siguiente problema de valores iníciales y frontera con una función de Lewis generalizada $\alpha(x,t)$:

$$\begin{aligned} &\alpha(x,t)u_t - \beta(t)\,\Delta u_t - \Delta_p u = f(u) && , x \in \Omega, t \geq 0, \\ &u = 0 && , x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ &u(x,0) = u_0(x) && , x \in \Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera bien regular $\partial\Omega$, Δ es el operador laplaciano, $\alpha(x,t)$ es una función real positiva para $x \in \Omega$, $t \geq 0$, $\beta(t)$ es una función real positiva para $t \geq 0$, $f(s)$ es una función real no lineal para $s \in \mathbb{R}$, y el operador p-laplaciano $-\Delta_p$ definido para $p \geq 2$:

$$-\Delta_p u := -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

[1]Profesor de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, e-mail: tquispem@unmsm.edu.pe

Las ecuaciones de tipo (1,1) son utilizadas para modelar diversos fenómenos y procesos en mecánica, física, tecnología, biología y muchas otras áreas. Por ejemplo, describe el proceso de conducción en plasma, filtración de gases y líquidos en medios porosos, reacciones químicas, procesos de crecimiento y migración de poblaciones y entre otros [10].

En el caso $p = 2$, la ecuación en (1,1) se reduce a la ecuación clásica del calor, y ha producido sobre ello una literatura bastante impresionante en cuanto al estudio de existencia y no existencia de las soluciones globales, y las propiedades de estas, citamos algunos de ellos [2, 3, 9, 10, 11, 12]. El caso $p > 2$, no se tiene muchos resultados conocidos. Tsutsumi [13], obtiene existencia y no existencia de la soluciones globales con los métodos de aproximación de Galerkin y del pozo potencial, cuando $\alpha \equiv 1$, $\beta \equiv 0$ y $f(u) := \pm u^{\sigma-1}$,$\sigma \geq 2$. Messaoudi [5], obtiene singularidad en tiempo finito con energía inicial no positiva con el método de concavidad, cuando $\alpha \equiv 1$ y $\beta \equiv 0$. Zhou [14], obtiene singularidad en tiempo finito con energía inicial positiva restringida y con energía inicial no positiva con el método de concavidad, cuando $\beta \equiv 0$.

En este trabajo probaremos la existencia de las soluciones locales del problema (1,1). En la prueba utilizaremos el método de Galerkin [4] y las estimativas de Tartar [12], y las estrategias seguidas por Tsutsumi [13], Quispe Méndez [7, 8] y Gao and Ma [1].

2. PRELIMINARES

En esta sección daremos algunas notaciones, conceptos y lemas sin demostración que serán utilizadas en el desarrollo del presente trabajo.

Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera bien regular $\partial\Omega$. Denotamos el producto interno y la norma de $L^2(\Omega)$ y $L^p(\Omega)$, con $(.,.)$ y $|\ .\ |_p$, respectivamente, para $1 \leq p \leq \infty$. Además $((.,.))$ y $\|.\|$, denotarán el producto interno y la norma de $H_0^1(\Omega)$, donde $((u,v)) := \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$ es la forma de Dirichlet. En el espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ usamos la norma

$$\|u\|_{1,p} := \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Sea X un espacio de Banach, $0 < T \leq \infty$ y $1 \leq p \leq \infty$. Representamos con $L^p(0,T;X)$ al espacio de Banach de las funciones vectoriales $u :]0,T[\longrightarrow X$ tales que son medibles y $\|u(t)\|_X \in L^p(0,T)$, con la norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := \sup_{0<t<T} \text{ess} \|u(t)\|_X \ , \ p = \infty.$$

Similarmente, cuando $0 < T < \infty$, representaremos con $C^0([0,T];X)$ al espacio de Banach de las funciones continuas $u : [0,T] \longrightarrow X$, con la norma

$$\|u\|_{C^0([0,T];X)} := \sup_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_X .$$

Denotamos $v' := v_t$ y $v(t)(x) := v(x,t)$.

Hipótesis. Imponemos sobre las funciones reales $\alpha(x,t)$, $\beta(t)$ y $f(s)$ las siguientes condiciones:

$(H1)$ $\alpha \in W^{1,\infty}(0,\infty; L^\infty(\Omega))$ y $\alpha(x,t) \geq \alpha_0 > 0$, $\forall (x,t) \in \Omega \times [0,\infty[$, α_0 es una constante.

$(H2)$ $\beta \in W^{1,\infty}(0,\infty)$ y $\beta(t) \geq \beta_0 > 0$, $\forall t \geq 0$, β_0 es una constante.

$(H3)$ $f \in C^0(\mathbb{R})$ y existe una constante positiva C_0 tal que

$$|f(s)| \leq C_0 |s|^{\sigma-1}, \ \forall s \in \mathbb{R},$$

donde $2 \leq p < \sigma < \frac{p(n+2)}{n}$.

Lema 2.1 (Desigualdad de Sobolev-Poincaré [2].) *Para cada función* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *se tiene*

$$|u|_r \leq B_0 \|u\|_{1,p},$$

donde $1 \leq r \leq \frac{pn}{n-p}$ *si* $1 \leq p < n$ *y* $1 \leq r < \infty$ *si* $1 \leq n \leq p$. *La constante* B_0 *depende solamente de* Ω, n, p *y* r.

Lema 2.2 (Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg [2].) *Para cada función* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 1$ *y* $q \geq 1$, *se cumple*

$$|u|_r \leq B_1 \|u\|_{1,p}^{\rho} |u|_q^{1-\rho},$$

donde

$$\rho := \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)^{-1}$$

y

(i) para $p \geq n = 1$, $q \leq r \leq \infty$;

(ii) para $n > 1$ *y* $p < n$, $q \leq r \leq \frac{np}{n-p}$ *si* $q \leq \frac{np}{n-p}$ *y* $\frac{np}{n-p} \leq r \leq q$ *si* $q \geq \frac{np}{n-p}$;

(iii) para $p = n > 1$, $q \leq r < \infty$;

(iv) para $p > n > 1$, $q \leq r \leq \infty$.

La constante B_1 *depende solamente de* n, p, q *y* r.

Lema 2.3 (Desigualdad Generalizada de Gronwall [6].) *Sea* $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ *continua,* $g :]0, \infty[\to]0, \infty[$ *continua y no decreciente y sea* C *una constante positiva, tal que satisface la inecuación diferencial*

$$f(t) \leq C + \int_0^t g(f(s))ds \ , \forall t \in [0, \infty[.$$

Entonces

$$f(t) \leq G^{-1}(T_*) < \infty, \ \forall t \in [0, T_*],$$

para cualquier número fijo $T_* < G(\infty)$, *donde*

$$G(t) := \int_C^t \frac{ds}{g(s)}, \quad \forall t \in [C, \infty[.$$

Más aún, si $G(\infty) = \infty$, *entonces*

$$f(t) \leq G^{-1}(t), \quad \forall t \in [0, \infty[\ .$$

Lema 2.4. *El operador p-laplaciano* $-\Delta_p$ *es acotado, estrictamente monótono, semicontinuo y coercivo de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *en* $W^{-1,q}(\Omega)$,

$$\langle -\Delta_p u, v \rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx, \ \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

y

$$|\langle -\Delta_p u, v\rangle| \leq \|u\|_{1,p}^{p-1} \|v\|_{1,p}, \; \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

donde $W^{-1,q}(\Omega)$ *es el espacio dual de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *y* $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Lema 2.5 (Desigualdad de Young). *Sean* $1 < p, q < \infty$ *y* $p^{-1} + q^{-1} = 1$. *Entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \; \forall a, b \geq 0.$$

Lema 2.6 (Aubin-Lions) [4]. *Sean* B_0, B_1 *y* B *tres espacios de Banach tales que* $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$, B_0 *y* B_1 *reflexivos, y* $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B$. *Sea*

$$W := \{v \in L^{p_0}(0,T;B_0)\,;\; v' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\},$$

donde $0 < T < \infty$, $1 < p_0, p_1 < \infty$; *con la norma definida por*

$$\|v\|_W := \|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}.$$

Entonces W *es un espacio de Banach y* $W \overset{c}{\hookrightarrow} L^{p_0}(0,T;B)$.

Lema 2.7 (Lions) [4]. *Sea* Q *un abierto acotado de* $R_x^n \times R_t$, $\{g_\nu\}$ *y* g *funciones de* $L^q(Q)$, $1 < q < \infty$, *tales que*

$$\|g_\nu\|_{L^q(Q)} \leq \text{const}, \;\; \forall \nu \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad g_\nu \to g \;\; \text{c.t.p. en } Q.$$

Entonces

$$g_\nu \rightharpoonup g \;\; \text{en} \;\; L^q(Q).$$

Definición 2.9. *Una función* $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ *es llamada solución del problema* (1,1) *sobre* $[0,T]$ *si satisface las condiciones* $(1,1)_2 - (1,1)_3$ *y la igualdad*

$$\alpha(x,t)u_t - \beta(t)\,\Delta u_t - \Delta_p u = f(u) \quad en \quad L^2\left(0,T;W^{-1,q}(\Omega)\right),$$

donde $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

3. EL RESULTADO PRINCIPAL

En esta sección estudiaremos la solución local del problema (1,1) utilizando los métodos de aproximación de Galerkin [4] y las estimativas de Tartar [12].

Teorema 3.1 (Existencia Local). *Supongamos que las funciones α, β y f satisfacen las hipótesis $(H1)-(H3)$, respectivamente, y que $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces existe un número positivo T_0 tal que el problema (1,1) admite una solución u sobre $[0,T_0]$ tal que*

$$u \in L^\infty\left(0,T_0;W_0^{1,p}(\Omega)\right) \quad \text{y} \quad u' \in L^2\left(0,T_0;H_0^1(\Omega)\right). \tag{3.1}$$

Demostración. Procedemos en cinco etapas.

Soluciones Aproximadas. Sea $\{w_k\}$ un sistema completo de funciones en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Sea $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ el subespacio generado por las primeras m funciones $w_1, w_2, ..., w_m$ de $\{w_k\}$.

Sea

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\, w_j,$$

las soluciones aproximadas en V_m del problema (1,1), donde las funciones $g_{jm}(t)$, $j = 1, 2, ..., m$, son determinadas del siguiente problema en ecuaciones diferenciales ordinarias, para $w \in V_m$

$$\begin{aligned} &(\alpha(t)u_m'(t), w) + \beta(t)\left(-\Delta u_m'(t), w\right) + \left(-\Delta_p u_m(t), w\right) = (f(u_m(t)), w), \\ &u_m(0) = u_{0m}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde

$$u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} g_{0jm} w_j, \quad u_{0m} \to u_0 \quad \text{fuerte en } W_0^{1,p}(\Omega), \tag{3.3}$$

El sistema de ecuaciones ordinarias (3,2) tiene una solución local en el intervalo $[0, T_m[$. Las siguientes estimativas a priori nos permitirá extender la solución u_m a un intervalo $[0, T_0]$ independiente de m.

Estimativa a Priori I. Tomando $w = u_m(t)$ en (3,2), obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\sqrt{\alpha(t)}u_m(t)\right|_2^2+\frac{1}{2}\beta(t)\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2+\|u_m(t)\|_{1,p}^p \\ =(f(u_m(t)),u_m(t))+\frac{1}{2}(\alpha'(t)u_m(t),u_m(t)).\end{aligned} \tag{3.4}$$

De (3,4), resulta

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\varphi_m(t)+\|u_m(t)\|_{1,p}^p =&(f(u_m(t)),u_m(t)) \\ &+\frac{1}{2}(\alpha'(t)u_m(t),u_m(t)) \\ &+\frac{1}{2}\beta'(t)\|u_m(t)\|^2,\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde

$$\varphi_m(t):=\left|\sqrt{\alpha(t)}u_m(t)\right|_2^2+\beta(t)\|u_m(t)\|^2. \tag{3.6}$$

Por la hipótesis $(H3)$ y la Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg, tenemos

$$\begin{aligned}|(f(u_m(t)),u_m(t))| &\le C_0|u_m(t)|_\sigma^\sigma \\ &\le C_0B_1^\sigma\|u_m(t)\|_{1,p}^{p\delta_1}|u_m(t)|_2^{2\delta_2},\end{aligned} \tag{3.7}$$

donde

$$\delta_1:=\frac{(\sigma-2)\,n}{np+2p-2n}<1$$

y

$$\delta_2:=\frac{\sigma(np+2p-2n)-(\sigma-2)\,np}{2\,(np+2p-2n)}>0.$$

Aplicando en (3,7) la Desigualdad de Young, resulta

$$|(f(u_m(t)),u_m(t))|\le\frac{1}{2p}\|u_m(t)\|_{1,p}^p+\frac{1}{2}C_1|u_m(t)|_2^{2\delta_3}, \tag{3.8}$$

donde $\delta_3 := \frac{\delta_2}{1-\delta_1} > 1$ y $C_1 := 2\frac{\delta_2}{\delta_3}\left[C_0B_1^\sigma(2p\delta_1)^{\delta_1}\right]^{\frac{\delta_3}{\delta_2}}$.

Por las hipótesis $(H1)-(H2)$, se tiene $\alpha'(x,t)\le\|\alpha'\|_{L^\infty(0,\infty;L^\infty(\Omega))}$ c.t.p. para $(x,t)\in\Omega\times[0,\infty[$ y $\beta'(t)\le\|\beta'\|_{L^\infty(0,\infty)}$ c.t.p. para $t\in[0,\infty[$. Tenemos

$$(\alpha'(t)u_m(t),u_m(t))+\beta'(t)\|u_m(t)\|^2\le C_{\alpha\beta}\left[|u_m(t)|_2^2+\|u_m(t)\|^2\right], \tag{3.9}$$

donde $C_{\alpha\beta}:=\text{máx}\left\{\|\alpha'\|_{L^\infty(0,\infty;L^\infty(\Omega))},\|\beta'\|_{L^\infty(0,\infty)}\right\}$.

Por los resultados (3,8) y (3,9), de (3,5) conseguimos

$$\frac{d}{dt}\varphi_m(t) \leq C_2 \left[|u_m(t)|_2^{2\delta_3} + |u_m(t)|_2^2 + \|u_m(t)\|^2 \right] \tag{3.10}$$

donde $C_2 := \text{máx}\{C_1, C_{\alpha\beta}\}$. También por $(H1) - (H2)$ y (3,3), resultan

$$|u_m(t)|_2^2 + \|u_m(t)\|^2 \leq \frac{1}{\text{mín}\{\alpha_0,\beta_0\}}\varphi_m(t). \tag{3.11}$$

y

$$\left| \sqrt{\alpha(0)} u_{0m} \right|_2^2 + \beta(0) \|u_{0m}\|^2 = \varphi_m(0) \leq C_3, \tag{3.12}$$

donde C_3 es una constante positiva independiente de m.

Por (3,11) – (3,12), integrando (3,10) sobre $[0,t]$, obtenemos

$$\psi_m(t) \leq C + K \int_0^t \left[\psi_m^{\delta_3}(s) + \psi_m(s) \right] ds, \tag{3.13}$$

donde

$$\psi_m(t) := |u_m(t)|_2^2 + \|u_m(t)\|^2,$$

$$C := \frac{C_3}{\text{mín}\{\alpha_0,\beta_0\}} \quad \text{y} \quad K := \frac{C_2}{\text{mín}\{\alpha_0,\beta_0\}}.$$

Consideremos las funciones

$$g(s) := K\left(s^{\delta_3} + s\right) \quad \text{y} \quad G(t) := \int_C^t \frac{ds}{g(s)}.$$

Observemos que la función $g(s)$ es estrictamente creciente y cóncava hacia arriba para todo $s \geq 0$, por ser $\delta_3 > 1$. Desde que $\dfrac{1}{g(s)} \leq \dfrac{1}{Ks^{\delta_3}}$, $\forall s \geq C$, resulta

$$G(\infty) \leq \frac{1}{K(\delta_3 - 1) C^{\delta_3 - 1}}. \tag{3.14}$$

Por (3,14) y la Desigualdad Generalizada de Gronwall, de (3,13) existe un número $T_0 > 0$ y una constante positiva C_4 independientes de m tal que

$$|u_m(t)|_2^2 + \|u_m(t)\|^2 \leq C_4, \quad \forall t \in [0, T_0]. \tag{3.15}$$

Observemos que $0 < T_0 < G(\infty)$ y $C_4 := G^{-1}(T_0)$.

Estimativa a Priori II. Tomando $w = u'_m(t)$ en (3,2), obtenemos

$$\frac{d}{dt}E(t) + \left|\sqrt{\alpha(t)}u'_m(t)\right|_2^2 + \beta(t)\left\|u'_m(t)\right\|^2 = 0, \tag{3.16}$$

donde

$$E(t) := \frac{1}{p}\left\|u_m(t)\right\|_{1,p}^p - \int_\Omega F(u_m(x,t))\,dx$$

y

$$F(s) := \int_0^s f(\xi)\,d\xi.$$

Integrando (3,16) sobre $[0,t]$, resulta

$$E(t) + \int_0^t \left|\sqrt{\alpha(s)}u'_m(s)\right|_2^2 ds + \int_0^t \beta(s)\left\|u'_m(t)\right\|^2 ds = E(0), \tag{3.17}$$

donde

$$E(0) := \frac{1}{p}\left\|u_{0m}\right\|_{1,p}^p - \int_\Omega F(u_{0m}(x))\,dx.$$

Por (3,3), se obtiene

$$E(0) \le C_5,$$

donde C_5 es una constante positiva independiente de m. De (3,17), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}\left\|u_m(t)\right\|_{1,p}^p + \textstyle\int_0^t \left|\sqrt{\alpha(s)}u'_m(s)\right|_2^2 ds \\ + \textstyle\int_0^t \beta(s)\left\|u'_m(t)\right\|^2 ds \le C_5 + \int_\Omega F(u_m(x,t))\,dx. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Por la hipótesis $(H3)$, y las Desigualdades de Gagliardo-Nirenberg y Young, resulta

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left|F(u_m(x,t))\right| dx &\le \frac{C_0}{\sigma}\left|u_m(t)\right|_\sigma^\sigma \\ &\le \frac{1}{2p}\left\|u_m(t)\right\|_{1,p}^p + C_6\left|u_m(t)\right|_2^{2\delta_3}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

donde $\delta_3 := \frac{\delta_2}{1-\delta_1} > 1$ y $C_6 := \frac{\delta_2}{\delta_3}\left[\frac{C_0}{\sigma}B_1^\sigma(2p\delta_1)^{\delta_1}\right]^{\frac{\delta_3}{\delta_2}}$. Por hipótesis $(H1)-(H2)$, (3,15) y (3,19), de (3,18) se obtiene

$$\left\|u_m(t)\right\|_{1,p}^p + \int_0^t \left|u'_m(s)\right|_2^2 ds + \int_0^t \left\|u'_m(t)\right\|^2 ds \le C_7, \ \ \forall t \in [0,T_0], \tag{3.20}$$

donde C_7 es una constante positiva independiente de m.

Por el Lema 2.5 y (3,20), resulta

$$\|-\Delta_p u_m(t)\|_{-1,q} \leq C_8, \quad \forall t \in [0, T_0], \tag{3.21}$$

donde $p^{-1} + q^{-1} = 1$ y C_8 es una constante positiva independiente de m.

Pasaje al Límite. De las estimativas (3,15), (3,20) y (3,21), tenemos que

$$\{u_m\} \text{ es acotada en } L^\infty\left(0, T_0; W_0^{1,p}(\Omega)\right), \tag{3.22}$$

$$\{u_m\} \text{ es acotada en } L^\infty\left(0, T_0; H_0^1(\Omega)\right), \tag{3.23}$$

$$\{u_m\} \text{ es acotada en } L^\infty\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right), \tag{3.24}$$

$$\{u_m'\} \text{ es acotada en } L^2\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right), \tag{3.25}$$

$$\{u_m'\} \text{ es acotada en } L^2\left(0, T_0; H_0^1(\Omega)\right), \tag{3.26}$$

$$\{-\Delta_p u_m\} \text{ es acotada en } L^\infty\left(0, T_0; W^{-1,q}(\Omega)\right), \tag{3.27}$$

donde $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Por (3,22) $-$ (3,27), existen subsucesiones $\{u_\nu\}$ y $\{u_\nu'\}$ de $\{u_m\}$ y $\{u_m'\}$, respectivamente, tales que

$$u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{en} \quad L^\infty\left(0, T_0; W_0^{1,p}(\Omega)\right), \tag{3.28}$$

$$u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{en} \quad L^\infty\left(0, T_0; H_0^1(\Omega)\right), \tag{3.29}$$

$$u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{en} \quad L^\infty\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right), \tag{3.30}$$

$$u_\nu' \rightharpoonup u' \quad \text{en} \quad L^2\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right), \tag{3.31}$$

$$u_\nu' \rightharpoonup u' \quad \text{en} \quad L^2\left(0, T_0; H_0^1(\Omega)\right), \tag{3.32}$$

$$-\Delta_p u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \chi \quad \text{en} \quad L^\infty\left(0, T_0; W^{-1,q}(\Omega)\right). \tag{3.33}$$

Desde que $L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega))$ y $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, aplicando el Lema de Lions-Aubin, de (3,29) y (3,31) resultan

$$u_\nu \to u \text{ fuerte en } L^2\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right) \tag{3.34}$$

y

$$u_\nu \to u \quad \text{c.t.p. en} \quad \Omega \times [0, T_0]. \tag{3.35}$$

Usando la hipótesis $(H3)$, (3,22), (3,24) y (3,35) vemos que

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} \int_\Omega |f(u_\nu(x,t))|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} dxdt &\leq \int_0^{T_0} C_0 |u_\nu(t)|_\sigma^\sigma dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \left[\frac{1}{p} \|u_\nu(t)\|_{1,p}^p + C_1 |u_\nu(t)|_2^{2\delta_3} \right] dt \\ &\leq C_9 \end{aligned} \tag{3.36}$$

y

$$f(u_\nu) \to f(u) \quad \text{c.t.p. en } \Omega \times [0, T_0]. \tag{3.37}$$

Por (3,36) – (3,37) y el Lema de Lions, se deduce que

$$f(u_\nu) \rightharpoonup f(u) \quad \text{en} \quad L^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\left(0, T_0; L^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}(\Omega)\right). \tag{3.38}$$

De las convergencias (3,28) – (3,33) y (3,38) por pasaje al límite en la ecuación aproximada (3,2), resulta

$$\int_0^{T_0} (\alpha(t)u_t - \beta(t)\Delta u_t + \chi - f(u), v)\, dt = 0,$$

para cada $v \in L^2\left(0, T_0; W_0^{1,p}(\Omega)\right)$, es decir

$$\alpha(x,t)u_t - \beta(t)\Delta u_t + \chi = f(u) \quad \text{en} \quad L^2\left(0, T_0; W^{-1,q}(\Omega)\right), \tag{3.39}$$

donde $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Probemos que $\chi = -\Delta_p u$. Sea $A := -\Delta_p$. Tomando $w = u_\nu(t)$ en (3,2) e integrando sobre $[0,t]$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^t \left(Au_\nu(s), u_\nu(s)\right) ds = &\int_0^t (f(u_\nu(s)), u_\nu(s))ds \\ &-\frac{1}{2}\left|\sqrt{\alpha(t)}u_\nu(t)\right|_2^2 - \frac{1}{2}\beta(t)\left\|u_\nu(t)\right\|^2 \\ &+\frac{1}{2}\left|\sqrt{\alpha(0)}u_{0\nu}\right|_2^2 + \frac{1}{2}\beta(0)\left\|u_{0\nu}\right\|^2 \\ &+\frac{1}{2}\int_0^t (\alpha'(s)u_\nu(s), u_\nu(s))\, ds \\ &+\frac{1}{2}\int_0^t \beta'(s)\left\|u_\nu(s)\right\|^2 ds.\end{aligned} \tag{3.40}$$

Por $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma(\Omega)$, (3,28) y (3,38), se logran

$$u_\nu \rightharpoonup u \text{ en } L^\sigma(\Omega) \text{ c. t. p. para } t \in [0, T_0]$$

y

$$(f(u_\nu(t)), u_\nu(t)) \to (f(u(t)), u(t)) \text{ c. t. p. para } t \in [0, T_0]. \tag{3.41}$$

Por $(H3)$, (3,22) y (3,24), resulta

$$\begin{aligned}|(f(u_\nu(t)), u_\nu(t))| &\le C_0 \left|u_\nu(t)\right|_\sigma^\sigma \\ &\le \frac{1}{2p}\left\|u_\nu(t)\right\|_{1,p}^p + \frac{1}{2}C_1\left|u_\nu(t)\right|_2^{2\delta_3} \\ &\le C_{10}, \text{ para } t \in [0, T_0].\end{aligned} \tag{3.42}$$

De (3,41), (3,42), y el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, resulta

$$\int_0^t (f(u_\nu(s)), u_\nu(s))ds \to \int_0^t (f(u(s)), u(s))ds, \text{ para } t \in [0, T_0]. \tag{3.43}$$

Por pasaje al límite en (3,40), haciendo uso de (3,43) y (3,39), obtenemos

$$\begin{aligned}
\limsup_{\nu\to\infty} \int_0^t (Au_\nu(s), u_\nu(s))\, ds &\leq \int_0^t \limsup_{\nu\to\infty} (Au_\nu(s), u_\nu(s))\, ds \\
&= \int_0^t (f(u(s)), u(s)) ds \\
&\quad -\frac{1}{2}\left|\sqrt{\alpha(t)}u(t)\right|_2^2 - \frac{1}{2}\beta(t)\left\|u(t)\right\|^2 \\
&\quad +\frac{1}{2}\left|\sqrt{\alpha(0)}u_0\right|_2^2 + \frac{1}{2}\beta(0)\left\|u_0\right\|^2 \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^t (\alpha'(s)u(s), u(s))\, ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^t \beta'(s)\left\|u(s)\right\|^2 ds \\
&= \int_0^t (\chi(s), u(s)) ds. \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

Para cada $v \in L^2\left(0, T_0; W_0^{1,p}(\Omega)\right)$, definamos la función

$$\varphi_\nu(t) := \int_0^t (Au_\nu(s) - Av(s), u_\nu(s) - v(s))\, ds, \text{ para } t \in [0, T_0].$$

Por la monotonía del operador A, $\varphi_\nu(t) \geq 0$, $\forall t \in [0, T_0]$. Por (3,44), (3,28) y (3,33), resulta

$$\begin{aligned}
0 &\leq \limsup_{\nu\to\infty} \varphi_\nu(t) \\
&\leq \int_0^t \limsup_{\nu\to\infty} (Au_\nu(s) - Av(s), u_\nu(s) - v(s))\, ds \\
&\leq \int_0^t (\chi(s) - Av(s), u(s) - v(s))\, ds. \qquad (3.45)
\end{aligned}$$

Tomando $v = u - \lambda w$ en (3,45), donde $\lambda > 0$ y $w \in L^2\left(0, T_0; W_0^{1,p}(\Omega)\right)$, se tiene

$$\int_0^t (\chi(s) - A(u(s) - \lambda w(s)), w(s))\, ds \geq 0.$$

Desde que A es un operador semicontinuo y haciendo tender $\lambda \longrightarrow 0$, logramos

$$\int_0^t (\chi(s) - Au(s), w(s))\, ds \geq 0, \quad \forall w \in L^2\left(0, T_0; W_0^{1,p}(\Omega)\right).$$

De aqui resulta $\chi = Au$.

El dato inicial se verifica de modo estándar. Con todo esto concluye la demostración del Teorema 3.1. □

Usando argumentos similares que en la prueba del Teorema 3.1, se obtienen los siguientes dos teoremas.

Teorema 3.2. *Supongamos que las funciones* α *y* f *satisfacen las hipótesis* $(H1)$ *y* $(H3)$, *respectivamente,* $\beta \equiv 0$ *y* $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. *Entonces existe un número positivo* T_0 *tal que el problema* (1,1) *admite una solución* u *sobre* $[0, T_0]$ *tal que*

$$u \in L^\infty\left(0, T_0; W_0^{1,p}(\Omega)\right) \quad \text{y} \quad u' \in L^2\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right).$$

Teorema 3.3. *Supongamos que las funciones* β *y* f *satisfacen las hipótesis* $(H2)$ *y* $(H3)$, *respectivamente,* $\alpha \equiv 0$ *y* $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. *Entonces existe un número positivo* T_0 *tal que el problema* (1,1) *admite una solución* u *sobre* $[0, T_0]$ *tal que*

$$u \in L^\infty\left(0, T_0; W_0^{1,p}(\Omega)\right) \quad \text{y} \quad u' \in L^2\left(0, T_0; H_0^1(\Omega)\right).$$

REFERENCIAS

[1] Gao, H. and Ma, T. F. - *Global solutions for a nonlinear wave equation with the p-laplacian operator*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 11 (1999), pp. 1-13.

[2] Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A. and Uralceva, N. N. - *Linear and Quasi-linear Parabolic Equations*, "Nauka", Moscow, 1967; English transl., Trans. Math. Monographs, 23, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1968.

[3] Levine, H. A. - *Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form* $Pu_t = -Au + F(u)$, Arch. Rational Mech. Anal., 51 (1973), pp. 371-386.

[4] Lions, J. L. - *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris (1969).

[5] Messaoudi, S. A. - *A note on blow up of solutions of a quasilinear heat equation with vanishing initial energy*, Math. Nachr., J. Math. Anal. Appl. 273 (2002), pp. 243-247.

[6] Nishihara, K. - *On a global solution of some quasilinear hyperbolic equation*, Tokio J. Math., 7 (1984) 2, pp. 437-459.

[7] Quispe Méndez, T. - *Singularidad en tiempo finito para un sistema de Kirchhoff*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima-Perú (1998).

[8] Quispe Méndez, T. - *Solución local y singularidad para un sistema de Kirchhoff no lineal*, Pesquimat Revista de la Fac. CC. MM. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos Vol. VIII, No.2, pág. 45-62, Lima-Perú. Diciembre 2005.

[9] Rincon, M. A., Limaco, J. and Liu, I-S. - *Existence and uniqueness of solutions of a nonlinear heat equation*, Tend. Mat. Apl. Comput., 6 (2005) (2), pp. 273-284.

[10] Samarskii, A.A., Galaktionov, V.A., Kurdyumov, S.P. y Mikhailov, A.P. - *Blow-up in problems for quasilinear parabolic equations.* Nauka, Moscow, 1987 (in Russian). English transl.: Walter de Gruyter, Berlin, 1995.

[11] Tan, Z. - *The reaction-diffusion equation with Lewis function and critical Sobolev exponent,* J. Math. Anal. Appl., 272 (2002) (2), pp. 480-495.

[12] Tartar, L. - *Topics in nonlinear analysis,* Publications Mathématiques D'Orsay, Université de Paris-Sud, Orsay 1978.

[13] Tsutsumi, M. - *Existence and nonexistence of global solutions for nonsilinear parabolic equations*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 8 (1972/73), pp. 211-229.

[14] Zhou, Y. - *Global nonexistence for a quasilinear evolution equation with a generalized Lewis function*, J. Anal. Appl., 24 (2005) (1), pp. 179-187.