PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XII N°2, pp. 32-50, Lima - Perú, Agosto 2009

ALGUNAS OBSERVACIONES SOBRE EL CONCEPTO DE FOLICACIÓN ANALÍTICA

Renato Benazic Tomé[1]

Resumen: En la primera parte del presente trabajo damos tres definiciones equivalentes del concepto de foliación de dimensión k sobre una variedad analítica compleja. A continuación, brindamos una cuarta definición equivalente para foliaciones de dimensión uno, usando el concepto de campo vectorial holomorfo.
Palabras clave: Foliaciones analíticas complejas. Variedades diferenciables analíticas. Foliaciones por curvas.

Some observations on the concept of analytic foliation

Abstract: In the first part of this paper we give three definitions equivalent of the concept of k-dimensional foliation on a complex analytic manifold. Below, we provide one quarter equivalent definition for foliations of dimension one, using the concept of holomorphic vector field.
Key words: Complex analytic foliations. Differentiable analytical manifold. Foliations by curves.

1. Variedades Analíticas Complejas

El objetivo de esta sección es introducir el concepto de variedad analítica compleja y establecer algunos resultados relevantes concernientes a ella. Para el caso de variedades reales el lector puede consultar los textos [9], [8] y [5]. Buenas referencias para variedades complejas son los libros [10], [6]y [7].

Una *variedad analítica compleja de dimensión n* es un par $(X, \mathcal{A})$ en donde X es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable y $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ es una colección de homeomorfismos

$$\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$$

en donde U_i es un abierto de X y V_i es un abierto de $\mathbb{C}^n$, que satisfacen las dos condiciones siguientes:

1. $X = \bigcup_{i\in I} U_i$.

2. Si $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j) \in \mathcal{A}$ son tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ es un biholomorfismo.

[1]Universidad Nacional Mayor de San Marcos - Facultad de Ciencias Matemáticas, Instituto de Matemática y Ciencias Afines - IMCA, e-mail: benazic@imca.edu.pe

La colección $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ es llamada *atlas analítico de dimensión n* y sus elementos (U_i, φ_i) son llamados *cartas locales.* Los biholomorfismos $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ son llamados *cambios de coordenadas.* Una variedad analítica compleja de dimensión 1 es llamada *superficie de Riemann*

En muchas ocaciones es más conveniente definir una variedad por una colección de inyecciones. En efecto, sea X un conjunto no vacío y suponga que existe $\mathcal{F} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ una familia de funciones inyectivas $\varphi_\alpha : U_\alpha \subseteq X \to \mathbb{C}^n$ que satisfacen las siguientes condiciones:

1. Para todo $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{F}$ el conjunto $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n$ es una abierto de $\mathbb{C}^n$.
2. $X = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$.
3. Si $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{F}$ son tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son abiertos de $\mathbb{C}^n$ y la composición $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es de clase C^k.

En éstas condiciones, se puede demostrar (ver [9]) que existe una única topología $\tau_{\mathcal{F}}$ sobre X que torna a la familia $\mathcal{F}$ un atlas analítico de dimensión n para X. Sin embargo, es necesario indicar que se pueden construir ejemplos en los cuales se muestran que esta topología $\tau_{\mathcal{F}}$ no necesariamente es Hausdorff ni tiene base numerable (ver [9]). Para que estas dos condiciones sean satisfechas, es necesario añadir a la familia de inyecciones $\mathcal{F}$ dos propiedades adicionales:

4. Para cualesquier $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{F}$ con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ no existe ninguna sucesión $(x_n) \subseteq \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ tal que $x_n \to x \in \varphi_\alpha(U_\alpha - U_\beta)$ y $\left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\right)(x_n) \to y \in \varphi_\beta(U_\beta - U_\alpha)$.
5. El cubrimiento $\{U_\alpha\}_\alpha$ de X admite un subcubrimiento numerable de X.

Se puede demostrar que 4. es una condición necesaria y suficiente para que $\tau(\mathcal{F})$ sea Hausdorff y que 5. es una condición necesaria y suficiente para que $\tau(\mathcal{F})$ tenga base numerable (ver [9]).

Sean $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ dos variedades analíticas complejas de dimensiones m y n respectivamente y $f : X \to Y$ un mapeo continuo. Decimos que f es *analítico* en $p \in X$ si y sólo si existen $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ con $p \in U$ y $f(U) \subseteq V$ tales que el mapeo $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{C}^m \to \psi(V) \subseteq \mathbb{C}^n$ es analítico en $\varphi(p)$. No es difícil demostrar que esta definición es independiente de la elección de las cartas en X e Y.

Decimos que f es *analítico* en X si y sólo si f es analítico en cada punto de X. Llamamos a f un *biholomorfismo* si y sólo si f es biyectiva, holomorfa y su inversa $f^{-1} : Y \to X$ también es holomorfa. Denotaremos por $\mathrm{Bihol}\,(X, Y)$ al conjunto de todos los biholomorfismos de X en Y.

Sea $(X, \mathcal{A})$ una variedad compleja de dimensión m, sea $p \in X$, consideremos $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ tal que $p \in U$ y denotemos por $z = (z_1, \ldots, z_m)$ las coordenadas complejas de $\varphi(U) \subseteq \mathbb{C}^m$. El *espacio tangente holomorfo* de X en el punto p, al cual denotaremos por $T_p(X)$, es por definición, el $\mathbb{C}$-espacio vectorial 3generado por $\dfrac{\partial}{\partial z_1}(p), \ldots, \dfrac{\partial}{\partial z_m}(p)$, es decir

$$T_p(X) = \mathcal{L}_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial z_m}(p) \right\}$$

Observe que $T_p(X)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión m.

Sean $(X^m, \mathcal{A})$, $(Y^n, \mathcal{B})$ dos variedades analíticas complejas de dimensiones m y n respectivamente y $f : X \to Y$ un mapeo analítico en X. Sabemos que dado $p \in X$, para cualquier par de cartas $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ y $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ con $p \in U$ y $f(U) \subseteq V$, se tiene que el mapeo

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{C}^m \to \psi(V) \subseteq \mathbb{C}^n$$

es holomorfo en $\varphi(p)$. La *derivada de f en p*, denotada por $f'(p)$ se define como

$$f'(p) = \left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)'(\varphi(p))$$

Se puede demostrar que $f'(p)$ es una transformación lineal de $T_p(X)$ en $T_{f(p)}(Y)$.

Decimos que f es una *inmersión analítica* (resp. *sumersión analítica*) si y sólo si f es analítica y $f'(p) : T_p(X) \to T_{f(p)}(Y)$ es inyectiva (resp. sobreyectiva), para todo $p \in X$. Una inmersión analítica $f : X \to Y$ que es un homeomorfismo sobre su imagen $f(X) \subseteq Y$ es llamada *mergullo analítico*.

Sea $(X, \mathcal{A})$ una variedad analítica y $S \subseteq X$, decimos que S es una *subvariedad analítica de X de dimensión s* si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. S tiene la topología inducida por X.
2. Existe $\mathcal{A}(S)$ atlas analítico complejo de dimensión s sobre S.
3. La inclusión canónica $i : (S, \mathcal{A}(S)) \to (X, \mathcal{A})$ es un mergullo analítico.

En particular se tiene que si $f : (X^m, \mathcal{A}) \to (Y^n, \mathcal{B})$ es un mergullo analítico entonces $f(X)$ es una subvariedad de Y de dimensión m. Debemos advertir que si $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ es solamente una inmersión analítica, entonces $f(X)$ no necesariamente es una subvariedad de Y. En este caso decimos que $f(X)$ esta *inmersa en Y*.

En el caso que $f : (X^m, \mathcal{A}) \to (Y^n, \mathcal{B})$ es una sumersión y $q \in Y$ entonces $f^{-1}(q)$ es una subvariedad de X de dimensión $m-n$. Más aún, se puede demostrar que $T_p\left(f^{-1}(q)\right) = \mathrm{Nu}\left(f'(p)\right)$, $\forall\, p \in f^{-1}(q)$.

2. Foliaciones holomorfas

En esta sección, vamos a introducir el concepto de foliación analítica compleja el cual es una generalización del concepto clásico de foliación ideado por C. Eresmanh y G. Reb en los años 1950, el cual fue dado para variedades reales. Al lector interesado en estudiar las foliaciones en variedades reales, recomendamos los libros [3], [4] y [1].

Informalmente hablando, una foliación de dimensión k sobre una variedad analítica compleja M^m, es una descomposición de M en una colección de variedades analíticas complejas de dimensión k inmersas biunívocamente en M.

Definición 2.1. *Sea $(M^m, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja. Una* foliación analítica de dimensión k *$(1 \leq k \leq m-1)$ de M es una colección $\mathcal{F}$ de variedades analíticas complejas, todas conexas de dimensión k e inmersas biunívocamente en M, que satisface las siguientes propiedades:*

1. *$M = \biguplus_{L \in \mathcal{F}} L$. ($\biguplus$ significa unión disjunta).*
2. *Dado $p \in M$, existe $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ con $p \in U$ tal que $\varphi(U) = \Delta^k \times \Delta^{m-k}$ (en donde Δ^k denota un polidisco abierto de $\mathbb{C}^k$).*
3. *Si $L \in \mathcal{F}$ y $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ son tales que $L \cap U \neq \emptyset$ entonces*

$$L \cap U = \biguplus_{z'' \in D_{L,U}} \varphi^{-1}\left(\Delta^k \times \{z''\}\right)$$

en donde $D_{L,U} \subseteq \Delta^{m-k}$ es un conjunto a lo más numerable.

Observaciones:

1. El número $m - k$ es llamado *codimensión de* $\mathcal{F}$.

2. Los elementos de $\mathcal{F}$ son llamados *hojas de la foliación*.

3. Si $p \in M$ entonces existe una única $L_p \in \mathcal{F}$ tal que $p \in L_p$. L_p es llamada *hoja de* $\mathcal{F}$ *que pasa por* p.

4. Si $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ es tal que $\varphi(U) = \Delta^k \times \Delta^{m-k}$, entonces (U, φ) es llamada *carta trivializadora* (o *distinguida*) de $\mathcal{F}$.

5. Si $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ es una carta trivializadora y $z'' \in \Delta^{m-k}$ entonces el conjunto $\varphi^{-1}\left(\Delta^k \times \{z''\}\right)$ es llamado *placa de* U (o *placa de* $\mathcal{F}$).

6. Si consideramos la inclusión $i : \Delta^k \longrightarrow \Delta^k \times \Delta^{m-k}$ definida por $i(z') = (z', z'')$, se tiene que i es un mergullo analítico, en consecuencia $\varphi^{-1} \circ i : \Delta^k \longrightarrow U$ también lo es y se sigue que las placas de U son subvariedades analíticas, conexas de M de dimensión k. Es claro que si P y Q son placas de U entonces o bien $P = Q$ o bien $P \cap Q = \emptyset$.

7. Las foliaciones de dimensión 1 son llamadas *foliaciones por curvas*.

Ejemplo 2.1. *Consideremos* $\mathbb{C}^m$ *y* $1 \leq k \leq m - 1$. *La familia*

$$\mathcal{F} = \left\{\mathbb{C}^k \times \{z''\};\ z'' \in \mathbb{C}^{m-k}\right\}$$

es una foliación analítica de dimensión k *de* $\mathbb{C}^m$. *Observe que en este caso las hojas* $\mathbb{C}^k \times \{z''\}$ *son subvariedades de* $\mathbb{C}^m$.

Vamos a dar definiciones equivalentes del concepto de foliación. En primer lugar, observamos que las cartas trivializadoras de $\mathcal{F}$ forman un atlas muy especial de M. En efecto, sea $p \in M$ entonces existe $(U_p, \varphi_p) \in \mathcal{A}$ tal que $p \in U_p$ y $\varphi_p(U_p) = \Delta^k \times \Delta^{m-k}$. Consideremos la colección de todas las cartas trivializadoras $\mathcal{A}' = \{(U_p, \varphi_p)\}_{p \in M}$. Es claro que $M = \bigcup\limits_{p \in M} U_p$.

Sean $(U_p, \varphi_p), (U_q, \varphi_q) \in \mathcal{A}'$ tales que $U_p \cap U_q \neq \emptyset$ y consideremos el cambio de coordenadas

$$F = \varphi_q \circ \varphi_p^{-1} : \varphi_p(U_p \cap U_q) \subseteq \Delta^k \times \Delta^{m-k} \longrightarrow \varphi_q(U_p \cap U_q) \subseteq \Delta^k \times \Delta^{m-k}$$

el cual viene dado por

$$F(z', z'') = (h(z', z''), g(z', z'')) = (w', w'')$$

Sabemos que F es un biholomorfismo. Nos proponemos demostrar que g no depende de z'.

Sea $(z_0', z_0'') \in \varphi_p(U_p \cap U_q) \subseteq \Delta^k \times \Delta^{m-k}$, observe que $\varphi_p^{-1}\left(\Delta^k \times \{z_0''\}\right)$ es una placa de U_p la cual esta contenida en una hoja $L \in \mathcal{F}$. Por otro lado

$$L \cap U_q = \biguplus_{w'' \in D_{L,q}} \varphi_q^{-1}\left(\Delta^k \times \{w''\}\right)$$

en donde $D_{L,q} \subseteq \Delta^{m-k}$ es a lo más numerable. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\varphi_q \circ \varphi_p^{-1}\left(\left(\Delta^k \times \{z_0''\}\right) \cap \varphi_p(U_p \cap U_q)\right) &= \varphi_q\left(\varphi_p^{-1}\left(\Delta^k \times \{z_0''\}\right) \cap U_p \cap U_q\right) \subseteq \varphi_q\left(L \cap U_p \cap U_q\right) \\
&= \varphi_q\left(\left(\biguplus_{w'' \in D_{L,q}} \varphi_q^{-1}\left(\Delta^k \times \{w''\}\right)\right) \cap U_p \cap U_q\right) \\
&= \biguplus_{w'' \in D_{L,q}} \left(\Delta^k \times \{w''\}\right) \cap \varphi_q(U_p \cap U_q)
\end{aligned}$$

De donde se sigue que

$$g\left(\left(\Delta^k \times \{z_0''\}\right) \cap \varphi_p(U_p \cap U_q)\right) \subseteq \biguplus_{w'' \in D_{L,q}} \{w''\}$$

Como $(z_0', z_0'') \in \left(\Delta^k \times \{z_0''\}\right) \cap \varphi_p(U_p \cap U_q)$ entonces existe $w_0'' \in D_{L,q}$ tal que $g(z_0', z_0'') = w_0''$

Sea V la componente conexa de $\varphi_p(U_p \cap U_q)$ que contiene a (z_0', z_0''). Por la continuidad de g se tiene que $g(z', z_0'') = w_0''$, $\forall\ (z', z_0'') \in V \cap \left(\Delta^k \times \{z_0''\}\right)$ y esto demuestra nuestra aseveración.

Lo anterior nos motiva a dar la siguiente definición alternativa del concepto de foliación.

Definición 2.2. *Sea $(M^m, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja. Una* foliación analítica de dimensión k (o codimensión $m-k$) en M *es una familia $\mathcal{A}' = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\} \subseteq \mathcal{A}$ que satisface las tres condiciones siguientes:*

1. $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$.
2. *Si $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}'$ entonces $\varphi_\alpha(U_\alpha) = \Delta_\alpha^k \times \Delta_\alpha^{m-k}$, $\forall\ \alpha$.*
3. *Si $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}'$ son tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces el cambio de coordenadas*

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

viene dado por

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(z', z'') = (h_{\alpha\beta}(z', z''), g_{\alpha\beta}(z'')), \quad \forall\ (z', z'') \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{m-k}$$

Observación: La condición 3 establece que los cambios de coordenadas llevan conjuntos de la forma $\Delta^k \times \{z''\}$ (donde $z'' \in \Delta^{m-k}$) en conjuntos $\Delta^k \times \{w''\}$ (donde $w'' \in \Delta^{m-k}$).

De acuerdo a lo realizado anteriormente, sabemos que la Definición 2.1 implica la Definición 2.2. Vamos a demostrar que el recíproco también es cierto.

Sea $\mathcal{A}'$ una foliación analítica de dimensión k sobre $(M^m, \mathcal{A})$ $(0 < k < m)$ y sea $(U, \varphi) \in \mathcal{A}'$, entonces $\varphi(U) = \Delta^k \times \Delta^{m-k}$. Fijando un $z'' \in \Delta^{m-k}$, el conjunto $\varphi^{-1}\left(\Delta^k \times \{z''\}\right) \subseteq U$ es llamado *placa de U*. Como en el caso de la definición anterior, se sigue que las placas de U son subvariedades analíticas, conexas de M de dimensión k y que si P y Q son placas de U entonces o bien $P = Q$ o bien $P \cap Q = \emptyset$.

A continuación, probaremos que las placas pueden ser "coladas" formando variedades complejas analíticas disjuntas, todas de dimensión k e inmersas biunívocamente en M. En efecto, en primer lugar definimos la siguiente relación en M: dados $p, q \in M$, decimos que $p \sim q$ si y sólo si existe una colección finita $P_1, \ldots, P_r$ de placas (donde $r = r(p, q)$) tales que $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ $(1 \leq i \leq r-1)$, $p \in P_1$ y $q \in P_r$.

No es difícil probar que "$\sim$" es una relación de equivalencia en M, luego podemos considerar el conjunto cociente $\mathcal{F} = M/\sim$, sus elementos (clases de equivalencia) son llamadas *hojas de la foliación*. Observe que $M = \biguplus_{L\in\mathcal{F}} L$. Si demostramos que cada $L \in \mathcal{F}$ es una variedad analítica compleja de dimensión k inmersa biunívocamente en M, se estaría cumpliendo las partes 1 y 2 de la Definición 2.1.

Sea $L \in \mathcal{F}$, vamos a probar que L tiene estructura de variedad analítica compleja de dimensión k. Dado $p \in L$, existe $(U, \varphi) \in \mathcal{A}'$ tal que $p \in U$ y $\varphi : U \to \Delta^k \times \Delta^{m-k}$. Consideremos $z'' \in \Delta^{m-k}$ tal que $p \in P = \varphi^{-1}\left(\Delta^k \times \{z''\}\right)$.

Si $\pi : \Delta^k \times \{z''\} \to \Delta^k$ es la proyección sobre las primeras k coordenadas, definimos la función $\bar\varphi : P \to \mathbb{C}^k$ como $\bar\varphi = \pi \circ \left(\varphi|_P\right)$. Se sigue que $\bar\varphi$ es un homeomorfismo de P sobre Δ^k.

Consideremos la familia de biyecciones $\mathcal{B} = \{(P_p, \bar\varphi_p)\}_{p\in L}$, es claro que $\bigcup_{p\in L} P_p = L$ y que $\bar\varphi_p(P_p) = \Delta^k$ es un abierto de $\mathbb{C}^k$.

Sean $(P, \bar\varphi), (Q, \bar\psi) \in \mathcal{B}$ tales que $P \cap Q \neq \emptyset$, vamos a demostrar que $\bar\varphi(P\cap Q)$, $\bar\psi(P \cap Q)$ son abiertos de $\mathbb{C}^k$ y que $\bar\psi \circ \bar\varphi^{-1} : \bar\varphi(P \cap Q) \to \bar\psi(P\cap Q)$ es un biholomorfismo.

Sean $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}'$ tales que $P = \varphi^{-1}\left(\Delta^k \times \{z_0''\}\right) \subseteq U$ y $Q = \psi^{-1}\left(\Delta^k \times \{w_0''\}\right) \subseteq V$. Por la condición 3 de la Definición 2.2 se tiene que el cambio de coordenadas $\psi\circ\varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ es de la forma

$$\psi \circ \varphi^{-1}(z', z'') = (h_1(z', z''), h_2(z'')) \quad \text{en } \varphi(U \cap V)$$

luego

$$\psi \circ \varphi^{-1}(z', z_0'') = (h_1(z', z_0''), h_2(z_0'')) = (h_1(z', z_0''), w_0''), \quad \text{en } \varphi(P \cap V)$$

Por otro lado

$$\psi(Q \cap U) = \psi(Q \cap U \cap V) = \psi(U \cap V) \cap \left(\Delta^k \times \{w_0''\}\right)$$

análogamente

$$\varphi(P \cap V) = \varphi(U \cap V) \cap \left(\Delta^k \times \{z_0''\}\right)$$

luego

$$\begin{aligned} \varphi(Q \cap U) &= \varphi \circ \psi^{-1}\left(\psi(Q \cap U)\right) = \varphi \circ \psi^{-1}\left(\psi(U \cap V) \cap \left(\Delta^k \times \{w_0''\}\right)\right) \subseteq \varphi(U \cap V) \cap \left(\Delta^k \times \{z_0''\}\right) \\ &= \varphi(P \cap V) \end{aligned}$$

lo cual implica que $Q \cap U \subseteq P \cap V$.

Análogamente $P \cap V \subseteq Q \cap U$. Se sigue entonces que $P \cap V = Q \cap U$, lo cual implica que

$$P \cap Q = P \cap U \cap Q = P \cap V$$

por tanto $P \cap Q$ es un abierto de P y como $\bar\varphi$ es un homeomorfismo, tenemos que $\bar\varphi(P \cap Q)$ es un abierto de Δ^k y por tanto de $\mathbb{C}^k$. Análogamente se prueba que $\bar\psi(P \cap Q)$ es un abierto de $\mathbb{C}^k$.

Para probar que $\bar\psi \circ \bar\varphi^{-1} : \bar\varphi(P \cap Q) \to \bar\psi(P \cap Q)$ es un biholomorfismo, dado $z' \in \bar\varphi(P \cap V) = \pi(\varphi(P \cap V))$, tenemos

$$\begin{aligned} \bar\psi \circ \bar\varphi^{-1}(z') &= \pi \circ \left(\psi\Big|_Q\right) \circ \left(\varphi\Big|_P\right)^{-1} \circ i(z') = \pi \circ \left(\psi\Big|_Q\right) \circ \left(\varphi\Big|_P\right)^{-1}(z', z_0'') \\ &= \pi\left(h_1(z', z_0''), w_0''\right) = h_1(z', z_0'') = (h_1 \circ i)(z') \end{aligned}$$

luego $\bar\psi \circ \bar\varphi^{-1}$ es analítica. Análogamente se prueba que $\bar\varphi \circ \bar\psi^{-1}$ es analítica.

De esta manera, por lo visto en la sección anterior, existe una única topología $\tau(\mathcal{B})$ sobre L que torna $\mathcal{B}$ un atlas analítico complejo de dimensión k.

Vamos a demostrar que $\tau(\mathcal{B})$ es Hausdorff, para ello usaremos el criterio dado la sección anterior (ver condición 4). Sean $(P,\bar{\varphi}),(Q,\bar{\psi}) \in \mathcal{B}$ con $P\cap Q \neq \emptyset$ y supongamos que existe $(z_n') \subseteq \bar{\varphi}(P\cap Q)$ tal que $z_n' \to z' \in \bar{\varphi}(P-Q)$ y $\bar{\psi}\bar{\varphi}^{-1}(z_n') \to w' \in \bar{\psi}(Q-P)$ (Hip. Aux.)

Sean $(U,\varphi),(V,\psi) \in \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ y $z_0'', w_0'' \in \Delta^{m-k}$ tales que $P = \varphi^{-1}\left(\Delta^k \times \{z_0''\}\right) \subseteq U$ y $Q = \psi^{-1}\left(\Delta^k \times \{w_0''\}\right) \subseteq V$. Se tiene que la sucesión $\{(z_n', z_0'')\} \subseteq \varphi(P\cap Q)$ es convergente y $(z_n', z_0'') \to (z', z_0'') \in \varphi(P-Q)$, luego

$$\psi\varphi^{-1}(z_n', z_0'') \to \psi\varphi^{-1}(z', z_0'') \in \psi(P-Q) \tag{1}$$

Por otro lado se tiene que

$$\left(\bar{\psi}\bar{\varphi}^{-1}(z_n'), w_0''\right) \to (w', w_0'') \in \psi(Q-P) \tag{2}$$

Pero

$$\psi\varphi^{-1}(z_n', z_0'') = (h_1(z_n', z_0''), h_2(z_0'')) = \left(\bar{\psi}\bar{\varphi}^{-1}(z_n'), w_0''\right)$$

Reemplazando en (5.32) se tiene que

$$\psi\varphi^{-1}(z_n', z_0'') \to (w', w_0'') \in \psi(Q-P)$$

lo cual contradice (5.31).

Usaremos la condición 5. de la sección anterior para probar que la topología $\tau(\mathcal{B})$ tiene base numerable. En primer lugar, como M es variedad, podemos suponer que $\mathcal{A}$ (y por tanto $\mathcal{A}'$) es numerable, por tanto es suficiente probar que $U\cap L$ es una colección numerable de placas, $\forall\ (U,\varphi) \in \mathcal{A}'$. (Observe que esto también probaría la condición 3 de la Definición 2.1.

Sea $\forall\ (U,\varphi) \in \mathcal{A}'$ tal que $L\cap U \neq \emptyset$ y consideremos

$$\mathcal{P}_U = \{P;\ \ P \text{ es placa y } P \subseteq U\cap L\}$$

Sea $P \in \mathcal{P}_U$ y fijemoos $p \in P$, dado $Q \in \mathcal{P}_U$, para cualquier $q \in Q \subseteq L$ sabemos que existe una colección finita de placas $P_1,\ldots,P_r$ tales que $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ y $P_1 = P$, $P_r = Q$. Tomando $r = r(Q) \in \mathbb{N}$ el mínimo natural con estas propiedades, podemos definir la función $r: \mathcal{P}_U \to \mathbb{N}$ que a cada $Q \in \mathcal{P}_U$ le hace corresponder $r(Q) \in \mathbb{N}$. Se sigue que r es inyectiva y por tanto $\mathcal{P}_U$ es a lo más numerable.

Como hay una colección numerable de abiertos U y fijado un U hay una colección numerable de placas P, se sigue que $\mathcal{B}$ es numerable y por tanto la topología $\tau(\mathcal{B})$ tiene base numerable.

De esta manera $(L,\mathcal{B})$ es una variedad analítica compleja de dimensión k.

Finalmente, probaremos que cada $L \in \mathcal{F}$ esta inmersa biunívocamente en M.

Consideremos la inclusión canónica $I: L \to M$ dada por $I(p) = p$ la cual es claramente inyectiva. Debemos probar que I es una inmersión analítica de L en M. Sea $(U,\varphi) \in \mathcal{A}'$ tal que $p \in U$, denotando $\varphi(p) = (z_0', z_0'')$, $P = \varphi^{-1}\left(\Delta^k \times \{z_0''\}\right)$, tenemos que $(P,\bar{\varphi}) \in \mathcal{B}$ es tal que $p \in P$. La expresión de I en estas cartas es:

$$\left(\varphi\circ I\circ\bar{\varphi}^{-1}\right)(z') = \left(\varphi\circ I\circ\left(\varphi\Big|_P\right)^{-1}\right)(z', z_0'') = (z', z_0''), \quad \forall\ z' \in \Delta^k$$

Se sigue que I es una inmersión analítica y por tanto hemos probado la equivalencia entre las dos definiciones.

Existe una tercera manera de definir el concepto de foliación, ella hace uso de sumersiones locales.

Definición 2.3. *Sea $(M^m, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja. Una* foliación analítica de codimensión k *sobre M es definida por una colección $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ que satisface las siguientes propiedades:*

1. *Cada $U_\alpha \subseteq M$ es un abierto y $M = \bigcup U_\alpha$.*
2. *$f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}^k$ es sumersión analítica, $\forall\ \alpha$.*
3. *Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces existe $\psi_{\alpha\beta} : f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ biholomorfismo local tal que $f_\alpha = \psi_{\alpha\beta} \circ f_\beta$ en $U_\alpha \cap U_\beta$*

Observación: Las funciones $f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}^k$ son llamadas *aplicaciones distinguidas* de la foliación.

Nos proponemos demostrar que esta nueva definición de foliación, es equivalente a las dos anteriores. Para ello, necesitamos del siguiente resultado, cuya demostración se encuentra en [3].

Lema 2.1. *Sea $(M^m, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja y $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ una foliación analítica de dimensión k en M. Existe un cubrimiento $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ por dominios de cartas trivializadoras $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}'$ tal que si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces existe $(U_\gamma, \varphi_\gamma) \in \mathcal{A}'$ tal que $U_\alpha \cup U_\beta \subseteq U_\gamma$.*

Sea $(M^m, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja y $\mathcal{F}$ una foliación analítica de codimensión k dada por $\mathcal{A}' = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\} \subseteq \mathcal{A}$ y tal que la colección de sus dominios $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ satisface la propiedad del Lema 2.1. Construiremos las aplicaciones distinguidas de la manera siguiente:

Sea $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}'$, se tiene que $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \Delta_\alpha^{m-k} \times \Delta_\alpha^k$. Consideremos la segunda proyección $\pi_2 : \Delta_\alpha^{m-k} \times \Delta_\alpha^k \longrightarrow \Delta_\alpha^k$ y definamos $f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \Delta_\alpha^k$ como $f_\alpha = \pi_2 \circ \varphi_\alpha$. Es claro que la colección $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ satisface las dos primeras condiciones de la Definición 2.3.

Sea $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, sabemos que el cambio de coordenadas

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \Delta_\alpha^{m-k} \times \Delta_\alpha^k \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \Delta_\beta^{m-k} \times \Delta_\beta^k$$

es de la forma

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(z', z'') = (h_{\alpha\beta}(z', z''), g_{\alpha\beta}(z'')), \quad \forall\ (z', z'') \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{3}$$

Sea $z_0'' \in f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \Delta_\alpha^{m-k}$ y denotemos $w_0'' = g_{\alpha\beta}(z_0'') \in f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \Delta_\beta^{m-k}$. Afirmo que

$$(g_{\alpha\beta} \circ \pi_2)(z', z_0'') = \left(\pi_2 \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\right)(z', z_0''), \quad \forall\ (z', z_0'') \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta).$$

En efecto, sean $P_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}\left(\Delta_\alpha^k \times \{z_0''\}\right) \subseteq U_\alpha$, $P_\beta = \varphi_\beta^{-1}\left(\Delta_\beta^k \times \{w_0''\}\right) \subseteq U_\beta$ y consideremos $(U_\gamma, \varphi_\gamma) \in \mathcal{A}'$ tal que $U_\alpha \cup U_\beta \subseteq U_\gamma$. Existe P_γ placa de U_γ tal que $P_\gamma \cap U_\alpha = P_\alpha$ y $P_\gamma \cap U_\beta = P_\beta$. Se sigue que

$$P_\alpha \cap U_\beta = P_\gamma \cap U_\alpha \cap U_\beta = U_\alpha \cap P_\beta \subseteq P_\beta$$

Como $(z', z_0'') \in \left(\Delta_\alpha^k \times \{z_0''\}\right) \cap \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, se tiene que

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(z', z_0'') \in \varphi_\alpha(P_\alpha \cap U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \varphi_\beta(P_\beta \cap U_\alpha) = \left(\Delta_\beta^k \times \{w_0''\}\right) \cap \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

luego

$$\left(\pi_2 \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\right)(z', z_0'') = g_{\alpha\beta}(z_0'') = (g_{\alpha\beta} \circ \pi_2)(z', z_0'')$$

lo que demuestra la afirmación.

De la afirmación anterior se sigue inmediatamente que $g_{\alpha\beta} : f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es analítica y satisface $f_\beta = g_{\alpha\beta} \circ f_\alpha$. Sólo falta demostrar que $g_{\alpha\beta}$ es un biholomorfismo local. Ahora bien, de (5.33), el biholomorfismo $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ tiene matriz jacobiana

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial z'} & \dfrac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial z''} \\ 0 & \dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial z''} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times m}$$

de donde se sigue que la matriz $\dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial z''}(z'') \in \mathbb{C}^{k\times k}$ tiene rango k y por tanto es inversible. Del teorema del mapeo inverso, se sigue que $g_{\alpha\beta}$ es un biholomorfismo local.

Recíprocamente, consideremos una familia $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ que satisface las condiciones de la Definición 2.3. Dado $p \in M$, existe $(U_{\alpha_p}, f_{\alpha_p})$ tal que $p \in U_{\alpha_p}$. Por la Forma local de las sumersiones en variedades (ver [6]), existe $(V_{\alpha_p}, \varphi_{\alpha_p}) \in \mathcal{A}$ con $p \in V_{\alpha_p} \subseteq U_{\alpha_p}$ y existen podiscos Δ^{m-k}, Δ^k con $0 \in \Delta^{m-k}$, $f_{\alpha_p}(p) \in \Delta^k$ tales que $\varphi_{\alpha_p}(V_{\alpha_p}) = \Delta^{m-k} \times \Delta^k$ y $f_{\alpha_p} \circ \varphi_{\alpha_p}^{-1} : \Delta^{m-k} \times \Delta^k \to \Delta^k$ es la proyección π_2.

Considero la familia $\mathcal{A}' = \left\{(V_{\alpha_p}, \varphi_{\alpha_p})\right\}_{p\in M}$, es claro que ella satisface las dos primeras condiciones de la Definición 2.2. Sean $(V, \varphi)(W, \psi) \in \mathcal{A}'$ con $V \cap W \neq \emptyset$ y sean $(U_1, f_1), (U_2, f_2)$ las aplicaciones distinguidas tales que $V \subseteq U_1$ y $W \subseteq U_2$. El cambio de coordenadas $\psi\varphi^{-1}$: $\varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ es del tipo

$$\psi\varphi^{-1}(z', z'') = (h(z', z''), g(z', z''))$$

Pero por la condición 3 de la Definición 2.3

$$\begin{aligned} g(z', z'') &= \pi_2\psi\varphi^{-1}(z', z'') = f_2\varphi^{-1}(z', z'') = \psi_{21} f_1 \varphi^{-1}(z', z'') = \psi_{21}\pi_2(z', z'') \\ &= \psi_{21}(z'') \end{aligned}$$

De esta manera g no depende de z' y esta probada la condición 3 de la Definición 2.2 y por tanto la equivalencia de las definiciones.

Aplicaremos lo anterior para definir el concepto de pull-back de foliaciones.

Definición 2.4. *Sean $(M^m, \mathcal{A})$, $(N^n, \mathcal{B})$ variedades analíticas complejas, $\mathcal{F}$ una foliación de codimensión k sobre M y $g : N \to M$ un mapeo analítico. Decimos que g es* transversal a *$\mathcal{F}$ si y sólo si para todo $p \in N$ se tiene*

$$g'(p)(T_pN) + T_{g(p)}\mathcal{F} = T_{g(p)}M$$

en donde $T_{g(p)}\mathcal{F}$ es el espacio tangente $T_{g(p)}L_{g(p)}$ de la única hoja $L_{g(p)} \in \mathcal{F}$ que pasa por $f(p) \in M$.

El siguiente resultado caracteriza la transversalidad por las aplicaciones distinguidas.

Lema 2.2. *Sean $(M^m, \mathcal{A})$, $(N^n, \mathcal{B})$ variedades analíticas complejas, $\mathcal{F}$ una foliación de codimensión k sobre M y $g : N \to M$ un mapeo analítico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *g es transversal a $\mathcal{F}$.*

2. *Para toda (U, f) aplicación distinguida se tiene que $f \circ g : g^{-1}(U) \to \mathbb{C}^k$ es una sumersión.*

Prueba. 1) $\Rightarrow$ 2) Debemos probar que para todo $p \in g^{-1}(U)$, $(f \circ g)'(p) \in \mathcal{L}\left(T_pN; \mathbb{C}^k\right)$ es sobreyectiva.

Sea $p \in g^{-1}(U)$, por hipótesis se tiene que

$$g'(p)(T_pN) + T_{g(p)}L = T_{g(p)}M$$

donde $L \in \mathcal{F}$ es la única hoja que contiene a $g(p)$.

Como (U, f) es aplicación distinguida, tenemos $f'(g(p)) \in \mathcal{L}\left(T_{g(p)}M; \mathbb{C}^k\right)$ es sobreyectiva. Además como $L \in \mathcal{F}$ es componente conexa de $f^{-1}(c)$, se tiene que $T_{g(p)}L = \mathrm{Nu}\left(f'(p)\right)$. Luego

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^k &= f'(g(p))\left[T_{g(p)}M\right] = f'(g(p))\left[g'(p)(T_pN) + T_{g(p)}L\right] = f'(g(p))\left[g'(p)(T_pN)\right] \\ &= (f \circ g)'(p)\left[T_pN\right] \end{aligned}$$

2) $\Rightarrow$ 1) Sea $p \in N$ entonces existe (U, f) aplicación distinguida tal que $g(p) \in U$. Por hipótesis tenemos que $(f \circ g)'(p) \in \mathcal{L}\left(T_pN; \mathbb{C}^k\right)$ es sobreyectiva, luego

$$f'(g(p))\left(g'(p)(T_pN)\right) = \mathbb{C}^k$$

Sea E subespacio vectorial de dimensión k de $g'(p)(T_pN)$ tal que $f'(p)(E) = \mathbb{C}^k$.

Por otro lado, tomemos $L \in \mathcal{F}$ la única hoja que pasa por $g(p)$, se tiene que $T_{g(p)}L = \mathrm{Nu}\left(f'(g(p))\right)$ y como L tiene dimensión $m - k$, se llega a que $E \oplus T_{g(p)}L = T_pM$ y por tanto

$$T_pM = g'(p)(T_pN) + T_{g(p)}L$$

lo que prueba la transversalidad de g.

Teorema 2.1. *Sean $(M^m, \mathcal{A})$, $(N^n, \mathcal{B})$ variedades analíticas complejas, $\mathcal{F}$ una foliación de codimensión k sobre M y $g : N \to M$ un mapeo analítico transversal a $\mathcal{F}$ entonces existe una única foliación analítica $g^*(\mathcal{F})$ de codimensión k (llamada* pullback de $\mathcal{F}$ bajo g, *cuyas hojas son las componenetes conexas de $g^{-1}(L)$ donde $L \in \mathcal{F}$.*

Prueba. Sea $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ colección de aplicaciones distinguidas que definen $\mathcal{F}$. Consideremos la familia $\left\{\left(g^{-1}(U_\alpha), f_\alpha \circ g\right)\right\}$, es claro que $N = \bigcup g^{-1}(U_\alpha)$. Por la transversalidad de g y el Lema anterior, se tiene que $f_\alpha \circ g : g^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{C}^k$ es una sumersión. Finalmente, si $g^{-1}(U_\alpha) \cap g^{-1}(U_\beta) \neq \emptyset$ entonces $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ y por tanto, existe $\psi_{\alpha\beta} : f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ biholomorfismo local tal que $f_\alpha = \psi_{\alpha\beta} \circ f_\beta$ en $U_\alpha \cap U_\beta$, luego $f_\alpha \circ g = \psi_{\alpha\beta} \circ (f_\beta \circ g)$ en $g^{-1}(U_\alpha) \cap g^{-1}(U_\beta)$. Por tanto $\left\{\left(g^{-1}(U_\alpha), f_\alpha \circ g\right)\right\}$ es una colección de aplicaciones distinguidas sobre N. □

Observación: Si $g : N \to M$ es una sumersión entonces $g^*(\mathcal{F})$ esta bien definida para cualquier foliación $\mathcal{F}$ de M.

3. Campos de Vectores Tangentes en Variedades

Definición 3.1. *Sea M^m una variedad analítica compleja. Un* campo de vectores tangentes *en M es una aplicación $Z : M \to \bigcup_{p \in M} T_pM$ que a cada $p \in M$ le asocia un vector $Z(p) \in T_pM$.*

Observación: Para poder hablar de analiticidad de campos de vectores tangentes, es necesario dotar al conjunto de llegada $\bigcup_{p \in M} T_pM$ de una estructura de variedad analítica compleja. Es esto lo que haremos a continuación.

En primer lugar observe que $a \in \bigcup_{p\in M} T_pM$ si y solo si existe $p \in M$ y existe $v \in T_pM$ tal que $a = v$. Luego todo elemento $a \in \bigcup_{p\in M} T_pM$ es en realidad un par ordenado (p, v) en donde geométricamente p es el punto de aplicación y v es la parte vectorial de a. Se acostumbra a denotar $a = (p, a)$. Esto motiva a considerar el conjunto

$$TM = \{(p, v); p \in M,\ v \in T_pM\}$$

Vamos a dotar a TM de una estructura analítica.

Sea $\mathcal{A}$ un atlas e M. Dado $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, definimos el conjunto

$$\widetilde{U} = \{(p, v); p \in U,\ v \in T_pM\}$$

Por otro lado, como $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{C}^m$ es un biholomorfismo, se tiene que $\varphi'(p) : T_pM \to \mathbb{C}^m$ es un isomorfismo lineal. Por tanto podemos definir

$$\widetilde{\varphi} : \widetilde{U} \to \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m = \mathbb{C}^{2m}$$

como

$$\widetilde{\varphi}(p, v) = (\varphi(p), \varphi'(p)v)$$

Note que si $(p, v), (q, w) \in \widetilde{U}$ son tales que $\widetilde{\varphi}(p, v) = \widetilde{\varphi}(q, w)$ entonces $(\varphi(p), \varphi'(p)v) = (\varphi(q), \varphi'(p)w)$ esto implica que $(p, v) = (q, w)$. Luego

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \{(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi});\ (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$$

es una familia de biyecciones. Afirmo que ella satisface las condiciones establecidas en la Sección 1. En efecto, en primer lugar observe que si $(p, v) \in \widetilde{U}$ entonces $\widetilde{\varphi}(p, v) \in \varphi(U) \times \mathbb{C}^m$. Luego $\widetilde{\varphi}(\widetilde{U}) \subseteq \varphi(U) \times \mathbb{C}^m$. Recíprocamente, si $(z, w) \in \varphi(U) \times \mathbb{C}^m$ entonces existe $p \in M$ tal que $\varphi(p) = z$ y existe $v \in T_pM$ tal que $\varphi'(p)(v) = w$. Se sigue que $(p, v) \in \widetilde{U}$ es tal que $\widetilde{\varphi}(p, v) = (z, w)$ y por tanto $\varphi(U) \times \mathbb{C}^m \subseteq \widetilde{\varphi}(\widetilde{U})$. Concluímos que $\widetilde{\varphi}(\widetilde{U})$ es un abierto de $\mathbb{C}^{2m}$. Más aún, la inversa $\widetilde{\varphi}^{-1} : \varphi(U) \times \mathbb{C}^m \to \widetilde{U}$ es dada por

$$\widetilde{\varphi}^{-1}(z, w) = \left(\varphi^{-1}(z), (\varphi^{-1})'(z)(w)\right)$$

Por otro lado, es claro que $TM = \bigcup \widetilde{U}$.

Finalmente, tomemos $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi}), (\widetilde{V}, \widetilde{\psi}) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ tales que $\widetilde{U} \cap \widetilde{V} \neq \emptyset$. Esto implica que $U \cap V \neq \emptyset$, además se tiene que $\widetilde{\varphi}(\widetilde{U} \cap \widetilde{V}) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{C}^m$ y $\widetilde{\psi}(\widetilde{U} \cap \widetilde{V}) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{C}^m$, de esta manera $\widetilde{\varphi}(\widetilde{U} \cap \widetilde{V})$ y $\widetilde{\psi}(\widetilde{U} \cap \widetilde{V})$ son abiertos de $\mathbb{C}^{2m}$. y si $(z, w) \in \widetilde{\varphi}^{-1}(\widetilde{U} \cap \widetilde{V})$ entonces

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}\widetilde{\varphi}^{-1}(z, w) &= \widetilde{\psi}\left(\varphi^{-1}(z), (\varphi^{-1})'(z)(w)\right) \\
&= \left(\psi(\varphi^{-1}(z)), \psi'(\varphi^{-1}(z))(\varphi^{-1})'(z)(w)\right) \\
&= \left(\psi\varphi^{-1}(z), (\psi\varphi^{-1})'(z)(w)\right)
\end{aligned}$$

De esta manera existe una única topología que torna a $\mathcal{A}$ un atlas analítico de dimensión $2m$. Queda como ejercicio para el lector probar que esta topología es Hausdorff y tiene base numerable.

La variedad analítica compleja de dimensión $2m$ $(TM, \widetilde{\mathcal{A}})$ es llamada *fibrado tangente* de $(M, \mathcal{A})$

Con la introducción del fibrado tangente, podemos considerar todo campo de vectores tangentes Z como un mapeo $Z : M \to TM$ dado por $Z(p) = (p, Z(p))$. Veamos la expresión de Z en coordenadas locales. Sea $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, dado $p \in U$ se tiene que $Z(p) = (p, Z(p)) \in \widetilde{U}$.

Dado $z \in \varphi(U)$, tenemos

$$\left(\widetilde{\varphi} \circ Z \circ \varphi^{-1}\right)(z) = \widetilde{\varphi}\left(Z(\varphi^{-1}(z))\right) = \widetilde{\varphi}\left(\varphi^{-1}(z), Z(\varphi^{-1}(z))\right) = \left(z, \varphi'(\varphi^{-1}(z))Z(\varphi^{-1}(z))\right)$$

Se sigue que Z es un mapeo analítico si y sólo si el mapeo $(\varphi' \cdot Z) \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{C}^m$ definido por

$$\left[(\varphi' \cdot Z) \circ \varphi^{-1}\right](z) = \varphi'(\varphi^{-1}(z))Z(\varphi^{-1}(z))$$

es analítico para todo $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. La discusión anterior motiva la siguiente definición.

Definición 3.2. *Sean M^m y N^m variedades analíticas complejas, $F \in Bihol(M, N)$ y $Z : N \to TN$ un campo de vetores tangente. El* pullback *de Z bajo F es el campo de vectores $F^*(Z) : M \to TM$ definido por*

$$F^*(Z)(p) = \left[(F^{-1})' \cdot Z) \circ F\right](p) = (F^{-1})'(F(p))Z(F(p))$$

Observaciones:

1. Sea $p \in M$, como $(F^{-1})'(F(p)) : T_{F(p)}N \to T_pM$ es lineal y $Z(F(p)) \in T_{F(p)}N$ entonces

   $$F^*(Z)(p) = (F^{-1})'(F(p)) \cdot Z(F(p)) \in T_pM, \quad \forall\, p \in M$$

   esto muestra que $F^*(Z)$ es un campo de vectores tangentes.

2. Con la definición de pullback y la discusión anterior, tenemos la siguiente definición: Sea $(M^m, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, decimos que el campo de vectores $Z : M \to TM$ es *analítico* si y sólo si $(\varphi^{-1})^*(Z) : \varphi(U) \to \mathbb{C}^m$ es analítico, $\forall\ (U, \varphi) \in \mathcal{A}$.

3. Denotaremos por $\mathcal{X}(M)$ al conjunto de todos los campos de vectores analíticos tangentes a M.

4. De las definiciones anteriores se sigue inmediatamente que si M^m y N^m son variedades analíticas complejas, $F \in \mathrm{Bihol}(M, N)$ y $Z \in \mathcal{X}(N)$ entonces $F^*(Z) \in \mathcal{X}(M)$.

Proposición 3.1. *Sean M^m, N^m variedades analíticas complejas y $F \in Bihol(M, N)$. Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *$F^*(Z + Y) = F^*(Z) + F^*(Y)$, $\forall\ Z, Y \in \mathcal{X}(N)$.*
2. *$F^*(aZ) = aF^*(Z)$, $\forall\ Z \in \mathcal{X}(N)$, $\forall\ a \in \mathbb{C}$.*
3. *$F^*(fZ) = (f \circ F)F^*(Z)$, $\forall\ Z \in \mathcal{X}(N), \forall\ f \in \mathcal{O}(N)$.*

Demostración. Sólo probaremos 3), las demás son semejantes. Dado $p \in M$, tenemos

$$\begin{aligned}
[F^*(fZ)](p) &= \left[(F^{-1})' \cdot (fZ)\right](F(p)) = (F^{-1})'(F(p)) \cdot [f(F(p))Z(F(p))] \\
&= f(F(p))(F^{-1})'(F(p)) \cdot Z(F(p)) = f(F(p))F^*(Z)(p) \\
&= [(f \circ F)F^*(Z)](p)
\end{aligned}$$

Se sigue que $F^*(fZ) = (f \circ F)F^*(Z)$. □

Notación: Sean M^m, N^m variedades analíticas complejas, $F \in \mathrm{Bihol}(M, N)$ y $f \in \mathcal{O}(N)$ entonces denotamos $F^*(f) = f \circ F$. Es claro que $F^*(f) \in \mathcal{O}(M)$.

Proposición 3.2. *Sean M^m, N^m y P^m tres variedades analíticas complejas, $F \in Bihol(M, N)$ y $G \in Bihol(N, P)$. Se cumple:*

$$(G \circ F)^*(Z) = F^*(G^*(Z)), \qquad \forall\, Z \in \mathcal{X}(P).$$

Demostración. Queda como ejercicio para el lector. □

Sea $(M^m, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja y sea $Z \in \mathcal{X}(M)$, dado $p \in M$ existe $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ tal que $p \in U_\alpha$, luego podemos considerar $Z_\alpha = (\varphi_\alpha^{-1})^*(Z) \in \mathcal{X}(\varphi_\alpha(U_\alpha))$ el cual es llamado *representación local del campo de vectores tangentes Z en la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$*. Es claro que esta representación local no es única, puesto que si $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}$ es otra carta tal que $p \in U_\beta$ entonces tenemos $Z_\beta = (\varphi_\beta^{-1})^*(Z) \in \mathcal{X}(\varphi_\beta(U_\beta))$ ¿Existe alguna relación entre las representaciones locales Z_α y Z_β? Denotemos $W_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ y consideremos el cambio de coordenadas $\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1} \in$ Bihol $(\varphi_\alpha(W_{\alpha\beta}), \varphi_\beta(W_{\alpha\beta}))$. Trabajando en el abierto $\varphi_\alpha(W_{\alpha\beta}) \subseteq \varphi_\alpha(U_\alpha)$ tenemos

$$(\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1})^*(Z_\beta) = (\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1})^*((\varphi_\beta^{-1})^*(Z)) = (\varphi_\beta^{-1}\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1})^*(Z) = (\varphi_\alpha^{-1})^*(Z) = Z_\alpha$$

Recíprocamente, supongamos que para cada carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ se tenga definido el campo de vectores $Z_\alpha \in \mathcal{X}(\varphi_\alpha(U_\alpha))$ ¿ Es posible definir a partir de ellos un campo de vectores tangentes global $Z \in \mathcal{X}(M)$? Vamos a probar que la respuesta es afirmativa si esta familia de campos vectoriales satisface la *condición de compatibilidad*

$$Z_\alpha = (\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1})^*(Z_\beta), \quad \text{en } \varphi_\alpha(W_{\alpha\beta})$$

En efecto, dado $p \in M$, existe $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ tal que $p \in U_\alpha$, luego $(\varphi_\alpha)^*(Z_\alpha) \in \mathcal{X}(U_\alpha)$. Sería natural definir $Z \in \mathcal{X}(M)$ como $Z(p) = [(\varphi_\alpha)^*(Z_\alpha)](p)$ pero antes debemos probar que este valor es independiente de la carta. Sea $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}$ otra carta tal que $p \in U_\beta$, luego $(\varphi_\beta)^*(Z_\beta) \in \mathcal{X}(U_\beta)$. Trabajando en $W_{\alpha\beta}$ y usando la condición de compatibilidad, tenemos:

$$(\varphi_\alpha)^*(Z_\alpha) = (\varphi_\alpha)^*\left((\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1})^*(Z_\beta)\right) = \left(\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1}\varphi_\alpha\right)^*(Z_\beta) = (\varphi_\beta)^*(Z_\beta)$$

y de esta manera la definición anterior no es ambigua.

Resumimos nuestros resultados en el siguiente

Teorema 3.1. *Sea $(M^m, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$Z \in \mathcal{X}(M)$.*

2. *Para cada carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ existe $Z_\alpha \in \mathcal{X}((\varphi_\alpha(U_\alpha))$ con la propiedad que si $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}$ son tales que $W_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces*

$$Z_\alpha = (\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1})^*(Z_\beta), \quad en\ \varphi_\alpha(W_{\alpha\beta})$$

Observación: Sea $(M^m, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja con atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$. Por el teorema anterior, un campo de vectores tangentes $Z \in \mathcal{X}^r(M)$ puede ser definido como una colección de ternas $Z = \{(Z_\alpha, U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ en donde $Z_\alpha \in \mathcal{X}(\varphi_\alpha(U_\alpha))\ \forall\, \alpha$ satisfacen la condición de compatibilidad.

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^m$ abierto con coordenadas $z = (z_1, \ldots, z_m)$, para $j \in \{1, \ldots, m\}$ definimos $\dfrac{\partial}{\partial z_j} : U \to TU = \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m = \mathbb{C}^{2m}$ como $\dfrac{\partial}{\partial z_j}(p) = (p, e_j)$. Es claro que $\left\{\dfrac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial z_m}\right\}$

forman una colección de campos vectoriales, linealmente independientes en cada $p \in U$ a la cual llamaremos *base*. La razón de este nombre se debe a que cualquier campo de vectores sobre U puede escribirse como combinación de ellos. En efecto, sea $Z \in \mathcal{X}(U)$ dado $p \in U$ tenemos que $Z(p) \in \mathbb{C}^m$, luego existen números complejos $a_1(p), \ldots, a_m(p)$ tales que

$$Z(p) = \sum_{j=1}^{m} a_j(p)(e_j) = \sum_{j=1}^{m} \left(a_j \frac{\partial}{\partial z_j}\right)(p) = \left(\sum_{j=1}^{m} a_j \frac{\partial}{\partial z_j}\right)(p).$$

De esta manera, a cada campo Z le asociamos m funciones $a_1, \ldots, a_m : U \to \mathbb{C}$ llamadas *funciones coordenadas*, tales que $Z = \sum_{j=1}^{m} a_j \frac{\partial}{\partial z_j} \approx (a_1, \ldots, a_m)$. Como $Z \in \mathcal{X}(U)$, se sigue que $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{O}(U)(U)$.

Proposición 3.3. *Sean $U, V \subseteq \mathbb{C}^m$ abiertos, $F \in Bihol(U; V)$. Si*

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_m}\right\} \quad y \quad \left\{\frac{\partial}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial w_m}\right\}$$

son las bases para los campos de vectores en U y V respectivamente, entonces

$$F^*\left(\frac{\partial}{\partial w_j}\right) = \frac{\partial F^{-1}}{\partial w_j} \circ F = \sum_{i=1}^{m} F^*\left(\frac{\partial f_i}{\partial w_j}\right) \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad \forall\, j = 1, \ldots, m$$

donde $F^{-1} = (f_1, \ldots, f_m)$.

Demostración. Dado $p \in U$, por definición de Pull-back, tenemos

$$\begin{aligned}
\left[F^*\left(\frac{\partial}{\partial w_j}\right)\right](p) &= (F^{-1})'(F(p)) \cdot \frac{\partial}{\partial w_j}(F(p)) = (F^{-1})'(F(p))\left((e_j)_{F(p)}\right) = \frac{\partial F^{-1}}{\partial w_j}(F(p)) \\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial w_j}(F(p)), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial w_j}(F(p))\right)_p = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f_i}{\partial w_j}(F(p))\right) \frac{\partial}{\partial z_i}(p) \\
&= \left[\sum_{i=1}^{m} F^*\left(\frac{\partial f_i}{\partial w_j}\right) \frac{\partial}{\partial z_i}\right](p)
\end{aligned}$$

De lo anterior se deuce el resultado. □

Corolario. Sean $U, V \subseteq \mathbb{C}^m$ abiertos, $F \in \mathrm{Bihol}(U; V)$. Sean $\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_m}\right\}$ y $\left\{\frac{\partial}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial w_m}\right\}$ las bases para los campos de vectores en U y V respectivamente. Si $Z = \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{\partial}{\partial w_j} \in \mathcal{X}(V)$ entonces

$$F^*(Z) = \sum_{i=1}^{m} F^*\left(\sum_{j=1}^{m} b_j \frac{\partial f_i}{\partial w_j}\right) \frac{\partial}{\partial z_i}$$

donde $F^{-1} = (f_1, \ldots, f_m)$.

Demostración. De las Proposiciones 3.1 y 3.3, tenemos

$$\begin{aligned} F^*(Z) &= F^*\left(\sum_{j=1}^m b_j \frac{\partial}{\partial w_j}\right) = \sum_{j=1}^m F^*(b_j) F^*\left(\frac{\partial}{\partial w_j}\right) = \sum_{j=1}^m F^*(b_j)\left[\sum_{i=1}^m F^*\left(\frac{\partial f_i}{\partial w_j}\right)\frac{\partial}{\partial z_i}\right] \\ &= \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^m F^*(b_j) F^*\left(\frac{\partial f_i}{\partial w_j}\right)\right]\frac{\partial}{\partial z_i} \qquad \square \end{aligned}$$

Sea $(M^m, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja y $Z \in \mathcal{X}(M)$. Dado $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}(M)$, denotaremos por $\left\{\frac{\partial}{\partial z_1^\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_m^\alpha}\right\}$ a la base de $\mathcal{X}(\varphi_\alpha(U_\alpha))$, tenemos que $(\varphi_\alpha^{-1})^*(Z) \in \mathcal{X}(\varphi_\alpha(U_\alpha))$, luego existen $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{O}(\varphi_\alpha(U_\alpha))$ tales que $(\varphi_\alpha^{-1})^*(Z) = \sum_{j=1}^m a_j \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}$, luego

$$Z = (\varphi_\alpha)^*\left(\sum_{j=1}^m a_j \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}\right) = \sum_{j=1}^m (a_j \circ \varphi_\alpha)\,(\varphi_\alpha)^*\left(\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}\right)$$

Si denotamos

$$Z_j^\alpha = (\varphi_\alpha)^*\left(\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}\right) \in \mathcal{X}(U_\alpha) \quad \text{y} \quad a_j^\alpha = a_j \circ \varphi_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$$

tenemos que

$$Z = \sum_{j=1}^m a_j^\alpha Z_j^\alpha = (a_1^\alpha, \ldots, a_m^\alpha) \qquad \text{en } U_\alpha$$

De esta manera $\{Z_1^\alpha, \ldots, Z_m^\alpha\}$ es una base de $\mathcal{X}(U_\alpha)$, llamado el *referencial móvil* de Z en la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y $a_1^\alpha, \ldots, a_m^\alpha$ son sus funciones coordenadas.

Sea $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}$ tal que $W_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, denotando $\left\{\frac{\partial}{\partial z_1^\beta}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_m^\beta}\right\}$ la base de $\mathcal{X}(\varphi_\beta(U_\beta))$ y $Z_j^\beta = (\varphi_\beta)^*\left(\frac{\partial}{\partial z_j^\beta}\right) \in \mathcal{X}(U_\beta)$, tenemos que $\{Z_1^\beta, \ldots, Z_m^\beta\}$ es una base de $\mathcal{X}(U_\beta)$. ¿Cómo se relacionan $\{Z_1^\alpha, \ldots, Z_m^\alpha\}$ y $\{Z_1^\beta, \ldots, Z_m^\beta\}$ en $W_{\alpha\beta}$?

Como $\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1} \in \operatorname{Bihol}(\varphi_\alpha(W_{\alpha\beta}); \varphi_\beta(W_{\alpha\beta}))$ y denotando $\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1} = (f_1, \ldots, f_m)$, por la Proposición 3.3 tenemos

$$(\varphi_\alpha^{-1})^*(Z_j^\beta) = (\varphi_\alpha^{-1})^*\,(\varphi_\beta)^*\left(\frac{\partial}{\partial z_j^\beta}\right) = (\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1})^*\left(\frac{\partial}{\partial z_j^\beta}\right) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial z_j^\beta} \circ (\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1})\frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}$$

luego

$$\begin{aligned} Z_j^\beta &= (\varphi_\alpha)^*\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial z_j^\beta} \circ (\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1})\frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}\right) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j^\beta} \circ \varphi_\beta\right)(\varphi_\alpha)^*\left(\frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j^\beta} \circ \varphi_\beta\right) Z_i^\alpha \end{aligned}$$

Se sigue que que la matriz de cambio de base es dada por

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(z_1^\beta, \ldots, z_m^\beta)} \circ \varphi_\beta = J(\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1}) \circ \varphi_\beta$$

4. Foliaciones de dimensión uno

A continuación extenderemos a las superficies el teorema de existencia y unicidad de curvas integrales.

Definición 4.1. *Sean M^m una variedad analítica compleja y $Z \in \mathcal{X}(M)$. Una* curva integral de Z con origen en $p \in M$ *es un camino diferenciable $\alpha : D_\epsilon(0) \to M$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(T) = Z(\alpha(T))$, $\forall\, T \in D_\epsilon(0)$.*

Teorema 4.1. *Si M^m es una variedad analítica compleja y $Z \in \mathcal{X}(M)$ entonces para cada $p \in M$ existe una curva integral de Z en M con origen en p. Más aún, dos curvas integrales de Z con origen en p coinciden en una vecindad del 0.*

Demostración. Sea $p \in M$ y (U, φ) carta de M tal que $p \in U$, podemos suponer que $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{C}^n$. Como $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$ es biholomorfismo, podemos considerar el pullback $Y = (\varphi^{-1})^* Z : \varphi(U) \to \mathbb{C}^m$ el cual analítico. Por el Teorema de Existencia y Unicidad existe $\beta : D_\epsilon(0) \to \varphi(U)$ curva integral de Y con origen en $0 \in \mathbb{C}^m$. Sea $\alpha : D_\epsilon(0) \to U$ definido por $\alpha(T) = \varphi^{-1}(\beta(T))$, claramente α es diferenciable, $\alpha(0) = p$ y por la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\alpha'(T) &= (\varphi^{-1})'(\beta(T)) \cdot \beta'(T) = (\varphi^{-1})'(\beta(T)) \cdot Y(\beta(T)) \\ &= (\varphi^{-1})'(\beta(T)) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(\beta(T))) \cdot Z(\varphi^{-1}(\beta(T))) = Z(\alpha(T)).\end{aligned}$$

Luego α es una curva integral de Z en M con origen en p. □

A continuación, probaremos que el pull-back transporta curvas integrales en curvas integrales.

Teorema 4.2. *Sean M^m, N^m variedades analíticas complejas, $F \in Bihol(M, N)$ y $Z \in \mathcal{X}(N)$. Entonces α es una curva integral de Z en N con origen en $q \in N$ si y sólo si $F^{-1} \circ \alpha$ es una curva integral de $F^*(Z)$ en M con origen en $p = F^{-1}(q) \in M$.*

Demostración. Sea $\alpha : D_\epsilon(0) \to N$ curva integral de Z en N, entonces $\beta = F^{-1} \circ \alpha : D_\epsilon(0) \to M$ es diferenciable y cumple

$$\begin{aligned}\beta'(T) &= (F^{-1} \circ \alpha)'(T) = (F^{-1})'(\alpha(T))\alpha'(T) = (F^{-1})'(\alpha(T))Z(\alpha(T)) \\ &= (F^{-1})'(F(\beta(T)))Z(F(\beta(T))) = F^*(Z)(\beta(T)), \quad \forall\, t \in D_\epsilon(0)\end{aligned}$$

Además $\beta(0) = F^{-1}(p) = q$. Se sigue que $\beta = F^{-1} \circ \alpha$ es una curva integral de $F^*(Z)$ en M con origen en $p = F^{-1}(q) \in M$. El recíproco es análogo. □

Sea M^m una variedad analítica compleja y sea $Z \in \mathcal{X}(M)$. Decimos que $p \in M$ es un *punto singular de Z* si y sólo si $Z(p) = 0 = (p, 0)$, caso contrario, diremos que Z es un *punto regular de Z*. Denotaremos por $\operatorname{Sing}(Z)$ al conjunto de todos los puntos singulares de Z.

Teorema 4.3. ***(Teorema del Flujo Tubular para variedades*** *Sea $(M^m, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja y $Z \in \mathcal{X}(M)$. Si $p \in M$ punto regular de Z entonces existe $(U_p, \varphi_p) \in \mathcal{A}$ con $p \in U_p$ tal que $\varphi_p(U_p) = \Delta^1 \times \Delta^{m-1}$ y $\varphi_p^*\left(\dfrac{\partial}{\partial z_1}\right) = Z$ en U_p (en donde $z = (z_1, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{m-1}$ son las coordenadas de $\varphi_p(U_p)$).*

Demostración. Es una consecuencia directa del Teorema de flujo tubular para abiertos de C^m. (ver [2])

Ejemplo 4.1. *Sea $(M^m, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja y Z un campo de vectores tangentes analítico en M tal que $Z(p) \neq 0$, $\forall\, p \in M$ (esto significa que Z no tiene puntos singulares en M). Vamos a demostrar que el campo Z induce una foliación por curvas sobre M. En efecto, por el Teorema del flujo tubular tenemos que dado $p \in M$, existe $(U_p, \varphi_p) \in \mathcal{A}$ con $p \in U_p$ tal que $\varphi_p(U_p) = \Delta^1 \times \Delta^{m-1}$ y $\varphi_p^*\left(\dfrac{\partial}{\partial z_1}\right) = Z$ en U_p (en donde $z = (z_1, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{m-1}$ son las coordenadas de $\varphi_p(U_p)$).*

Consideremos la familia $\mathcal{A}' = \{(U_p, \varphi_p)\}_{p \in M}$ es claro que ella satisface las dos primeras condiciones de la Definición 2.2 (con $k = 1$). En cuanto a la tercera condición, sean $(U_p, \varphi_p), (V_p, \psi_p) \in \mathcal{A}'$ tales que $U_p \cap V_p \neq \emptyset$. Denotando por $w = (w_1, w')$ a las coordenadas de $\psi_p(V_p)$, de la definición de $\mathcal{A}'$ y por propiedades del pull-back tenemos

$$(\psi_p\varphi_p^{-1})^*\left(\frac{\partial}{\partial w_1}\right) = \frac{\partial}{\partial z_1} \qquad \text{en } \psi_p(U_p \cap V_p)$$

Por otro lado, los cambios de coordenadas $\psi_p\varphi_p^{-1} : \varphi_p(U_p \cap V_p) \longrightarrow \varphi_p(U_p \cap V_p)$ lo podemos escribir de la forma

$$(\psi_p\varphi_p^{-1})\,(z_1, z'') = (f_1(z_1, z''), \ldots, f_m(z_1, z''))$$

Por la Proposición 3.3 tenemos

$$\frac{\partial}{\partial w_1} = (\psi_p\varphi_p^{-1})^*\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right) = \sum_{i=1}^{m} (\psi_p\varphi_p^{-1})^*\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_1}\right)\frac{\partial}{\partial w_i}$$

de donde se sigue que

$$\frac{\partial f_i}{\partial z_1} \circ \varphi_p \circ \psi_p^{-1} = 0, \qquad \forall\, i \geq 2$$

De esta manera $f_2, \ldots, f_m$ no dependen de z_1 y la tercera condición de la Definición 2.2 está satisfecha.

Recíprocamente, tenemos el siguiente resultado, el cual puede ser considerado como una cuarta manera de definir foliación analítica por curvas.

Teorema 4.4. *Si $(M^m, \mathcal{A})$ es una variedad analítica compleja y $\mathcal{F}$ es una foliación analítica de dimensión 1, entonces existen familias $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$, $\mathcal{Z} = \{Z_\alpha\}$ tales que*

1. *$U_\alpha \subseteq M$ es un a bierto y $M \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$.*

2. *$Z_\alpha \in \mathcal{X}(U_\alpha)$ y $Sing(Z_\alpha) = \emptyset$, $\forall\, \alpha$.*

3. *Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces existe $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$ tal que $Z_\alpha = g_{\alpha\beta} Z_\beta$ en $U_\alpha \cap U_\beta$.*

Demostración. Por la Definición 2.2 existe $\mathcal{A}' = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\} \subseteq \mathcal{A}$ que satisface las tres condiciones siguientes:

1. $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

2. Si $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}'$ entonces $\varphi_\alpha(U_\alpha) = \Delta^k_\alpha \times \Delta^{m-k}_\alpha$, $\forall\, \alpha$.

3. Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces el cambio de coordenadas
$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$
viene dado por
$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(z', z'') = (h_{\alpha\beta}(z', z''), g_{\alpha\beta}(z''))$$

Denotando por $z_1^\alpha, \ldots, z_m^\alpha$ a las coordenadas de $\varphi_\alpha(U_\alpha)$, tenemos que las órbitas de $\dfrac{\partial}{\partial z_1^\alpha}$ en $\Delta_\alpha \times \Delta_\alpha^{m-1}$ son del tipo $\Delta_\alpha \times \{z''\}$. Definimos $Z_\alpha = \varphi_\alpha^* \left(\dfrac{\partial}{\partial z_1^\alpha}\right)$. Se sigue que $\mathrm{Sing}(Z_\alpha) = \emptyset$.

Sean $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces $Z_\alpha = \varphi_\alpha^* \left(\dfrac{\partial}{\partial z_1^\alpha}\right)$ y $Z_\beta = \varphi_\beta^* \left(\dfrac{\partial}{\partial z_1^\beta}\right)$. De acuerdo a la notación de la sección anterior, tenemos:
$$Z_\alpha = \varphi_\alpha^* \left(\frac{\partial}{\partial z_1^\alpha}\right) = Z_1^\alpha = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_1^\alpha} \circ \varphi_\alpha\right) Z_i^\beta$$
donde $\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1} = (f_1, \ldots, f_m)$. Pero como $f_2, \ldots, f_m$ no dependen de z_1^α entonces
$$Z_\alpha = \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1^\alpha} \circ \varphi_\alpha\right) Z_1^\beta = g_{\alpha\beta} Z_\beta$$
en donde es fácil ver que $g_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1^\alpha} \circ \varphi_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$. □

Observación: Toda foliación por curvas en una variedad es generada por un campo de vectores tangentes a la variedad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] B. Azevedo - C. Morales, *Geometry, Dynamics and Topology of Foliated Manifolds*, 24° Colóquio Brasileiro de Matemática, 2003.

[2] R. Benazic, *Tópicos de dinámica compleja*, Notas de clase, Lima (2008).

[3] C. Camacho - A. Lins Neto, *Teoria geométrica das olheações*, Projeto Euclides, 1979.

[4] A. Candel - L. Conlon, *Foliations I*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 23, American Mathematical Society, 2000.

[5] L. Conlon, *Differentiable Manifolds. A First Course*, Birkhäuser, 1993.

[6] R. Gunning, *Introduction to Holomorphic Functions Several Variables, Vol. I : Function Theory*, Wadsworth & Brooks/Cole, 1990.

[7] P. Griffiths - J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1978.

[8] S. T. Hu, *Differentiable Manifolds*, Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1969.

[9] E. Lima, *Variedades Diferenciais*, Monografias de Matemática N°15, 1973.

[10] M. Soares - R. Mol, *Indices de Campos holomorfos y aplicaciones*, 23° Coloquio Brasleiro de Matematica, 2001.