PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XII N°1, pp. 18-31, Lima - Perú, Julio 2009

EL TEOREMA DE DULAC

Renato Benazic[1], *Claudio Espinoza*[2] & *Liliana Jurado*[3]

Resumen: En el presente trabajo se demuestra el Teorema de Dulac el cual establece que si un campo de dimensión compleja dos, cuya parte lineal tiene dos autovalores resonantes en el dominio Poincaré entonces él es analíticamente localmente conjugado a un campo polinomial. Se estudia también el comportamiento geométrico de sus órbitas en la vecindad de la singularidad.
Palabras clave: Ecuaciones Diferenciales Complejas, Singularidades Aisladas, Dinámica compleja.

DULAC'S THEOREM

Abstract: In this work is proven the Dulac's Theorem,which establishes that if a complex 2–dimension vector field, which linear part has two resonant eigenvectors in the Poincare domain then it is locally analytically conjugate to a polinomial vector field. Is is also studied the geometric behavior of its orbits in a neighborhood of a singularity.
Key words: Complex Differential Equations, Isolated Singularities, Complex Dynamics.

1. Introducción

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto, un campo vectorial $Z = (Z_1, \ldots, Z_n) : U \to \mathbb{C}^n$ es llamado *holomorfo* si y sólo si todas sus funciones coordenadas $Z_1, \ldots, Z_n : U \to \mathbb{C}$ son funciones holomorfas. Denotaremos por $\mathcal{X}(U)$ al conjunto de todos los campos vectoriales definidos en el abierto $U \subseteq \mathbb{C}^n$.

Un punto $p \in U$ es llamado *singularidad* de $Z \in \mathcal{X}(U)$ si y sólo si $Z(p) = 0$. Caso contrario p es llamado *punto regular de* Z. Denotaremos por $\mathrm{Sing}(Z)$ al conjunto de todos los puntos singulares del campo Z.

Dados $Z \in \mathcal{X}(U)$, $z_0 \in U$ y $T_0 \in \mathbb{C}$, su *Problema de Valor Inicial (P.V.I.)* o *Problema de Cauchy* asociado es dado por:

$$\left| \begin{array}{lcl} z' & = & Z(z) \\ z(T_0) & = & z_0 \end{array} \right. \tag{1}$$

Una solución de (1) es una función holomorfa $\varphi : D \to U$ donde $D \subseteq \mathbb{C}$ es un disco abierto, tal que

1. $T_0 \in D$.

2. $\varphi'(T) = Z(\varphi(T))$; $\forall\ T \in D$.

[1]Universidad Nacional Mayor de San Marcos - Facultad de Ciencias Matemáticas, Instituto de Matemática y Ciencias Afines - IMCA
[2]Universidad Nacional Mayor de San Marcos - Facultad de Ciencias Matemáticas
[3]Universidad Nacional Mayor de San Marcos - Facultad de Ciencias Matemáticas

3. $\varphi(T_0) = z_0$.

El Teorema de existencia y unicidad (ver [4]) asegura que el PVI (1) admite una única solución $\varphi_{(T_0,z_0)}$, la cual está definida en un disco cerrado $D_\alpha[T_0]$ de radio suficientemente pequeño $\alpha > 0$, centrado en T_0. Más aún, sea $\Delta[z_0;r]$ un polidisco cerrado contenido en U, si $Z \in \mathcal{X}(U)$ es Lipschitz en $\Delta[z_0;r]$ entonces se puede demostrar que (ver [1]) existe poliradio $r' < r$ y existe $0 < \alpha' < \alpha$ tales que para todo $z \in \Delta[z_0;r']$ existe una única solución $\varphi_z : D_{\alpha'}[T_0] \to \Delta[z_0;r]$ del PVI:

$$\left| \begin{array}{rcl} w' & = & Z(w) \\ w(T_0) & = & z \end{array} \right. \tag{2}$$

Como consecuencia de este último resultado, podemos definir la función

$$\varphi_Z : D_{\alpha'}[T_0] \times \Delta\,[z_0;r'] \to \Delta[z_0;r]$$

mediante

$$\varphi_Z(T,z) = \varphi_z(T)$$

Esta función φ es llamada *Flujo Local asociado a Z alrededor de* (T_0, z_0). Es claro que el flujo satisface las siguientes condiciones:

1. $\dfrac{\partial \varphi}{\partial T}(T,z) = Z(\varphi(T,z)),\ \forall\ (T,z) \in D_{\alpha'}(T_0) \times \Delta(z_0;r')$.

2. $\varphi(T_0,z) = z,\ \forall\ z \in \Delta(z_0;r')$.

3. φ es una función holomorfa.

Para simplificar, en lo sucesivo, trabajaremos siempre con el valor inicial $T_0 = 0$.

Definición 1.1. *Sean $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ abiertos, $Z_1 \in \mathcal{X}(U_1)$, $Z_2 \in \mathcal{X}(U_2)$, $p_1 \in U_1$, $p_2 \in U_2$ y consideremos sus flujos locales asociados*

$$\varphi_1 : D_\delta(0) \times \Delta(p_1;r') \to \Delta(p_1;r) \qquad \varphi_2 : D_\delta(0) \times \Delta(p_2;r') \to \Delta(p_2;r)$$

Decimos que Z_1 es localmente topológicamente (resp. analíticamente) conjugado *a Z_2 alrededor de p_1 y p_2, lo que denotamos $Z_1 \sim_{top} Z_2$ (resp. $Z_1 \sim_{ana} Z_2$) si y sólo si existen vecindades abiertas $V_1 \subseteq U_1$, $V_2 \subseteq U_2$ de p_1 y p_2 respectivamente, y existe $h : V_1 \to V_2$ homeomorfismo (resp. biholomorfismo) llamado* conjugación topológica local *(resp.* conjugación analítica local*) tal que*

$$h(\varphi_1(T,z)) = \varphi_2(T,h(z)), \quad \forall\ (T,z) \in D_\delta(0) \times V_1$$

El hecho de que dos campos sean analíticamente localmente conjugados, significa geométricamente que sus soluciones son indistinguibles salvo biholomorfismos.

El siguiente resultado, cuya demostración puede ser encontrada en ([1]), nos proporciona un criterio bastante útil para determinar si dos campos son conjugados, sin necesidad de usar los flujos.

Proposición 1.1. *Sean $U_1, V_1, U_2, V_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ abiertos, $Z_1 \in \mathcal{X}(U_1)$, $Z_2 \in \mathcal{X}(U_2)$, $p_1 \in V_1 \subseteq U_1$, $p_2 \in V_1 \subseteq U_2$ y $h : V_1 \to V_2$ un biholomorfismo. Se cumple h es una conjugación analítica local entre Z_1 y Z_2 alrededor de p_1 y p_2 si y sólo si*

$$h'(z) \cdot Z_1(z) = Z_2(h(z)),\ \forall\ z \in V_1.$$

En la vecindad de un punto regular, las soluciones de Z pueden ser rectificadas, más específicamente, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.1. ***(Teorema del Flujo Tubular)*** *Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto y $Z \in \mathcal{X}(U)$. Si $z_0 \in U$ es un punto regular de Z entonces Z es localmente analíticamente conjugado al campo constante $Y = (1, 0, \ldots, 0)$ alrededor de z_0 y 0.*

Para demostrar este resultado, el lector puede referirse a ([6]) y adaptarlo fácilmente al caso complejo.

En virtud del Teorema del Flujo Tubular, podemos considerar satisfactorio el conocimiento geométrico local de las soluciones de una ecuación diferencial alrededor de un punto regular. Resta entender cómo es este comportamiento en la vecindad de una singularidad.

2. Campos vectoriales holomorfos con parte lineal no nula

En lo sucesivo, nos restringiremos a la dimensión compleja 2.

Definición 2.1. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto y $Z \in \mathcal{X}(U)$. Decimos que $z_0 \in U$ es una* singularidad aislada *de Z si y sólo si $z_0 \in Sing(Z)$ y existe $V \subseteq U$ vecindad abierta de z_0 tal que $Sing(Z) \cap (V - \{z_0\}) = \emptyset$.*

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, $Z \in \mathcal{X}(U)$ y $0 \in U$ singularidad aislada de Z, luego existe $V \subseteq U$ vecindad abierta de 0 tal que

$$Z(z) = \left(\sum_{|Q|\geq 1} a_{1,Q} z^Q, \sum_{|Q|\geq 1} a_{2,Q} z^Q \right) \ \forall\, z \in V$$

y

$$Z(z) \neq (0,0), \ \forall\, z \in V - \{0\}$$

Sabemos que su derivada $DZ(0)$ es una transformación lineal de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}^2$ y que su matriz asociada (en la base canónica de $\mathbb{C}^2$) es dada por

$$\begin{bmatrix} a_{1,(1,0)} & a_{1,(0,1)} \\ a_{2,(1,0)} & a_{2,(0,1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

la cual también la denotaremos por $DZ(0)$. $DZ(0)$ es llamada la *parte lineal* de Z en $0 \in \mathbb{C}^2$ y diremos que Z tiene *parte lineal no nula* en $0 \in \mathbb{C}^2$ si y sólo si $DZ(0) \neq 0$. Si $DZ(0) \neq 0$, por el Teorema de la Forma Canónica de Jordan basta considerar los casos:

$$DZ(0) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad DZ(0) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad DZ(0) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Desde que $GL(\mathbb{C}^2)$ es abierto y denso en $\mathbb{C}^{2\times 2}$ (ver [5]), en lo sucesivo sólo estudiaremos campos vectoriales holomorfos con singularidad aislada en $0 \in \mathbb{C}^2$ y con parte lineal no nula del tipo

$$DZ(0) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$, es decir, campos de la forma

$$Z(z) = \left(\lambda_1 z_1 + \sum_{|Q|\geq 2} a_{1,Q} z^Q, \lambda_2 z_2 + \sum_{|Q|\geq 2} a_{2,Q} z^Q \right), \quad \forall\, Z = (z_1, z_2) \in V$$

donde V es una vecindad abierta (polidisco) del $0 \in \mathbb{C}^2$ tal que $Z(z) \neq (0,0)$, $\forall\, z \in V - \{0\}$. Como sabemos, este campo define el PVI

$$\left|\begin{array}{lcl} z_1' &=& \lambda_1 z_1 + \displaystyle\sum_{|Q|\geq 2} a_{1,Q} z^Q, \quad z_1(0) = z_1^0 \\ \\ z_2' &=& \lambda_2 z_2 + \displaystyle\sum_{|Q|\geq 2} a_{2,Q} z^Q, \quad z_2(0) = z_2^0 \end{array}\right.$$

donde $z_0 = (z_1^0, z_2^0) \in V$.

Denotemos por $\varphi_Z : D_\delta(0) \times \Delta(0,r') \to \Delta(0,r)$ el flujo local de Z alrededor del 0. Dado $z = (z_1, z_2) \in \Delta(0,r')$ definimos la *órbita de z bajo Z* como

$$\mathcal{O}_Z(z) = \{\varphi_Z(T,z); T \in \mathbb{C}\}$$

y denotemos por

$$\mathcal{F}_Z = \{\mathcal{O}_Z(z); z \in \Delta(0,r')\}$$

a la *foliación local alrededor del origen* generada por Z. Observe que $\varphi_Z(T,z)$ se reduce a un punto si y sólo si $z = 0$. De esta manera, si $z \neq 0$ entonces $\mathcal{O}_Z(z)$ es una curva.

3. Conjugación formal y resonancias

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, $0 \in U$ y $Z \in \mathcal{X}(U)$ con singularidad aislada en $0 \in \mathbb{C}^2$ y con parte lineal no nula del tipo $DZ(0) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$. La EDO asociada sería

$$\left|\begin{array}{lcl} z_1' &=& \lambda_1 z_1 + A_1(z) \\ z_2' &=& \lambda_2 z_2 + A_2(z) \end{array}\right. \tag{3}$$

donde $A_j(z) = \sum\limits_{|Q|\geq 2} a_{j,Q} z^Q$, $j = 1, 2$.

Consideremos un cambio de coordenadas (formal) del tipo *perturbación de la identidad*

$$z = (z_1, z_2) = (w_1 + \xi_1(w), w_2 + \xi_2(w)) = \xi(w)$$

donde $\xi_j(w) = \sum\limits_{|Q|\geq 2} \xi_{j,Q} w^Q$, $j = 1, 2$; que transforme (3) en

$$\left|\begin{array}{lcl} w_1' &=& \lambda_1 w_1 + B_1(w) \\ w_2' &=& \lambda_2 w_2 + B_2(w) \end{array}\right. \tag{4}$$

donde $B_j(w) = \sum\limits_{|Q|\geq 2} b_{j,Q} w^Q$, $j = 1, 2$.

Como $z_j = w_j + \xi_j(w)$, tenemos:

$$\lambda_j z_j + A_j(z) = z_j' = w_j' + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial \xi_j}{\partial w_k}(w) w_k' = \lambda_j w_j + B_j(w) + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial \xi_j}{\partial w_k}(w)\left(\lambda_k w_k + B_k(w)\right)$$

luego

$$\lambda_j w_j + \lambda_j \xi_j(w) + A_j(\xi(w)) = \lambda_j w_j + B_j(w) + \sum_{k=1}^{2} \lambda_k w_k \frac{\partial \xi_j}{\partial w_k}(w) + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial \xi_j}{\partial w_k}(w) B_k(w)$$

cancelando y reordenando

$$\lambda_j \xi_j(w) - \sum_{k=1}^{2} \lambda_k w_k \frac{\partial \xi_j}{\partial w_k}(w) - B_j(w) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial \xi_j}{\partial w_k}(w) B_k(w) - A_j(\xi(w)) \tag{5}$$

Como $w_k \dfrac{\partial \xi_j}{\partial w_k}(w) = \displaystyle\sum_{|Q|\geq 2} q_k \xi_{j,Q} w^Q$, tenemos

$$\begin{aligned}
\lambda_j \xi_j(w) - \sum_{k=1}^{2} \lambda_k w_k \frac{\partial \xi_j}{\partial w_k}(w) - B_j(w) &= \sum_{|Q|\geq 2} \lambda_j \xi_{j,Q} w^Q - \sum_{k=1}^{2} \lambda_k \left(\sum_{|Q|\geq 2} q_k \xi_{j,Q} w^Q \right) - \\
&\quad - \sum_{|Q|\geq 2} b_{j,Q} w^Q \\
&= \sum_{|Q|\geq 2} \left[\left(\lambda_j - \sum_{k=1}^{2} \lambda_k q_k \right) \xi_{j,Q} - b_{j,Q} \right] w^Q
\end{aligned}$$

Haciendo $\delta_{j,Q} = \lambda_j - \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \lambda_k q_k$ y reemplazando en (5) tenemos para $j = 1, 2$

$$\begin{aligned}
\sum_{|Q|\geq 2} \left(\delta_{j,Q} \xi_{j,Q} - b_{j,Q} \right) w^Q &= \frac{\partial \xi_j}{\partial w_1}(w) B_1(w) + \frac{\partial \xi_j}{\partial w_2}(w) B_2(w) - A_j(\xi(w)) \\
&= \sum_{|Q|\geq 2} c_{j,Q} w^Q
\end{aligned} \tag{6}$$

en donde $c_{j,Q} = a_{j,Q}$ si —Q— $= 2$ y $c_{j,Q}$ es función de $a_{1,Q'}, a_{2,Q'}, b_{1,Q'}, b_{2,Q'}, \xi_{1,Q'}, \xi_{2,Q'}$ (con $|Q'| < |Q|$) si $|Q| > 2$.

De (6), para $|Q| = 2$ tenemos $\delta_{j,Q}\xi_{j,Q} - b_{j,Q} = a_{j,Q}$ ($j = 1, 2$).

Si $\delta_{j,Q} = 0$ entonces hacemos $\xi_{j,Q} = 0$ y por lo tanto $b_{j,Q} = -a_{j,Q}$.

Si $\delta_{j,Q} \neq 0$ entonces hacemos $b_{j,Q} = 0$ y por lo tanto $\xi_{j,Q} = \dfrac{a_{j,Q}}{\delta_{j,Q}}$.

Para $|Q| = 3$ tenemos $\delta_{j,Q}\xi_{j,Q} - b_{j,Q} = c_{j,Q}$ ($j = 1, 2$), en donde $c_{j,Q}$ depende de $a_{1,Q'}$, $a_{2,Q'}$, $b_{1,Q'}$, $b_{2,Q'}$, $\xi_{1,Q'}$, $\xi_{2,Q'}$ con $|Q'| = 2$. Por el paso anterior, todas estas constantes son conocidas, luego $c_{j,Q}$ es conocido y nuestras incógnitas son $\xi_{j,Q}$ y $b_{j,Q}$ que la despejamos como en el paso anterior:

Si $\delta_{j,Q} = 0$ entonces hacemos $\xi_{j,Q} = 0$ y por lo tanto $b_{j,Q} = -a_{j,Q}$.

Si $\delta_{j,Q} \neq 0$ entonces hacemos $b_{j,Q} = 0$ y por lo tanto $\xi_{j,Q} = \dfrac{a_{j,Q}}{\delta_{j,Q}}$.

El proceso continúa por inducción. Resumimos nuestros resultados en el siguiente:

Teorema 3.1. *Dada la EDO*

$$\left| \begin{aligned} z_1' &= \lambda_1 z_1 + \sum_{|Q|\geq 2} a_{1,Q} z^Q \\ z_2' &= \lambda_2 z_2 + \sum_{|Q|\geq 2} a_{2,Q} z^Q \end{aligned} \right. \tag{7}$$

existe un cambio formal de coordenadas del tipo perturbación de la identidad:

$$\left| \begin{array}{rcl} z_1 & = & w_1 + \sum\limits_{|Q|\geq 2} \xi_{1,Q} w^Q \\ \\ z_2 & = & w_2 + \sum\limits_{|Q|\geq 2} \xi_{2,Q} w^Q \end{array} \right. \tag{8}$$

que transforma (7) en

$$\left| \begin{array}{rcl} w_1' & = & \lambda_1 w_1 + \sum\limits_{|Q|\geq 2} b_{1,Q} w^Q \\ \\ w_2' & = & \lambda_2 w_2 + \sum\limits_{|Q|\geq 2} b_{2,Q} w^Q \end{array} \right. \tag{9}$$

en donde los coeficientes $\xi_{j,Q}$ y $b_{j,Q}$ satisfacen la relación

$$\left| \begin{array}{l} b_{j,Q} = 0, \quad si\ \delta_{j,Q} = \lambda_j - q_1\lambda_1 - q_2\lambda_2 \neq 0\ . \\ \\ \xi_{j,Q} = 0, \quad si\ \delta_{j,Q} = 0 \end{array} \right. \tag{10}$$

Observaciones:

1. Dada la EDO (7), el procedimiento anterior nos permite construir el cambio de coordenadas (8) y la EDO transformada (9).

2. El teorema anterior no nos da ninguna información sobre la convergencia de las series formales $\sum\limits_{|Q|\geq 2} \xi_{j,Q} w^Q$, $\sum\limits_{|Q|\geq 2} b_{j,Q} w^Q$.

3. Note la importancia de las expresiones $\delta_{j,Q} = \lambda_j - q_1\lambda_1 - q_2\lambda_2$. En el caso de que $\delta_{j,Q} = 0$, $\forall\ j = 1,2$, $\forall\ |Q| \geq 2$, el cambio de coordenadas (8) sería la identidad y la EDO (7) sería la EDO (9) (no ganaríamos nada). El otro extremo ocurre cuando $\delta_{j,Q} \neq 0$, $\forall\ j = 1,2$, $\forall\ |Q| \geq 2$, en este caso la EDO transformada (9) sería

$$\left| \begin{array}{rcl} w_1' & = & \lambda_1 w_1 \\ \\ w_2' & = & \lambda_2 w_2 \end{array} \right.$$

   la cual es una EDO lineal En general uno espera obtener un caso intermedio en el sentido que la EDO transformada (9) sería más simple que la EDO original (7).

La expresión (10) motiva el siguiente concepto.

Definición 3.1. *Decimos que* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ *es un* par resonante *si y sólo si existen* $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$, *con* $q_1 + q_2 \geq 2$ *tales que*

$$\lambda_1 = q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 \quad ó \quad \lambda_2 = q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2$$

Las dos proposiciones siguientes, cuya demostración puede ser encontrada en ([2]), nos proporcionan criterios sencillos para determinar si un par es o no resonante.

Proposición 3.1. *Sea* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, *tales que* $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{R}^-$ *Son equivalentes:*

1. (λ_1, λ_2) *es un par resonante.*

2. *Existe un único entero* $m \geq 2$ *tal que* $\lambda_1 = m\lambda_2$ *ó* $\lambda_2 = m\lambda_1$.

Proposición 3.2. *Sea* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, *tales que* $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}^-$. *Son equivalentes:*

1. (λ_1, λ_2) *es un par resonante.*

2. *Existen* $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+$ *tales que* $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 = 0$.

Si $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, tales que $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{R}^-$ entonces decimos que (λ_1, λ_2) está en el *dominio de Poincaré*, lo que denotaremos por $(\lambda_1, \lambda_2) \in D_P$.

Usando la noción de resonancia, podemos reformular el teorema 3.1

Teorema 3.2. *Si* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ *es un par no resonante entonces la EDO*

$$\left| \begin{array}{rcl} z_1' & = & \lambda_1 z_1 + \sum\limits_{|Q|\geq 2} a_{1,Q} z^Q \\ \\ z_2' & = & \lambda_2 z_2 + \sum\limits_{|Q|\geq 2} a_{2,Q} z^Q \end{array} \right.$$

puede ser linealizada por un cambio formal de coordenadas del tipo perturbación de la identidad.

Cuando $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ es un par no resonante, entonces el Teorema de Poincaré (ver [2]) afirma que el cambio de coordenadas formal de coordenadas del Teorema 3.1, es convergente en una vecindad del origen, es esto esencialmente lo que dice el *Teorema de linealización de Poincaré.* Más aún, se puede tener el siguiente resultado, cuya demostración el lector la puede encontrar en ([1]):

Teorema 3.3. ***(Teorema de Linealización de Poincaré)*** *Sea* $U \subseteq \mathbb{C}^2$ *abierto,* $0 \in U$ *y* $Z \in \mathcal{X}(U)$ *tal que* 0 *es una singularidad aislada de* Z. *Si la parte lineal de* Z *en* 0 *es no nula y sus autovalores* (λ_1, λ_2) *es un par no resonante en el dominio de Poincaré, entonces* Z *es localmente equivalente a su parte lineal.*

4. El Resultado Principal

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, $0 \in U$ y $Z \in \mathcal{X}(U)$ tal que 0 es una singularidad aislada de Z. Cuando la parte lineal de Z en 0 es no nula y sus autovalores $(\lambda_1, \lambda_2) \in D_P$ es un par resonante, entonces ya no es posible transformar la EDO asociada a Z en una EDO lineal, sin embargo, la situación no es tan complicada.

Teorema 4.1. ***(Dulac)*** *Sea* $U \subseteq \mathbb{C}^2$ *abierto,* $0 \in U$ *y* $Z \in \mathcal{X}(U)$ *tal que* 0 *es una singularidad aislada de* Z. *Si la parte lineal de* Z *en* 0 *es no nula y sus autovalores* (λ_1, λ_2) *es un par resonante en el dominio de Poincaré, entonces* Z *es localmente equivalente al campo* $W \in \mathcal{X}(\mathbb{C}^2)$ *definido por*

$$W(w_1, w_2) = (\lambda_1 w_1 + a w_2^m, \lambda_2 w_2) \quad (\textit{resp. } W(w_1, w_2) = (\lambda_1 w_1, \lambda_2 w_2 + b w_1^m))$$

en donde el entero $m \geq 2$ *es tal que* $\lambda_1 = m\lambda_2$ *(resp.* $\lambda_2 = m\lambda_1$*).*

Prueba. De acuerdo a (6), tenemos que existe un cambio formal de coordenadas

$$\sum_{|Q|\geq 2}(\delta_{j,Q}\xi_{j,Q}-b_{j,Q})w^Q=\frac{\partial \xi_j}{\partial w_1}(w)B_1(w)+\frac{\partial \xi_j}{\partial w_2}(w)B_2(w)-A_j(\xi(w))$$

Como por hipótesis $(\lambda_1,\lambda_2)\in D_P$ es un par resonante, luego, por la Proposición 3.1, existe un único entero $m\geq 2$ tal que $\lambda_1=m\lambda_2$ ó $\lambda_2=m\lambda_1$. Trabajando con el primer caso y denotando $Q_0=(0,m)$, tenemos que $\delta_{1,Q}\neq 0$, $\forall\ |Q|\geq 2$, $Q\neq Q_0$ y $\delta_{2,Q}\neq 0$, $\forall\ |Q|\geq 2$. Se tiene entonces que

$$B_1(w)=\sum_{|Q|\geq 2}b_{1,Q}w^Q=b_{1,Q_0}w^{Q_0}\quad \text{y}\quad B_2(w)=\sum_{|Q|\geq 2}b_{2,Q}w^Q=0$$

Además como $\delta_{1,Q_0}=\lambda_1-0\cdot\lambda_1-m\lambda_2=0$ entonces $\xi_{1,Q_0}=0$. Reemplazando en la igualdad inicial tenemos para $j=1$:

$$\sum_{|Q|\geq 2}\delta_{1,Q}\xi_{1,Q}w^Q-b_{1,Q_0}w^{Q_0}=\frac{\partial \xi_1}{\partial w_1}(w)b_{1,Q_0}w^{Q_0}-A_1(\xi(w))$$

mientras que para $j=2$:

$$\sum_{|Q|\geq 2}\delta_{2,Q}\xi_{2,Q}w^Q=\frac{\partial \xi_2}{\partial w_1}(w)b_{1,Q_0}w^{Q_0}-A_2(\xi(w))$$

Como $\xi_j(w)=\sum_{|Q|\geq 2}\xi_{j,Q}w^Q$ entonces $\frac{\partial \xi_j}{\partial w_1}(w)=\sum_{|Q|\geq 2}\xi_{j,Q}q_1w_1^{q_1-1}w_2^{q_2}$, luego

$$w_1\frac{\partial \xi_j}{\partial w_1}(w)=\sum_{|Q|\geq 2}\xi_{j,Q}q_1w^Q\Rightarrow\frac{\partial \xi_j}{\partial w_1}(w)=\sum_{|Q|\geq 2}\xi_{j,Q}\frac{q_1}{w_1}w^Q$$

y por tanto

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial w_1}(w)b_{1,Q_0}w^{Q_0}=\sum_{|Q|\geq 2}q_1b_{1,Q_0}\frac{w_2^m}{w_1}\xi_{j,Q}w^Q$$

Reemplazando y ordenando obtenemos:

$$\sum_{|Q|\geq 2}(\delta_{1,Q}-q_1b_{1,Q_0}\frac{w_2^m}{w_1})\xi_{1,Q}w^Q=b_{1,Q_0}w^{Q_0}-A_1(\xi(w))$$

$$\sum_{|Q|\geq 2}(\delta_{2,Q}-q_1b_{1,Q_0}\frac{w_2^m}{w_1})\xi_{2,Q}w^Q=-A_2(\xi(w))$$

Denotando $P_j(w_1,w_2)=\sum_{|Q|\geq 2}(\delta_{j,Q}-q_1b_{1,Q_0}\frac{w_2^m}{w_1})\xi_{j,Q}w^Q$, se tiene

$$P_1(w_1,w_2)=b_{1,Q_0}w^{Q_0}-A_1(\xi(w))\quad \text{y}\quad P_2(w_1,w_2)=-A_2(\xi(w))$$

<u>AFIRMACIÓN</u>: $\hat{A}_j(\xi(w))\leq\hat{A}_j(w_1+\hat{\xi}_1,w_2+\hat{\xi}_2(w))$. En efecto, como

$$\begin{aligned}\hat{A}_j(\xi(w)) &= \sum_{|Q|\geq 2}|a_{j,Q}|(w_1+\xi_1(w))^{q_1}(w_2+\xi_2(w))^{q_2}\\ &\leq \sum_{|Q|\geq 2}|a_{j,Q}|(w_1+\hat{\xi}_1(w))^{q_1}(w_2+\hat{\xi}_2(w))^{q_2}=\hat{A}_j(w_1+\hat{\xi}_1,w_2+\hat{\xi}_2(w))\end{aligned}$$

Entonces:

$$\hat{P}_1(w_1, w_2) \leq |b_{1,Q_0}|w^{Q_0} + A_1(\hat{\xi}(w)) \leq |b_{1,Q_0}|w^{Q_0} + \hat{A}_1(w_1 + \hat{\xi}_1, w_2 + \hat{\xi}_2(w))$$

$$\hat{P}_2(w_1, w_2) = \hat{A}_2(\xi(w)) \leq \hat{A}_2(w_1 + \hat{\xi}_1(w), w_2 + \hat{\xi}_2(w))$$

Tomando $w_1 = w_2 = w$ tenemos

$$\tilde{P}_1(w) = \hat{P}_1(w, w) \leq |b_{1,Q_0}|w^m + \hat{A}_1(w + \tilde{\xi}_1(w), w + \tilde{\xi}_2(w))$$

y

$$\tilde{P}_2(w) = \hat{P}_2(w, w) \leq \hat{A}_2(w + \tilde{\xi}_1(w), w + \tilde{\xi}_2(w))$$

Sumando ambas expresiones tenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_1(w) + \tilde{P}_2(w) &\leq |b_{1,Q_0}|w^m + \hat{A}_1(w + \tilde{\xi}_1, w + \tilde{\xi}_2) + \hat{A}_2(w + \tilde{\xi}_1, w + \tilde{\xi}_2) \\
&\leq |b_{1,Q_0}|w^m + \hat{A}_1(w + \tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2, w + \tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2) + \hat{A}_2(w + \tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2, w + \tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2) \\
&= |b_{1,Q_0}|w^m + \tilde{A}_1(w + \tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2) + \tilde{A}_2(w + \tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2)
\end{aligned}$$

En conclusión tenemos

$$\tilde{P}_1(w) + \tilde{P}_2(w) \leq |b_{1,Q_0}|w^m + \tilde{A}_1(w + \tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2) + \tilde{A}_2(w + \tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2)$$

Luego:

$$\sum_{j=1}^{2} \tilde{P}_j(w) \leq |b_{1,Q_0}|w^m + \sum_{k=1}^{2} \tilde{A}_k \left(w + \sum_{j=1}^{2} \tilde{\xi}_j(w) \right) \tag{11}$$

Por otro lado, recordemos que

$$\tilde{P}_j(w) = \sum_{|Q| \geq 2} |\delta_{j,Q} - q_1 b_{1,Q_0} w^{m-1}| \cdot |\xi_{j,Q}| w^{|Q|} \tag{12}$$

Antes de continuar, necesitamos el siguiente resultado.

Lema 4.1. *Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tenemos que*

$$\inf \left\{ \left| (\delta_{j,Q} - q_1 b_{1,Q_0}) w^{m-1} \right| ; \quad \forall\ (j, Q) \neq (1, Q_0) \ \ y \ \ |w| < \epsilon \right\} > 0$$

Prueba. Tomando $\epsilon = \left| \dfrac{2\lambda_2}{b_{1,Q_0}} \right|^{\frac{1}{m-1}} > 0$, tenemos que si $|w| < \epsilon$ entonces $\left| \dfrac{b_{1,Q_0} w^{m-1}}{\lambda_2} \right| < \dfrac{1}{2}$. Sea $K = Re \left(\frac{b_{1,Q_0} w^{m-1}}{\lambda_2} \right) \Rightarrow |K| < \frac{1}{2}$. Consideremos dos casos:
Caso 1: $j = 2$. Entonces $(j, Q) \neq (1, Q_0)$, luego

$$\begin{aligned}
\left| S_{j,Q} - q_1 b_{1,Q_0} w^{m-1} \right| &= \left| \lambda_2 - q_1 \lambda_1 - q_2 \lambda_2 - q_1 b_{1,Q_0} w^{m-1} \right| = |\lambda_2| \cdot \left| 1 - q_1 m - q_2 - q_1 \frac{b_{1,Q_0}}{\lambda_2} w^{m-1} \right| \\
&\geq |\lambda_2| \cdot \left| Re(1 - q_1 m - q_2 - q_1 \frac{b_{1,Q_0}}{\lambda_2} w^{m-1}) \right| = |\lambda_2| \cdot |1 - q_1 m - q_2 - q_1 K| \\
&\geq |\lambda_2| \left(q_1 m + q_1 K + q_2 - 1 \right) \geq |\lambda_2| \left(q_1 (m + K) + q_2 - 1 \right) \\
&\geq |\lambda_2| \left(q_1 \left(2 - \frac{1}{2} \right) + q_2 - 1 \right) = |\lambda_2| \left(\frac{3}{2} q_1 + q_2 - 1 \right) \\
&\geq |\lambda_2| \left(q_1 + q_2 - 1 \right) \geq |\lambda_2|
\end{aligned}$$

Caso 2: $j = 1$. Entonces $Q \neq Q_0 = (0, m)$. Analicemos el valor de $|m - q_1 m - q_2 - q_1 K|$

Si $q_1 = 0$ entonces $Q_0 \neq Q$ lo cual implica que $q_2 \neq m$ y por tanto

$$|m - q_1 m - q_2 - q_1 K| = |m - q_2| \geq 1$$

Si $q_1 = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} |m - q_1 m - q_2 - q_1 K| &= |q_2 + K| \geq q_2 + K \geq q_2 - \frac{1}{2} \geq q_1 + q_2 - \frac{1}{2} - 1 \\ &\geq 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Si $q_1 \geq 2$, tenemos

$$\begin{aligned} |m - q_1 m - q_2 - q_1 K| &\geq q_1 m + q_2 + q_1 K - m = m(q_1 - 1) + q_2 + q_1 K \\ &\geq 2(q_1 - 1) + q_2 - \frac{q_1}{2} = \frac{3q_1}{2} - 2 + q_2 = q_1 + q_2 - 2 + \frac{q_1}{2} \\ &\geq \frac{q_1}{2} \geq 1 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left|\delta_{j,Q} - q_1 b_{1,Q_0} w^{m-1}\right| &= \left|\lambda_1 - q_1\lambda_1 - q_2\lambda_2 - q_1 b_{1,Q_0} w^{m-1}\right| = |\lambda_2| \cdot \left|m - q_1 m - q_2 - q_1 \frac{b_{1,Q_0}}{\lambda_2} w^{m-1}\right| \\ &\geq |\lambda_2| \cdot \left|Re\left(m - q_1 m - q_2 - q_1 \frac{b_{1,Q_0}}{\lambda_2} w^{m-1}\right)\right| = |\lambda_2| \cdot |m - q_1 m - q_2 - q_1 K| \\ &\geq \frac{|\lambda_2|}{2} \end{aligned}$$

En conclusión, si $\epsilon = \left|\dfrac{2\lambda_2}{b_{1,Q_0}}\right|^{\frac{1}{m-1}}$, entonces

$$\inf\left\{\left|\delta_{j,Q} - q_1 b_{1,Q_0} w^{m-1}\right|; \quad (j, Q) \neq (1, Q_0) \quad \text{y} \quad |w| < \epsilon\right\} \geq \frac{|\lambda_2|}{2} > 0$$

lo que concluye la demostración del lema. □

Volviendo a la demostración del Teorema de Dulac, en (12) apliquemos el lema:

$$\tilde{P}_j(w) = \sum_{|Q|\geq 2} \left|\delta_{j,Q} - q_1 b_{1,Q_0} w^{m-1}\right| \cdot |\xi_{j,Q}|\, w^{|Q|} \geq \sum_{|Q|\geq 2} \frac{|\lambda_2|}{2} |\xi_{j,Q}|\, w^{|Q|} = \frac{|\lambda_2|}{2} \tilde{\xi}_j(w)$$

Esto es válido puesto cuando $(j, Q) = (1, Q_0)$ tenemos que $\tilde{\xi}_{1,Q_0} = 0$, luego

$$\sum_{j=1}^{2} \tilde{P}_j(w) \geq \frac{|\lambda_2|}{2} \sum_{j=1}^{2} \tilde{\xi}_j(w) \tag{13}$$

Usando (12) y (13), tenemos

$$\frac{|\lambda_2|}{2} \sum_{j=1}^{2} \tilde{\xi}_j(w) \leq |b_{1,Q_0}|\, w^m + \sum_{j=1}^{2} \tilde{A}_j\left(w + \sum_{j=1}^{2} \tilde{\xi}_j(w)\right)$$

Denotando $b = \dfrac{2\,|b_{1,Q_0}|}{|\lambda_2|}$, $S(w) = \sum_{j=1}^{2} \tilde{\xi}_j(w)$ y $F(w) = \dfrac{2}{|\lambda_2|} \sum_{j=1}^{2} \tilde{A}_j(w)$, tenemos

$$S(w) \leq bw^n + F(w + S(w));\ \forall\ |w| < \epsilon = \left|\frac{2\lambda_2}{b_{1,Q_0}}\right|^{\frac{1}{m-1}}$$

Como $S(w) \leq F(w+S(w))+bw^m$, en una vecindad del $0 \in \mathbb{C}^2$, definimos f a valores complejos como:

$$f(w,v) = v - F(w+v) - bw^m$$

Observe que

$$f(0,0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(w,v) = 1 - F'(w+v),$$

luego $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 1 \neq 0$. Por el Teorema de la función implícita para funciones de varias variables complejas (ver [3]) existe una función analítica $\varphi : D_R(0) \to D_{R'}(0)$ tal que

$$R < \epsilon, \quad \varphi(0) = 0 \quad \text{y} \quad f(w, \varphi(w)) = 0, \quad \forall\ w \in D_R(0).$$

Luego

$$\varphi(w) = F(w + \varphi(w)) + bw^m, \quad \forall\ w \in D_R(0)$$

Además

$$\begin{aligned} \varphi'(w) &= F'(w+\varphi(w))(1+\varphi'(w)) + bmw^{m-1}, \quad \forall\ w \in D_R(0) \\ \varphi'(0) &= F'(0+\varphi(0))(1+\varphi'(0)) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\varphi(w) = \sum_{n\geq 2} c_n w^n; \quad \forall\ w \in D_R(0)$$

Luego tenemos

$$\sum_{n\geq 2} c_n w^n = \sum_{n\geq 1} f_n(w + c_2w^2 + c_3w^3 + \ldots)^n + bw^m$$

Igualando términos de orden " n "

$$\begin{aligned} c_2 &= f_2 \quad \text{ó} \quad c_2 = f_2 + b \\ c_3 &= 2c_2f_2 \quad \text{ó} \quad c_3 = 2c_2f_2 + b \\ c_4 &= c_2^2f_2 + 2f_2c_3 + 2f_3c_2 + f_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

se sigue que $c_n \geq f_n\ \forall\ n \geq 2$, $\varphi(w)$ es una serie de términos no negativos. Por otro lado, como

$$S(w) \leq F(w + S(w)) + bw^m$$

se tiene entonces que

$$\begin{aligned} S_2 &\leq f_2 \quad \text{ó} \quad S_2 \leq f_2 + b = c_2 + b \\ S_3 &\leq 2S_2f_2 \leq 2c_2f_2 = c_3 \quad \text{ó} \quad S_3 \leq c_3 + b \\ S_4 &\leq S_2^2f_2 + 2f_2S_3 + 2f_3S_2 + f_4 \leq c_2^2f_2 + 2f_2c_3 + 2f_3c_2 + f_4 = c_4 \end{aligned}$$

Prosiguiendo tenemos $S_n \leq c_n, \quad \forall\ n \geq 2.$

Como $\sum_{n\geq 2} c_n w^n$ es convergente entonces $S(w) = \sum_{n\geq 2} S_n w^n$ es convergente en $D_R(0)$, luego $\tilde{\xi}_1(w) + \tilde{\xi}_2(w)$ es convergente en $D_R(0)$ y por tanto $\tilde{\xi}_1(w), \tilde{\xi}_2(w)$ son convergentes en $D_R(0)$. Se sigue que $\xi_1(w_1, w_2)$ y $\xi_2(w_1, w_2)$ son convergentes en el polidisco $\triangle((0,0),(R,R))$. Esto prueba que el cambio de coordenadas es convergente.

Para demostrar la conjugación, sea $\xi(w) = (w_1 + \xi_1(w), w_2 + \xi_2(w))$ el cambio de coordenadas tipo perturbación de la identidad que transforma la EDO asociada a Z a

$$\left(\lambda_1 w_1 + b_{1,(0,m)} w_2^m, \lambda_2 w_2\right)$$

Sabemos que ξ es holomorfa en una vecindad del 0 y $\xi'(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL(\mathbb{C}^2)$. Por el Teorema de la función inversa para funciones de varias variables complejas (ver [3]), existen polidiscos abiertos $\triangle_1, \triangle_2 \subseteq \mathbb{C}^2$ centrados en $0 \in \mathbb{C}^2$ tales que

$$\xi\Big|_{\triangle_1} : \triangle_1 \to \triangle_2 \quad \text{es un biholomorfismo}$$

Si denotamos $h = \left(\xi\Big|_{\triangle_1}\right)^{-1}$ como $w = h(z)$ se tiene que $w' = h'(z)z'$ implica $(\lambda_1 w_1 + b_{1,Q_0} w_2^m, \lambda_2 w_2) = h'(z)Z(z)$ y por tanto $W(w) = h'(z)Z(z)$. Por la Proposición 1.1, concluimos que h es una conjugación analítica entre Z y W. Esto finaliza la prueba del Teorema de Dulac. $\square$

5. Estudio geométrico local

De acuerdo al teorema de Dulac, para entender el comportamiento geométrico de las soluciones de una EDO definida por un campo cuya parte lineal tiene autovalores resonantes en el dominio de Poincaré, es suficiente entender las soluciones del campo polinomial $Z(z_1, z_2) = (\lambda_1 z_1 + a z_2^m, \lambda_2 z_2)$. Vamos a hacer este estudio a continuación. En primer lugar, un fácil cálculo muestra que la solución $\varphi_{z_0} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ del PVI asociado al campo Z que en el instante 0 pasa por $z_0 = (z_1^0, z_2^0)$, viene dada por

$$\varphi_{z_0}(T) = \left((a(z_2^0)^m T + z_1^0)e^{\lambda_1 T}, z_2^0 e^{\lambda_2 T}\right)$$

De esta manera, el flujo (global) $\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ asociado a Z se define como

$$\varphi(T, z_1, z_2) = \left((z_1 + a(z_2)^m T)e^{\lambda_1 T}, z_2 e^{\lambda_2 T}\right)$$

Nos proponemos estudiar la foliación $\mathcal{F}_Z$. En primer lugar, observe que $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ es la única singularidad de Z, luego $\mathcal{O}_Z((0,0)) = \{(0,0)\}$. Además, es fácil ver que $\mathcal{O}_Z((z,0)) = \mathbb{C}^* \times \{0\}$. A diferencia de lo que ocurre con las lineales $\{0\} \times \mathbb{C}^* \notin \mathcal{F}_Z$.

Sea $L \in \mathcal{F}_Z - \{(0,0)\}$, vamos a probar que L intersecta transversalmente a la familia de esferas $\{S_r^3\}_{r>0}$, para $r > 0$ suficientemente pequeño. En efecto, sabemos que el espacio tangente a $S_r^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2;\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = r^2\}$ en el punto $z_0 = (z_1^0, z_2^0) \in S_r^3$ es

$$T_{z_0} = \{z \in \mathbb{C}^2;\ \mathrm{Re}(\langle z, z_0\rangle) = 0\}$$

Como $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_P$, existe $\alpha \in S^1$ tal que $\mathrm{Re}(\alpha\lambda_1) < 0$ y $\mathrm{Re}(\alpha\lambda_2) < 0$, además, como $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_P$ es un par resonante, se tiene que existe $m \geq 2$ tal que $\lambda_1 = m\lambda_2$. Sea $L \in \mathcal{F}_Z - \{(0,0)\}$, podemos considerar

$$L = \mathcal{O}_Z(z_0) = \{\varphi_{z_0}(T);\ T \in \mathbb{C}\}$$

Sabemos que
$$T_{z_0}L = \{c\varphi'_{z_0}(0);\, c \in \mathbb{C}\} = \{c\left(\lambda_1 z_1^0 + a(z_2^0)^m, \lambda_2 z_2^0\right);\, c \in \mathbb{C}\}$$
Tomando $c = \alpha$ tenemos:
$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\langle \alpha\varphi'_{z_0}(0), z_0\rangle\right) &= \mathrm{Re}\left(\langle \alpha\left[\lambda_1 z_1^0 + a(z_2^0)^m, \lambda_2 z_2^0\right], (z_1^0, z_2^0)\rangle\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\alpha\left[\lambda_1 z_1^0 + a(z_2^0)^m\right]\overline{z}_1^0 + \alpha\lambda_2 z_2^0\overline{z}_2^0\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\alpha\lambda_1|z_1^0|^2 + \alpha a(z_2^0)^m\overline{z}_1^0 + \alpha\lambda_2|z_2^0|^2\right)\\
&= |z_1^0|^2\mathrm{Re}(\alpha\lambda_1) + \mathrm{Re}\left(\alpha a(z_2^0)^m\overline{z}_1^0\right) + |z_2^0|^2\mathrm{Re}(\alpha\lambda_2)\\
&= \left(m|z_1^0|^2 + |z_2^0|^2\right)\mathrm{Re}(\alpha\lambda_2) + \mathrm{Re}\left(\alpha a(z_2^0)^m\overline{z}_1^0\right)\\
&\leq \left(m|z_1^0|^2 + |z_2^0|^2\right)\mathrm{Re}(\alpha\lambda_2) + |a|\cdot|z_1^0|\cdot|z_2^0|^m
\end{aligned}$$
Ahora bien, como $|z_1^0|^2 + |z_2^0|^2 = r^2$ entonces $|z_1^0|^2 \leq r^2$ y $|z_2^0|^2 \leq r^2$, luego
$$|a|\cdot|z_1^0|\cdot|z_2^0|^m \leq |a|r^{m+1}.$$
Además $m|z_1^0|^2 + |z_2^0|^2 = (m-1)|z_1^0|^2 + r^2 \geq r^2$, luego
$$\left[m|z_1^0|^2 + |z_2^0|^2\right]\mathrm{Re}(\alpha\lambda_2) \leq r^2\mathrm{Re}(\alpha\lambda_2)$$
Reemplazando estas dos desigualdades en la anterior se llega a
$$\mathrm{Re}\left(\langle \alpha\varphi'_{z_0}(0), z_0\rangle\right) \leq r^2\mathrm{Re}(\alpha\lambda_2) + |a|r^{m+1}$$
Tomando $r > 0$ tal que $r^{m-1} < -\dfrac{\mathrm{Re}(\alpha\lambda_2)}{|a|}$, se llega a $\mathrm{Re}(\alpha\lambda_2) + |a|r^{m-1} < 0$ y por tanto
$$\mathrm{Re}\left(\langle \alpha\varphi'_{z_0}(0), z_0\rangle\right) < 0$$
Se sigue que para $r > 0$ suficientemente pequeño, L intersecta transversalmente a cada una de las esferas S_r^3. De ésta manera $L \cap S_r^3$ es una curva real. Observe que si $L = \mathbb{C}^* \times \{(0,0)\}$ entonces ésta curva es el círculo $S_r^1 \times \{0\}$. Analicemos esta intersección para $L \in \mathcal{F}_Z - \{\{(0,0), \mathbb{C}^* \times \{(0,0)\}\}$.

Sea $(T_k) \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\lim_{k\to\infty} |T_k| = +\infty$ y $\varphi_{z_0}(T_k) \in L \cap S_r^3$, recordemos que $\varphi_{z_0} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ viene dado por
$$\varphi_{z_0}(T) = (\mu_1(T), \mu_2(T)) = \left((z_1 + az_2^m T)e^{m\lambda_2 T}, z_2 e^{\lambda_2 T}\right)$$
Observe que
$$\frac{|\mu_1(T)|}{|\mu_2(T)|^m} = \frac{|z_1 + az_2^m T|\cdot\left|e^{m\lambda_2 T}\right|}{|z_2|^m\cdot\left|e^{\lambda_2 T}\right|^m} = \frac{|z_1 + az_2^m T|}{|z_2|^m}, \qquad \forall\, T \in \mathbb{C}$$
luego
$$\lim_{k\to\infty}\frac{|\mu_1(T_k)|}{|\mu_2(T_k)|^m} = \lim_{k\to\infty}\frac{|z_1 + az_2^m T_k|}{|z_2|^m} = +\infty$$
Por otro lado como $|\mu_1(T_k)|^2 + |\mu_2(T_k)|^2 = r^2$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, tenemos que $|\mu_1(T_k)| = \sqrt{r^2 - |\mu_2(T_k)|^2}$ y por tanto
$$\frac{|\mu_1(T_k)|}{|\mu_2(T_k)|^m} = \sqrt{\frac{r^2 - |\mu_2(T_k)|^2}{|\mu_2(T_k)|^m}}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$
luego
$$\lim_{k\to\infty}\frac{r^2 - |\mu_2(T_k)|^2}{|\mu_2(T_k)|^{2m}} = +\infty$$

concluimos que $\lim\limits_{k\to\infty} |\mu_2(T_k)| = 0$. Un resultado análogo se consigue cuando tomamos $(T_j) \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} |T_j| = 0$ y $\varphi_{z_0}(T_j) \in L \cap S_r^3$.

Concluimos que de las curvas que provienen al intersectar las hojas de $\mathcal{F}_Z - \{(0,0)\}$ con la esfera S_r^3 (para $r > 0$ suficientemente pequeño), sólo una de ellas es cerrada, las demás son abiertas y se enrollan en ambos sentidos a la anterior.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[**1**] R. Benazic, *Tópicos de dinámica compleja*, Notas de clase, Lima (2008).

[**2**] R. Benazic, *Singularidades de Campos Vectoriales Holomorfos en el Dominio de Poincaré*, PRO MATHEMATICA, Vol. X Nos. 19-20 (1996), pp. 9 - 33.

[**3**] R. Gunning - H. Rossi, *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Prentice-Hall (1965).

[**4**] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, Dover, (1976).

[**5**] J. Palis - W. de Mello, *Introdução a os sistemas dinâmicos*,Projeto Euclides, IMPA (1978).

[**6**] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA (1979).