PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XII N°1, pp. 50-60, Lima - Perú, Julio 2009

SOLUCIÓN GLOBAL PARA UNA ECUACIÓN DEL CALOR DEGENERADA NO LINEAL

*Teófanes Quispe Méndez**

Resumen: En el presente trabajo, estudiamos la existencia de la solución global del problema mixto para un tipo de ecuación del calor degenerada no lineal con una función de Lewis generalizada.
Palabras clave: Solución global, Ecuación del calor degenerada no lineal, Método de Galerkin, Método de estimativas de Tartar, Ecuación de evolución.

GLOBAL SOLUTION FOR A NONLINEAR DEGENERATE HEAT EQUATION

Abstract: In present work, we study the existence of the global solutions to the mixed problem for a type of nonlinear degenerate heat equation with a generalized Lewis function.
Key words: Global solution, Nonlinear degenerate heat equation, Galerkin method, Tartar estimates method, Evolution equation.

1. Introducción

En este artículo consideramos el siguiente problema de valores inicial y frontera con una función de Lewis generalizada $\alpha(x,t)$:

$$\begin{array}{ll} \alpha(x,t)u_t - \beta(t)\,\Delta u_t - \Delta_p u = f(u) & , x \in \Omega, t \geq 0, \\ u = 0 & , x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & , x \in \Omega, \end{array} \tag{1.1}$$

donde Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera bien regular $\partial\Omega$, Δ es el operador laplaciano, $\alpha(x,t)$ es una función real positiva para $x \in \Omega$, $t \geq 0$, $\beta(t)$ es una función real positiva para $t \geq 0$, $f(s)$ es una función real no lineal para $s \in \mathbb{R}$, y el operador p-laplaciano $-\Delta_p$ definido para $p \geq 2$:

$$-\Delta_p u := -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

Las ecuaciones de tipo (1.1) son utilizadas para modelar diversos fenómenos y procesos en mecánica, física, tecnología, biología y muchas otras áreas. Por ejemplo, describe el proceso de conducción en plasma, filtración de gases y líquidos en medios porosos, reacciones químicas, procesos de crecimiento y migración de poblaciones, y entre otros [8].

En el caso $p = 2$, la ecuación en (1.1) se reduce a la ecuación clásica del calor, y se tiene sobre ello una literatura bastante impresionante en cuanto al estudio de existencia y no existencia de las soluciones globales, y las propiedades de estas, citamos algunos de ellos [2, 3, 7, 8, 9, 10]. El caso

*Profesor de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. e-mail: tquispem@unmsm.edu.pe

$p > 2$, no se tiene muchos resultados conocidos. Tsutsumi [11], obtiene existencia y no existencia de las soluciones globales con los métodos de aproximación de Galerkin y del pozo potencial, cuando $\alpha \equiv 1$, $\beta \equiv 0$ y $f(u) := \pm u^{\sigma-1}, \sigma \geq 2$. Messaoudi [5], obtiene singularidad en tiempo finito con energía inicial no positiva con el método de concavidad, cuando $\alpha \equiv 1$ y $\beta \equiv 0$. Zhou [12], obtiene singularidad en tiempo finito con energía inicial positiva restringida y con energía inicial no positiva con el método de concavidad, cuando $\beta \equiv 0$. Quispe Méndez [6], obtiene existencia de las soluciones locales con el método de aproximación de Galerkin y las estimativas de Tartar, cuando $2 \leq p < \sigma < \frac{p(n+2)}{n}$.

En este trabajo probaremos la existencia de las soluciones globales del problema (1.1). En la prueba utilizaremos el método de Galerkin [4] y un argumento empleado por Tartar [10], y las estrategias seguidas por Tsutsumi [11] y Gao and Ma [1].

2. Preliminares

En esta sección daremos algunas notaciones, conceptos y lemas sin demostración que serán utilizadas en el desarrollo del presente trabajo.

Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera bien regular $\partial\Omega$. Denotamos el producto interno y la norma de $L^2(\Omega)$ y $L^p(\Omega)$, con $(.,.)$ y $|\,.\,|_p$, respectivamente, para $1 \leq p \leq \infty$. Además $((.,.))$ y $\|.\|$, denotarán el producto interno y la norma de $H_0^1(\Omega)$, donde $((u,v)) := \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$ es la forma de Dirichlet. En el espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ usamos la norma

$$\|u\|_{1,p} := \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Sea X un espacio de Banach, $0 < T \leq \infty$ y $1 \leq p \leq \infty$. Representamos con $L^p(0,T;X)$ al espacio de Banach de las funciones vectoriales $u :]0,T[\longrightarrow X$ tales que son medibles y $\|u(t)\|_X \in L^p(0,T)$, con la norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := \sup_{0<t<T} \text{ess} \, \|u(t)\|_X \quad , \; p = \infty.$$

Similarmente, cuando $0 < T < \infty$, representaremos con $C^0([0,T];X)$ al espacio de Banach de las funciones continuas $u : [0,T] \longrightarrow X$, con la norma

$$\|u\|_{C^0([0,T];X)} := \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X \, .$$

Denotamos $v' := v_t$ y $v(t)(x) := v(x,t)$.

Hipótesis. Imponemos sobre las funciones reales $\alpha(x,t)$, $\beta(t)$ y $f(s)$ las siguientes condiciones:

$(H1)$ $\alpha \in W^{1,\infty}(0,\infty; L^\infty(\Omega))$ y $\alpha(x,t) \geq \alpha_0 > 0$, $\forall (x,t) \in \Omega \times [0,\infty[$, α_0 es una constante.

$(H2)$ $\beta \in W^{1,\infty}(0,\infty)$ y $\beta(t) \geq \beta_0 > 0$, $\forall t \geq 0$, β_0 es una constante.

$(H3)$ $f \in C^0(\mathbb{R})$ y existe una constante positiva C_0 tal que

$$|f(s)| \leq C_0 |s|^{\sigma-1}, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

donde $1 < \sigma < \frac{np}{n-p}$ si $n > p$ y $1 < \sigma < \infty$ si $n \leq p$.

Lema 2.1. ***(Desigualdad de Sobolev–Poincaré*** [2]***).*** *Para cada función* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *se tiene*

$$|u|_r \leq B_0 \|u\|_{1,p},$$

donde $1 \leq r \leq \frac{pn}{n-p}$ *si* $1 \leq p < n$ *y* $1 \leq r < \infty$ *si* $1 \leq n \leq p$. *La constante* B_0*depende solamente de* Ω, n, p *y* r.

Lema 2.2. *El operador* p*-laplaciano*$-\Delta_p$ *es acotado, estrictamente monótono, semicontinuo y coercivo de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *en* $W^{-1,q}(\Omega)$,

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

y

$$|\langle -\Delta_p u, v\rangle| \leq \|u\|_{1,p}^{p-1} \|v\|_{1,p}, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

donde $W^{-1,q}(\Omega)$ *es el espacio dual de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *y* $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Lema 2.3. ***(Desigualdad de Young).*** *Sean* $1 < p, q < \infty$ *y* $p^{-1} + q^{-1} = 1$. *Entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b \geq 0.$$

Lema 2.4. ***(Aubin–Lions*** [4]***).*** *Sean* B_0, B_1 *y* B *tres espacios de Banach tales que* $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$, B_0 *y* B_1*reflexivos, y* $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B$. *Sea*

$$W := \{v \in L^{p_0}(0, T; B_0)\,;\ v' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\},$$

donde $0 < T < \infty$, $1 < p_0, p_1 < \infty$*; con la norma definida por*

$$\|v\|_W := \|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}.$$

Entonces W *es un espacio de Banach y* $W \overset{c}{\hookrightarrow} L^{p_0}(0, T; B)$.

Lema 2.5. ***(Lions*** [4]***).*** *Sea* Q *un abierto acotado de* $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$, $\{g_\nu\}$ *y* g *funciones de* $L^q(Q)$, $1 < q < \infty$, *tales que*

$$\|g_\nu\|_{L^q(Q)} \leq \text{const}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad g_\nu \to g \ \text{ c.t.p. en } Q.$$

Entonces

$$g_\nu \rightharpoonup g \ \text{ en } \ L^q(Q).$$

Definición 2.1. *Una función* $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ *es llamada solución del problema* (1.1) *sobre* $[0, T]$ *si satisface las condiciones* $(1.1)_2 - (1.1)_3$ *y la igualdad*

$$\alpha(x, t)u_t - \beta(t)\,\Delta u_t - \Delta_p u = f(u) \quad en \quad L^2\left(0, T; W^{-1,q}(\Omega)\right),$$

donde $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

3. Existencia Global para $p > \sigma$

En esta sección estudiaremos la solución global del problema (1.1) utilizando el método de aproximación de Galerkin [4].

Teorema 3.1. ***(Existencia Global).*** *Supongamos que las funciones α, βy f satisfacen las hipótesis $(H1)$ - $(H3)$, respectivamente, y que $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > \sigma$. Entonces para cada $T > 0$ el problema* (1.1) *admite una solución u sobre $[0,T]$ tal que*

$$u \in L^{\infty}\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right) \text{ y } u' \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right).$$

Demostración. Procedemos en cuatro etapas.

Soluciones Aproximadas. Sea $\{w_k\}$ un sistema completo de funciones en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Sea $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ el subespacio generado por las primeras m funciones $w_1, w_2, ..., w_m$ de $\{w_k\}$. Sea

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\, w_j,$$

las soluciones aproximadas en V_m del problema (1.1), donde las funciones $g_{jm}(t)$, $j = 1, 2, ..., m$, son determinadas del siguiente problema en ecuaciones diferenciales ordinarias, para $w \in V_m$

$$\begin{aligned} &(\alpha(t)u_m'(t), w) + \beta(t)\left(-\Delta u_m'(t), w\right) + \left(-\Delta_p u_m(t), w\right) = \left(f(u_m(t)), w\right), \\ &u_m(0) = u_{0m}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde

$$u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} g_{0jm} w_j, \quad u_{0m} \to u_0 \text{ fuerte en } W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.2}$$

El sistema de ecuaciones ordinarias (3.1) tiene una solución local en el intervalo $[0, T_m[$. La siguiente estimativa a priori nos permitirá extender la solución u_m al intervalo $[0,T]$ independiente de m.

Estimativa a Priori. Tomando $w = u_m'(t)$ en $(3.1)_1$, obtenemos

$$\frac{d}{dt}E(t) + \left|\sqrt{\alpha(t)}u_m'(t)\right|_2^2 + \beta(t)\left\|u_m'(t)\right\|^2 = 0, \tag{3.3}$$

donde

$$E(t) := \frac{1}{p}\left\|u_m(t)\right\|_{1,p}^p - \int_\Omega F\left(u_m(x,t)\right)dx$$

y

$$F(s) := \int_0^s f(\xi)\, d\xi.$$

Integrando (3.3) sobre $[0,t]$, resulta

$$E(t) + \int_0^t \left|\sqrt{\alpha(s)}u_m'(s)\right|_2^2 ds + \int_0^t \beta(s)\left\|u_m'(s)\right\|^2 ds = E(0), \tag{3.4}$$

donde

$$E(0) := \frac{1}{p}\left\|u_{0m}\right\|_{1,p}^p - \int_\Omega F\left(u_{0m}(x)\right)dx.$$

Por (3.2), se obtiene

$$E(0) \le C_1,$$

donde C_1 es una constante positiva independiente de m. De (3.4), obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\left\|u_m(t)\right\|_{1,p}^p+\int_0^t\left|\sqrt{\alpha(s)}u_m'(s)\right|_2^2 ds \\ +\int_0^t\beta(s)\left\|u_m'(s)\right\|^2 ds\leq C_1+\int_\Omega F\left(u_m(x,t)\right)dx.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Por la hipótesis $(H3)$, y las Desigualdades de Sobolev–Poincaré y Young, resulta

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left|F\left(u_m(x,t)\right)\right|dx&\leq\frac{C_0}{\sigma}\left|u_m(t)\right|_\sigma^\sigma\\&\leq\frac{C_0}{\sigma}B_0^\sigma\left\|u_m(t)\right\|_{1,p}^\sigma\\&\leq\frac{1}{2p}\left\|u_m(t)\right\|_{1,p}^p+C_2,\end{aligned} \tag{3.6}$$

donde $C_2:=\frac{p-\sigma}{p\sigma}\left[2^{\frac{1}{p}}C_0^{\frac{1}{\sigma}}B_0\right]^{\frac{p\sigma}{p-\sigma}}$. Por las hipótesis $(H1)-(H2)$ y (3.6), de (3.5) se obtiene

$$\left\|u_m(t)\right\|_{1,p}^p+\int_0^t\left|u_m'(s)\right|_2^2 ds+\int_0^t\left\|u_m'(s)\right\|^2 ds\leq C_3,\quad\forall t\in[0,T], \tag{3.7}$$

donde C_3 es una constante positiva independiente de t y m.

Por el Lema 2.2 y (3.7), resulta

$$\left\|-\Delta_p u_m(t)\right\|_{-1,q}\leq C_4,\quad\forall t\in[0,T], \tag{3.8}$$

donde $p^{-1}+q^{-1}=1$ y C_4 es una constante positiva independiente de t y m.

Pasaje al Límite. De las estimativas (3.7) y (3.8), tenemos que

$$\{u_m\}\text{ es acotada en }L^\infty\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right), \tag{3.9}$$

$$\{u_m'\}\text{ es acotada en }L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \tag{3.10}$$

$$\{u_m'\}\text{ es acotada en }L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \tag{3.11}$$

$$\{-\Delta_p u_m\}\text{ es acotada en }L^\infty\left(0,T;W^{-1,q}(\Omega)\right), \tag{3.12}$$

donde $p^{-1}+q^{-1}=1$. Por (3.9) – (3.12), existen subsucesiones $\{u_\nu\}$ y $\{u_\nu'\}$ de $\{u_m\}$ y $\{u_m'\}$, respectivamente, tales que

$$u_\nu\overset{*}{\rightharpoonup}u\quad\text{en}\quad L^\infty\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right), \tag{3.13}$$

$$u_\nu'\rightharpoonup u'\quad\text{en}\quad L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \tag{3.14}$$

$$u_\nu'\rightharpoonup u'\quad\text{en}\quad L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \tag{3.15}$$

$$-\Delta_p u_\nu\overset{*}{\rightharpoonup}\chi\quad\text{en}\quad L^\infty\left(0,T;W^{-1,q}(\Omega)\right). \tag{3.16}$$

Desde que $L^\infty\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right)\hookrightarrow L^2\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right)$ y $W_0^{1,p}(\Omega)\overset{c}{\hookrightarrow}L^2(\Omega)$, aplicando el Lema de Lions–Aubin, de (3.13) y (3.14) resulta

$$u_\nu\to u\text{ fuerte en }L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \tag{3.17}$$

y

$$u_\nu\to u\text{ c.t.p. en }\Omega\times[0,T]. \tag{3.18}$$

Usando la hipótesis $(H3)$, (3.9) y (3.18) vemos que

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega |f(u_\nu(x,t))|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\, dxdt &\leq \int_0^T C_0 |u_\nu(t)|_\sigma^\sigma\, dt \\ &\leq \sigma \int_0^T \left[\frac{1}{2p} \|u_m(t)\|_{1,p}^p + C_2\right] dt \\ &\leq C_5 \end{aligned} \tag{3.19}$$

y

$$f(u_\nu) \to f(u) \quad \text{c.t.p. en } \Omega \times [0,T]. \tag{3.20}$$

Por (3.19) – (3.20) y el Lema de Lions, se deduce que

$$f(u_\nu) \rightharpoonup f(u) \quad \text{en} \quad L^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\left(0,T; L^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}(\Omega)\right). \tag{3.21}$$

De las convergencias (3.13) – (3.16) y (3.21) por pasaje al límite en la ecuación aproximada $(3.1)_1$, resulta

$$\int_0^T (\alpha(t)u_t - \beta(t)\Delta u_t + \chi - f(u), v)\, dt = 0,$$

para cada $v \in L^2\left(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)\right)$, es decir

$$\alpha(x,t)u_t - \beta(t)\Delta u_t + \chi = f(u) \quad \text{en} \quad L^2\left(0,T; W^{-1,q}(\Omega)\right), \tag{3.22}$$

donde $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Probemos que $\chi = -\Delta_p u$. Sea $A := -\Delta_p$. Tomando $w = u_\nu(t)$ en $(3.1)_1$ e integrando sobre $[0,t]$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^t (Au_\nu(s), u_\nu(s))\, ds &= \int_0^t (f(u_\nu(s)), u_\nu(s)) ds \\ &- \frac{1}{2}\left|\sqrt{\alpha(t)}u_\nu(t)\right|_2^2 - \frac{1}{2}\beta(t)\|u_\nu(t)\|^2 \\ &+ \frac{1}{2}\left|\sqrt{\alpha(0)}u_{0\nu}\right|_2^2 + \frac{1}{2}\beta(0)\|u_{0\nu}\|^2 \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t (\alpha'(s)u_\nu(s), u_\nu(s))\, ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \beta'(s)\|u_\nu(s)\|^2\, ds. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Por $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma(\Omega)$, (3.13) y (3.21), se logran

$$u_\nu \rightharpoonup u \quad \text{en} \quad L^\sigma(\Omega) \text{ c. t. p. para } t \in [0,T]$$

y

$$(f(u_\nu(t)), u_\nu(t)) \to (f(u(t)), u(t)) \text{ c. t. p. para } t \in [0,T]. \tag{3.24}$$

Por $(H3)$ y (3.9), resulta

$$\begin{aligned}|(f(u_\nu(t)), u_\nu(t))| &\leq C_0 |u_\nu(t)|_\sigma^\sigma \\ &\leq C_0 B_0^\sigma \|u_\nu(t)\|_{1,p}^\sigma \\ &\leq C_6, \quad \text{para } t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{3.25}$$

De (3.24), (3.25), y el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, resulta

$$\int_0^t (f(u_\nu(s)), u_\nu(s))ds \to \int_0^t (f(u(s)), u(s))ds, \text{ para } t \in [0,T]. \tag{3.26}$$

Por pasaje al límite en (3.23), haciendo uso de (3.22) y (3.26), obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu\to\infty} \sup \int_0^t (Au_\nu(s), u_\nu(s))\, ds &\leq \int_0^t \lim_{\nu\to\infty} \sup (Au_\nu(s), u_\nu(s))\, ds \\
&= \int_0^t (f(u(s)), u(s))ds \\
&\quad - \frac{1}{2}\left|\sqrt{\alpha(t)}u(t)\right|_2^2 - \frac{1}{2}\beta(t)\|u(t)\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\left|\sqrt{\alpha(0)}u_0\right|_2^2 + \frac{1}{2}\beta(0)\|u_0\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t (\alpha'(s)u(s), u(s))\, ds \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \beta'(s)\|u(s)\|^2\, ds \\
&= \int_0^t (\chi(s), u(s))ds.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Para cada $v \in L^2\left(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)\right)$, definamos la función

$$\varphi_\nu(t) := \int_0^t (Au_\nu(s) - Av(s), u_\nu(s) - v(s))\, ds, \text{ para } t \in [0,T].$$

Por la monotonía del operador A, $\varphi_\nu(t) \geq 0$, $\forall t \in [0,T]$. Por (3.27), (3.13) y (3.16), resulta

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{\nu\to\infty} \sup \varphi_\nu(t) \\
&\leq \int_0^t \lim_{\nu\to\infty} \sup (Au_\nu(s) - Av(s), u_\nu(s) - v(s))\, ds \\
&\leq \int_0^t (\chi(s) - Av(s), u(s) - v(s))\, ds.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Tomando $v = u - \lambda w$ en (3.28), donde $\lambda > 0$ y $w \in L^2\left(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)\right)$, se tiene

$$\int_0^t (\chi(s) - A(u(s) - \lambda w(s)), w(s))\, ds \geq 0.$$

Desde que A es un operador semicontinuo y haciendo tender $\lambda \to 0$, logramos

$$\int_0^t (\chi(s) - Au(s), w(s))\, ds \geq 0, \quad \forall w \in L^2\left(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)\right).$$

De aquí resulta $\chi = Au$.

El dato inicial se verifica de modo estándar. Con todo esto concluye la demostración del Teorema 3.1. ■

Usando argumentos similares que en la prueba del Teorema 3.1, se obtiene los siguientes dos teoremas.

Teorema 3.2. *Supongamos que las funciones α y f satisfacen las hipótesis $(H1)$ y $(H3)$, respectivamente, $\beta \equiv 0$y $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > \sigma$. Entonces para cada $T > 0$ el problema (1.1) admite una solución u sobre $[0, T]$ tal que*

$$u \in L^\infty\left(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)\right) \text{ y } u' \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right).$$

Teorema 3.3. *Supongamos que las funciones βy f satisfacen las hipótesis $(H2)$ y $(H3)$, respectivamente, $\alpha \equiv 0$ y $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > \sigma$. Entonces para cada $T > 0$ el problema (1.1) admite una solución u sobre $[0, T]$ tal que*

$$u \in L^\infty\left(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)\right) \text{ y } u' \in L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right).$$

Observación 3.1. *Se obtienen los mismos resultados de los Teoremas 3.1, 3.2 y 3.4, si agregamos a sus respectivas hipótesis las condiciones*

$$p = \sigma \text{ y } C_0 B_0^\sigma \leq \frac{1}{2}.$$

4. Existencia global para $p < \sigma$

En esta sección estudiaremos la solución global del problema (1.1) utilizando el método de aproximación de Galerkin [4] y un argumento empleado por Tartar [10].

Lema 4.1. *Sea la función definida para $\lambda \geq 0$*

$$g(\lambda) := \frac{\lambda^p}{p} - \frac{C_0 B_0^\sigma}{\sigma} \lambda^\sigma, \tag{4.1}$$

donde B_0 es la constante óptima de la desigualdad de Sobolev–Poincaré; C_0, p y σ son constantes de la hipótesis $(H3)$y $p < \sigma$. Entonces

(i) g es estrictamente creciente en $[0, \lambda_0[$,

(ii) g toma su valor máximo E_0 en λ_0,

(iii) g es estrictamente decreciente en $]\lambda_0, \infty[$,

donde

$$\lambda_0 := (C_0 B_0^\sigma)^{\frac{-1}{\sigma - p}} \text{ y } E_0 := \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{\sigma}\right)(C_0 B_0^\sigma)^{\frac{-p}{\sigma - p}}. \tag{4.2}$$

Demostración. Es inmediato. ■

Definición 4.1. *Definamos al número real no negativo γ como sigue*

$$\gamma := \lim_{m \to \infty} \gamma_m,$$

donde

$$\gamma_m := \frac{1}{p} \|u_{0m}\|_{1,p}^p + \frac{C_0 B_0^\sigma}{\sigma} \|u_{0m}\|_{1,p}^\sigma, \tag{4.3}$$

la sucesión $\{u_{0m}\}$ definida por (3.2), B_0 es la constante óptima de la desigualdad de Sobolev–Poincaré; C_0, p y σ son constantes de la hipótesis $(H3)$.

Teorema 4.1. ***(Existencia Global).*** *Supongamos que las funciones α, βy f satisfacen las hipótesis $(H1)$ - $(H3)$, respectivamente, $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p < \sigma$y que satisfacen*

$$\|u_0\|_{1,p} < \lambda_0 \ \text{ y } \ \gamma < E_0. \tag{4.4}$$

Entonces para cada $T > 0$ el problema (1.1) admite una solución u sobre $[0, T]$ tal que

$$u \in L^\infty\left(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)\right) \ \text{ y } \ u' \in L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right).$$

Demostración. Sea $\{w_k\}$ un sistema completo de funciones en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y sea u_m una solución aproximada del problema (1.1), como en la demostración del Teorema 3.1.

Tomando $w = u_m'(t)$ en $(3.1)_1$, obtenemos

$$\frac{d}{dt}E(t) + \left|\sqrt{\alpha(t)}u_m'(t)\right|_2^2 + \beta(t)\left\|u_m'(t)\right\|^2 = 0, \tag{4.5}$$

donde

$$E(t) := \frac{1}{p}\|u_m(t)\|_{1,p}^p - \int_\Omega F(u_m(x,t))\,dx$$

y

$$F(s) := \int_0^s f(\xi)\,d\xi.$$

Por la hipótesis $(H3)$ y la Desigualdad de Sobolev-Poincaré, resulta

$$\left|\int_\Omega F(u_m(x,t))\,dx\right| \leq \frac{C_0 B_0^\sigma}{\sigma}\|u_m(t)\|_{1,p}^\sigma \tag{4.6}$$

Integrando (4.5) sobre $[0, t]$ y por (4.6), resulta

$$g\left(\|u_m(t)\|_{1,p}\right) + \int_0^t \left|\sqrt{\alpha(s)}u_m'(s)\right|_2^2 ds + \int_0^t \beta(s)\left\|u_m'(s)\right\|^2 ds \leq \gamma_m. \tag{4.7}$$

Ahora probemos que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_m(t)\|_{1,p} < \lambda_0, \ \forall t \in [0, T_m[\,, \ m > m_0, \tag{4.8}$$

donde $[0, T_m[$ es el intervalo de la solución local del problema aproximado (3.1). Probemos por reduccón al absurdo. Supongamos que para cada $m > m_0$, existe $t_0 \in [0, T_m[$ tal que

$$\|u_m(t_0)\|_{1,p} \geq \lambda_0.$$

Notemos que de $(4.4)_1$ y $(3.1)_2 - (3.2)$, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_m(0)\|_{1,p} < \lambda_0, \ \forall m > m_1.$$

Entonces por la continuidad de $u_m(t)$, existe un primer $t_m \in]0, T_m[$ tal que

$$\|u_m(t_m)\|_{1,p} = \lambda_0. \tag{4.9}$$

De aquí y la monotonía de g en $[0, \lambda_0]$, resulta

$$g\left(\|u_m(t)\|_{1,p}\right) \geq 0, \ \forall t \in [0, t_m].$$

Ahora de $(4.4)_2$ y (4.7), existe $m_0 > m_1$ y $\lambda_1 \in]0, \lambda_0[$ tal que

$$\begin{aligned} 0 \leq g\left(\|u_m(t)\|_{1,p}\right) + \int_0^t \left|\sqrt{\alpha(s)} u_m'(s)\right|_2^2 ds \\ + \int_0^t \beta(s) \|u_m'(t)\|^2 ds \leq g(\lambda_1), \ \forall t \in [0, t_m], \ \forall m > m_0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Nuevamente por la monotonía de g en $[0, \lambda_0]$ y (4.10), resulta

$$0 \leq \|u_m(t)\|_{1,p} \leq \lambda_1 < \lambda_0, \ \forall t \in [0, t_m]$$

y en particular $\|u_m(t_m)\|_{1,p} < \lambda_0$, el cual es una contradicción con (4.9). Por tanto se cumple (4.8).

Por (4.8) se tienen $g\left(\|u_m(t)\|_{1,p}\right) \geq 0$ y

$$\|u_m(t)\|_{1,p}^p \leq \left(\frac{\sigma}{pC_0 B_0^\sigma}\right)^{\frac{p}{\sigma - p}} \tag{4.11}$$

Por las hipótesis $(H1) - (H2)$, (4.4) y (4.11), de (4.7) se obtiene

$$\|u_m(t)\|_{1,p}^p + \int_0^t |u_m'(s)|_2^2 ds + \int_0^t \|u_m'(s)\|^2 ds \leq C_7, \ \ \forall t \in [0, T], \tag{4.12}$$

donde C_7 es una constante positiva independiente de t y m.

Por el Lema 2.2 y (4.12), resulta

$$\|-\Delta_p u_m(t)\|_{-1,q} \leq C_8, \ \ \forall t \in [0, T], \tag{4.13}$$

donde $p^{-1} + q^{-1} = 1$ y C_8 es una constante positiva independiente de t y m.

De aquí el resto es similar como en la demostración del Teorema 3.1. Con todo esto se concluye la demostración del Teorema 4.1. ■

Usando argumentos similares que en la prueba del Teorema 4.1, se obtiene los siguientes dos teoremas.

Teorema 4.2. *Supongamos que las funciones α y f satisfacen las hipótesis* $(H1)$ y $(H3)$, *respectivamente, $\beta \equiv 0$, $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p < \sigma$ y que satisfacen*

$$\|u_0\|_{1,p} < \lambda_0 \ \text{ y } \ \gamma < E_0.$$

Entonces para cada $T > 0$ el problema (1.1) admite una solución u sobre $[0, T]$ tal que

$$u \in L^\infty\left(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)\right) \ \text{ y } \ u' \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right).$$

Teorema 4.3. *Supongamos que las funciones βy f satisfacen las hipótesis* $(H2)$ y $(H3)$, *respectivamente, $\alpha \equiv 0$, $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p < \sigma$ y que satisfacen*

$$\|u_0\|_{1,p} < \lambda_0 \ \text{ y } \ \gamma < E_0.$$

Entonces para cada $T > 0$ el problema (1.1) admite una solución u sobre $[0, T]$ tal que

$$u \in L^\infty\left(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)\right) \ \text{ y } \ u' \in L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right).$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Gao, H. and Ma, T. F., *Global solutions for a nonlinear wave equation with the p–laplacian operator*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 11 (1999), 1-13.

[2] Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A. and Uralceva, N. N., *Linear and Quasilinear Parabolic Equations*, "Nauka", Moscow, 1967; English transl., Trans. Math. Monographs, 23, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1968.

[3] Levine, H. A., *Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$*, Arch. Rational Mech. Anal., 51 (1973), 371-386.

[4] Lions, J. L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris (1969).

[5] Messaoudi, S. A., *A note on blow up of solutions of a quasilinear heat equation with vanishing initial energy*, Math. Nachr., J. Math. Anal. Appl. 273 (2002), 243-247.

[6] Quispe Méndez, T., *Solución local para una ecuación del calor degenerada no lineal*, Pesquimat Revista de la F. C. M. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos Vol. XI, No. 2, pp. 56-70, Lima-Perú. Octubre 2008.

[7] Rincon, M. A., Limaco, J. and Liu, I-S., *Existence and uniqueness of solutions of a nonlinear heat equation*, Tend. Mat. Apl. Comput., 6 (2005) (2), 273-284.

[8] Samarskii, A.A., Galaktionov, V.A., Kurdyumov, S.P. y Mikhailov, A.P. *Blow–up in problems for quasilinear parabolic equations.* Nauka, Moscow, 1987 (in Russian). English transl.: Walter de Gruyter, Berlin, 1995.

[9] Tan, Z., *The reaction–diffusion equation with Lewis function and critical Sobolev exponent,* J. Math. Anal. Appl., 272 (2002) (2), 480-495.

[10] Tartar, L., *Topics in nonlinear analysis,* Publications Mathématiques D'Orsay, Université de Paris-Sud, Orsay 1978.

[11] Tsutsumi, M., *Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 8 (1972/73), 211-229

[12] Zhou, Y., *Global nonexistence for a quasilinear evolution equation with a generalized Lewis function*, J. Anal. Appl., 24 (2005) (1),179-187.