PESQUIMAT , Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XII N°1, pp. 61-63, Lima - Perú, Julio 2009

FUNCIONES DE PESO

Nancy Moya Lázaro[**]

Resumen: En este artículo, presentamos un estudio analítico de una clase de pesos, damos algunas propiedades y formulamos algunas estimaciones de estos.
Palabras clave: Funciones peso, Espacios de Sobolev con peso

WEIGHT FUNCTION

Abstract: In this paper we show an analytic study of a weight class, give some properties and we formulate some estimations of this.
Key words: Weight function, Weighted Sobolev spaces

1. Introducción

En este artículo hacemos un estudio analítico de una clase de pesos y damos algunas propiedades de los mismos. Presentamos ejemplos importantes de pesos e introducimos una amplia clase de pesos $R_{\rho_1,\ldots,\rho_k}$ y formulamos algunas estimaciones de estos.
En la Sección § 2, definimos la clase de funciones peso $R_{\rho_1,\ldots,\rho_k}$, para algunas constantes $\rho_1,\ldots,\rho_k$ positivas, los cuales son definidos como pesos que pertenecen a $C^k(I\!R^N,(0,\infty))$ y para $x \in I\!R^N$, $|\alpha| = r$, con $1 \le r \le k$, satisfacen la siguiente desigualdad

$$|D^\alpha \rho(x)| \le \rho_r \rho(x),\ x \in I\!R^N.$$

Probamos que si ρ está en la clase R_{ρ_1,ρ_2} entonces su reescalamiento definido por $\rho_\epsilon(x) := \rho(\epsilon x)$, también está en la clase $R_{\epsilon\rho_1,\epsilon^2\rho_2}$. Asimismo, los pesos de esta clase verifican estimaciones del tipo $\rho(x) \le \rho(x-y)e^{\sqrt{N}\rho_1|y|}$, $x,y \in I\!R^N$. En particular, si $x = y$, tenemos que $\rho(x) \le e^{C|x|}\rho(0)$, donde $C = \sqrt{N}\rho_1$. Esto significa que los pesos de la clase R_{ρ_1,ρ_2} tienen a lo más un crecimiento exponencial en el infinito.

2. Funciones Peso

Una función $\rho : I\!R^N \to (0,\infty)$ continua y estrictamente positiva sera denominada función peso.

Definición 2.1. *Diremos que una función peso $\rho : I\!R^N \to (0,\ \infty)$ es una función de la clase $R_{\rho_1,\ldots,\rho_k}$, con $k \in \mathbb{N}$ si:*
(i) $\rho \in C^{(k)}(I\!R^N)$
(ii) $|D^\alpha \rho(x)| \le \rho_r \rho(x)$, *para* $x \in I\!R^N$, $|\alpha| = r$, *con* $1 \le r \le k$, *y para ciertas constantes positivas* ρ_r.

En particular, se dirá que ρ está en la clase R_∞ si se verifica la Definición 2.1 para todo $k \in \mathbb{N}$.

[**]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: nanesp@yahoo.com

Lema 2.1. *Sea ρ un peso de la clase R_{ρ_1,ρ_2}. Entonces se tiene:*
(i) $\rho_\epsilon(x) := \rho(\epsilon x)$ es un peso de la clase $R_{\epsilon\rho_1,\epsilon^2\rho_2}$.
(ii) $\rho(x) \leq \rho(x-y)e^{\sqrt{N}\rho_1|y|}$, x, $y \in \mathbb{R}^N$.

Demostración. (i)es inmediato.
(ii) Observemos que si $\rho \in R_{\rho_1,\rho_2}$, para cada $x, y \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$, se tiene:

$$\frac{|\nabla\rho(x-yt)|}{\rho(x-yt)} \leq \sqrt{N}\rho_1.$$

Por otra parte, para $x, y \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$, $z = x - yt$

$$|\partial_t[\ln\rho(x-y+yt)]| = \frac{|\partial_z\rho(z).y|}{|\rho(x-y+yt)|} = \frac{|\nabla\rho(x-y+yt)||y|}{\rho(x-y+yt)} \leq \sqrt{N}\rho_1|y|.$$

Una simple integración con respecto de t de 0 a 1 en la desigualdad anterior implica la estimación,

$$\rho(x) \leq \rho(x-y)e^{\sqrt{N}\rho_1|y|}, \quad x, \ y \in \mathbb{R}^N.$$

■

Observación 2.1. *En particular si $x = y$, tenemos que $\rho(x) \leq e^{C|x|}\rho(0)$, donde $C = \sqrt{N}\rho_1$. Es decir los pesos de la clase R_{ρ_1,ρ_2} tienen a lo más un crecimiento exponencial en el infinito.*

Ejemplos importantes

Ejemplo 2.1. *i) El peso $\rho(x) := (1+|x|^2)^\gamma$, $x \in \mathbb{R}^N$, $\gamma \in \mathbb{R}$, pertenece a la clase $R = R_{\rho_1,\rho_2}$ con $\rho_1 = 2|\gamma|$, $\rho_2 = 4|\gamma||\gamma-1| + 2|\gamma|$.□*
ii) Sea $\rho(x)$ un peso de $C^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $\rho(x) = e^{\gamma|x|}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ para todo $|x| \geq 1$ entonces $\rho(x)$ está en la clase R_{ρ_1,ρ_2}, para ciertos ρ_1, ρ_2 que dependen de γ.□

Además estos pesos verifican las siguientes desigualdades, que son muy útiles en el estudio de las propiedades de regularización de la solución de la ecuación del calor ver en [1], que formulamos en el siguiente lema

Lema 2.2. *(i) Para todo $\rho \in R_{\rho_1,\rho_2}$, $\frac{\rho(x)}{\rho(y)} \leq e^{\sqrt{N}\rho_1|x-y|}$.*
(ii) Si $\rho(x) = (1+|x|^2)^\gamma$, con $\gamma \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\frac{\rho(x)}{\rho(y)} \leq C(\gamma)(1+|x-y|^2)^{|\gamma|} \tag{2.1}$$

y la siguiente condición de integrabilidad en $\mathbb{R}^N$

$$\int_{\mathbb{R}^N}(1+|x|^2)^\gamma\,dx < \infty \text{ si y sólo si } \gamma < \frac{-N}{2}. \tag{2.2}$$

(iii) Si $\rho \in C^2(\mathbb{R}^N)$, tal que $\rho(x) = e^{\gamma|x|}$ si $|x| \geq 1$, con $\gamma \in \mathbb{R}$, entonces satisface,

$$\frac{\rho(x)}{\rho(y)} \leq Ce^{|\gamma||x-y|} \text{ para cada } x, y \in \mathbb{R}^N$$

y es integrable si $\gamma < 0$.

Demostración. (i) Es consecuencia inmediata del Lema 2.1 (ii).

(ii) Probar (2.1) es equivalente a probar que $\rho(x)\rho(z) \leq C\rho(x+z)$, para cada $x, z \in I\!R^N$, si $\gamma < 0$ y que $\rho(x)\rho(z) \geq C\rho(x+z)$, para cada $x, z \in I\!R^N$, si $\gamma > 0$.

Para ambos casos, por la naturaleza de la función $\rho(x)$ y el signo de γ, sera suficiente verificar una desigualdad del tipo $(1+|x+z|^2) < C(1+|x|^2)(1+|z|^2)$ para cada $x, z \in I\!R^N$. En efecto, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$1+|x+z|^2 \leq 2(1+|x|^2)(1+|z|^2). \tag{2.3}$$

De (2.3), si $\gamma < 0$ se tiene $[(1+|x|^2)(1+|z|^2)]^\gamma \leq (\frac{1}{2})^\gamma(1+|x+z|^2)^\gamma$ y si $\gamma > 0$ entonces se tiene $(1+|x+z|^2)^\gamma \leq 2^\gamma[(1+|x|^2)(1+|z|^2)]^\gamma$. De ambos casos se sigue la parte (ii) del Lema. La condición (2.2) se deduce del uso de coordenadas polares.

(iii) Es una consecuencia de la estructura de ρ y del hecho que es de clase $C^2(I\!R^N)$. En la prueba, consideramos cuatro casos, si $x, y \in B(0,1)$; para, $|x| > 1$, $|y| > 1$, en el caso que $|x| > 1$ e $y \in B(0,1)$, y finalmente si $x \in B(0,1)$ e $|y| > 1$. ■

Ahora, presentamos el siguiente lema, que será útil en el estudio de las relaciones entre los espacios de Sobolev con peso y sin peso.

Lema 2.3. *Si $\rho \in R = R_{\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n}$ entonces*

$$|D^\alpha \rho^w(x)| \leq C\rho^w(x), \text{ para cada } |\alpha| \leq n, \; w \in I\!R.$$

donde $C = C(n, w, \rho_1, \rho_2, \ldots., \rho_n)$. En particular, $\forall w \in I\!R$, $\rho^w \in R_{\hat\rho_1,\ldots,\hat\rho_n}$ con $\hat\rho_1 = \ldots = \hat\rho_n = C$, y si $w \in (0,1)$ entonces $\hat\rho_i$ se puede tomar independiente de w.

La prueba la hacemos por inducción sobre el orden.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Comportamiento Asintótico de Soluciones de Ecuaciones de Evolución Ph.D. Thesis, Universidad Complutense de Madrid. (2004).