PESQUIMAT , Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XII N°2, pp. 62-73, Lima - Perú, Agosto 2009

Comparativas entre técnicas, para obtener el atractor global y su dimensión de Hausdorff y fractal de la ecuación reacción difusión en dominios no acotados

Nancy Moya Lázaro[1], *Claudio Balcazar, Carlos Castañeda, Martha Gonzales, Zacarias Huaringa, Felix Pariona, Efrain Peña, Nelly Pillhuaman*

Resumen: En este artículo, presentamos un estudio analítico el comportamiento asintótico, de la ecuación reacción difusión.
Palabras Clave: Atractores; Dimensión finita; Dominio no acotado.

Comparing Techniques, to obtain the global attactor its Hausdorff dimension and fractal of the reaction diffusion equations in Unbounded domain

Abstract: In this paper we study the asymptotic behavior of solutions of reaction diffusion equations.
key words: Attractors; Finite dimension; Unbounded domain.

1. Introducción

En este artículo estudiamos el comportamiento asintótico de la ecuación reacción difusión de la forma

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - \Delta u = f(x,u), & \text{para } x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0 \\ u(0) = u_0 & \end{array} \right. \tag{1.1}$$

donde el valor inicial y la solución estan en los espacios de Sobolev $H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$.

En dominios acotados, el estudio de la ecuación ha sido ampliamente desarrollado, en un marco funcional de espacios de Sobolev, con ciertas restricciones en el término no lineal, se prueba la existencia de la solución global lo que permite definir un semigrupo no lineal asociado a (1.1). La clave para determinar la existencia del atractor en un dominio acotado es que, el semigrupo sea compacto en el espacio de Sobolev. Para probarlo se usa de manera determinante la compacidad de las inclusiones de Sobolev. En este contexto ver los artículos de Hale [4], Robinson [8] y Temam en [9].

Cuando el dominio es $\mathbb{R}^N$ se presentan nuevas dificultades. La familia de espacios $L^p(\mathbb{R}^N)$ no están encajados, las inclusiones de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ dejan de ser compactas y por tanto el método que se utiliza para el caso en el que el dominio es acotado no funciona, es por eso que necesitamos nuevas técnicas que permitan recuperar la compacidad de la solución, como alternativa, se han utilizado espacios de Sobolev con pesos por ejemplo ver [2].

En la Sección § 2 presentamos tres ejemplos a conocer, y mencionamos las diferencias de las técnicas utilizadas por cada uno de ellos.

En la Sección § 3 hacemos un estudio de la teoría lineal. Comenzamos con la ecuación del calor $u_t - \Delta u = 0$, y luego con la ecuación de Schödinger $u_t - \Delta u + V(x)u = 0$, en los espacios $L^q(\mathbb{R}^N)$.

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: nanesp@yahoo.com

Donde, $V(x) \in L^{\sigma}_{U}(\mathbb{R}^N)$, es un espacio de potenciales que admiten singularidades locales, que no se anulan en el infinito. Un punto importante en esta sección es la generación de semigrupos analíticos y la caracterización de sus espacios de potencias fraccionarias, ver [5] para una teoría mas general. También damos a conocer propiedades de regularización del semigrupo lineal en los espacios $L^p(\mathbb{R}^N) - L^q(\mathbb{R}^N)$, que son útiles a la hora de estudiar la teoría no lineal.

En la Sección § 4, presentamos la teoría no lineal. Consideramos una condición de crecimiento para la no linealidad de (1.1), la cuál asegura debido a un resultado standard, la existencia de solución local, ver el Teorema 4.1. También suponemos una condición del tipo $f(x,u)u \leq C(x)u^2 + D(x)|u|$, donde $C(x)$ y $D(x)$ están en espacios apropiados lo cuál garantiza la existencia global de soluciones y por tanto podemos definir el semigrupo no lineal $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ asociado a la ecuación (1.1), ver el Teorema 4.2. Además, si asumimos alguna condición de disipatividad sobre el semigrupo lineal, podemos obtener cotas uniformes de la solución lo cual nos permite definir un conjunto absorvente $B_{0,\alpha}$ para el semigrupo no lineal $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, en $H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$.

En la Sección § 5 probamos que el semigrupo no lineal $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, construído en la Sección § 4, es compacto cuando $t \to \infty$ en $L^q(\mathbb{R}^N)$. La técnica consiste en probar que

(i) La solución restringida a una bola $B(0,R)$, es un conjunto precompacto en $L^q(B(0,R))$.

y

(ii) Las colas de las soluciones son uniformemente pequeñas en el infinito en el sentido $L^q(\mathbb{R}^N)$.

La compacidad asintótica es la clave para probar la existencia del atractor $\mathcal{A}$ de la ecuación (1.1)

En la Sección § 6 Analizamos la dimensión de Hausdorff del atractor y comparamos las técnicas utilizadas.

2. Trabajos precedentes.

• Babin y Vishik, fueron los primeros en estudiar la dinámica asintótica de la ecuación (1.1) donde la no linealidad es de la forma

$$f(x,u) := -\lambda_0 u - f_0(u) - g(x), \quad \lambda_0 > 0,$$

Con $f_0(u)$ satisfaciendo la siguiente condición de signo

$$f_0(u)u \geq -C_0|u|^2 \tag{2.2}$$

$$f_0 = 0, \quad f'(u) \geq -C \tag{2.3}$$

y condición de crecimiento para la no linealidad

$$|f_0'(u)| \leq C(u + |u|^{p_2}), \quad 0 \leq p_2 \leq p_0, \; p_0 = min\{\frac{4}{n}, \frac{2}{n-2}\}, \quad p_1 \geq 0, \; para\; n \leq 2 \tag{2.4}$$

Aquí lo autores trabajan en un marco funcional de espacios de Sobolev con peso, con pesos de la forma $\rho(x) := (1+|x|^2)^{\gamma}$, con $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$, en el espacio $L^2_{\gamma}(\mathbb{R}^N)$.

• B. Wang en 1998 en [10], en [7], estudia el caso en que la no linealidad de (1.1) es de la forma,

$$f(x,u) = -\lambda u - f_0(u) + g$$

donde $\nu, \lambda > 0$, $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, donde la no linealidad satisface las siguientes condiciones de crecimiento y de signo

$$f(u)u \geq 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(u) \geq -C \tag{2.5}$$

$$|f'(u)| \leq C(1 + |u|^r) \tag{2.6}$$

con r adecuado. Trabaja en un marco funcional de $L^2(\mathbb{R}^N)$. Prueban que el problema (1.1), esta bien definido en $L^2(\mathbb{R}^N)$. Por un teorema standard de existencia y unicidad para ecuaciones semilineales ver [5], se establece la existencia y unicidad del semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, con algunas propiedades de regularidad.

Luego, establecen estimaciones en tiempo para la solución en los espacios $L^2(\mathbb{R}^N)$, $H^1(\mathbb{R}^N)$, lo cuál permite definir un conjunto absorvente en $L^2(\mathbb{R}^N)$. Para tratar la compacidad asintótica del semigrupo, introducen una función de corte suficientemente regular θ que corta la solución u, permitiendo así estudiar las colas de la solución. Prueban que estas son pequeñas en el sentido $L^2(\mathbb{R}^N)$.

• En todos los casos el dominio no es acotado y por consiguiente se tienen dificultades a nivel funcional.
• El espectro de $-\Delta + \lambda_0$, con $\lambda_0 > 0$, es estrictamente positivo.

Los autores utilizan un marco funcional de espacios de Sobolev con peso.
Los logros presentados en los artículos citados son valiosos sin embargo no hay un análisis completo en la teoría lineal y no lineal. Es por eso que aquí desarrollamos una teoria lineal y no lineal que nos permita de manera ordenada y completa.
• Teoría lineal.

3. La ecuación del calor y de Schödinger en los espacios $L^q(\mathbb{R}^N)$.

En esta sección presentamos algunos resultados concernientes a la ecuación lineal del calor en los espacios $L^q(\mathbb{R}^N)$.

$$u_t - \Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0. \tag{3.7}$$

Se prueba que la realización del operador elíptico lineal $-\Delta$ en el espacio base $L^q(\mathbb{R}^N)$, genera un semigrupo analítico

Proposición 3.1. *Para cada $1 < q < \infty$ el operador lineal no acotado $-\Delta$ con dominio $W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$, es un operador sectorial en $L^q(\mathbb{R}^N)$, y por tanto Δ genera un semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ analítico. En particular la ecuación del calor*

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \Delta u = 0, \ en\, \mathbb{R}^N, \ t > 0 \\ u(0) = u_0 \in L^q(\mathbb{R}^N) \end{array} \right. \tag{3.8}$$

tiene una única solución $u(t) := S(t)u_0$ para $t \geq 0$. la cuál es dada por

$$u(t,x) = S(t)u_0 = (4\pi t)^{\frac{-N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\, dy. \tag{3.9}$$

Los espacios de potencias fraccionarias de $-\Delta$ en $L^q(\mathbb{R}^N)$ denotado por $H^{\alpha,q}(\mathbb{R}^N)$ coincide con los espacios $W^{\alpha,q}(\mathbb{R}^N)$, para $0 \leq \alpha \leq 1$.

Por su importancia en las aplicaciones estudiamos en esta sección los operadores de Schrödinger en los espacios $L^q(\mathbb{R}^N)$. Consideramos la ecuación parabólica lineal

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u - \Delta u = V(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0. \\ u(0) = u_0 \in L^q(\mathbb{R}^N) \end{array} \right. \tag{3.10}$$

consideramos una clase de potenciales que, admiten singularidades locales y que no decaen en el infinito, denominados espacios localmente uniformes y denotados por $L^{\sigma}_{U}(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq \sigma \leq \infty$,

$$L^{\sigma}_{U}(\mathbb{R}^N) := \{V \in L^{\sigma}_{loc}(\mathbb{R}^N) : \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \int_{B(x,1)} |V(y)|^{\sigma}\, dy < \infty\}$$

con norma

$$\|V\|_{L^{\sigma}_{U}(\mathbb{R}^N)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \|V\|_{L^{\sigma}(B(x,1))}.$$

Los resultados que presentamos valen para operadores mas generales que $-\Delta$, pero prestaremos nuestra atención en operadores de la forma $-\Delta - V(x)I$, donde V es un potential in $L^{\sigma}_{U}(\mathbb{R}^N)$, $\sigma > \frac{N}{2}$, $\sigma \geq 1$. Entonces tenemos

Teorema 3.1. *Sea $V \in L^{\sigma}_{U}(\mathbb{R}^N)$ con $\sigma > \frac{N}{2}$, $\sigma > 1$. Entonces para cada $1 < q < \sigma$ el operador $\Delta + V(x)I$, con dominio $W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$, genera un semigrupo analítico que preserva orden orden en $L^q(\mathbb{R}^N)$, $S_V(t)$, y con el mismo espacio de potencias fraccionarias que $-\Delta$.*

El semigrupo está dada por la fórmula de variación de las constantes

$$u(t) = e^{(\Delta+V)t}u_0 = e^{\Delta t}u_0 + \int_0^t e^{\Delta(t-s)}V(x)u(s)\, ds.$$

Demostración. En la prueba tratamos al operador de Schödinger como una perturbación del operador de Laplace. ■ • Teoria no lineal en $H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$.

Ahora, estudiamos la existencia local, global y regularidad de soluciones mas precisamente, estudiamos la siguiente ecuación reacción difussion en el espacio Base $X = L^q(\mathbb{R}^N)$, con $1 < q < \infty$

4. Existencia global y cotas uniformes para el problema no lineal en espacios de Sobolev

Comenzamos con el estudio del comportamiento asintótico de la ecuación reacción difussión en dominios no acotados

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f(x,u), \; x \in \mathbb{R}^N, \; t > 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Teorema 4.1. *Sea $1 < q < \infty$. Consideramos el problema (2.5) con $u_0 \in H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$. Asumimos que la parte no lineal f se puede descomponer en*

$$f(x,u) = f_0(x,u) + m(x)u + g(x)$$

de forma que $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$, $m \in L^{\sigma}_{U}(\mathbb{R}^N)$ con $\sigma > \frac{N}{2}$, $\sigma > q$, y f_0 satisface,

$$\begin{cases} f_0(x,0) = 0, \; \frac{\partial f_0}{\partial s}(x,0) = 0 \\ |\frac{\partial}{\partial s} f_0(x,s)| \leq C(1 + |s|^{r-1}), s \in \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\text{con } 1 \leq r \begin{cases} < \infty, & si\ N \leq q \\ \leq \frac{N}{N-q}, & si\ N > q. \end{cases} \tag{4.3}$$

Entonces existe una única solución local del problema (2.5) dada por la fórmula de variación de las constantes, (FVC),

$$u(t, u_0) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)(f_0^e(u(s)) + g)\, ds, \quad t \in [0, \tau_0) \tag{4.4}$$

donde $S(t)$ denota el semigrupo analítico lineal generado por el $\Delta + m(x)I$ en $L^q(\mathbb{R}^N)$, esto es $S(t) = e^{(\Delta+m(x)I)t}$, y $[0, \tau_0)$ es el intervalo maximal de existencia de la solución, y además para todo $\gamma \in [0, 1)$

$$u(., u_0) \in C([0, \tau_0), H^{1,q}(\mathbb{R}^N)) \cap C((0, \tau_0), H^{2,q}(\mathbb{R}^N)) \cap C^1((0, \tau_0), H^{2\gamma,q}(\mathbb{R}^N)).$$

Aquí $H^{2\gamma,q}(\mathbb{R}^N)$ con $\gamma \in [0, 1)$ denotan los espacios de potencias fraccionarias del operador $-\Delta$, en $L^q(\mathbb{R}^N)$.

Demostración. Aplicaremos el Teorema 3.3.3 de existencia y unicidad de [5], pág 54 con el espacio base $X = L^q(\mathbb{R}^N)$ y con $X^{\frac{1}{2}} = H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$. Puesto que $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$, bastará probar que $f_0^e : H^{1,q}(\mathbb{R}^N) \to L^q(\mathbb{R}^N)$ es lipschitz sobre conjuntos acotados.

Primero probaremos que el operador de Nemitcky asociado a la función f_0 transforma $H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ en $L^q(\mathbb{R}^N)$ es decir

$$f_0^e : H^{1,q}(\mathbb{R}^N) \to L^q(\mathbb{R}^N).$$

Puesto que $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ basta con probar que,

$$f_0^e : H^{1,q}(\mathbb{R}^N) \to L^q(\mathbb{R}^N).$$

En efecto, si $u \in H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$, según las inclusiones de Sobolev $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p\, dx \le \|u\|^p_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)}, \quad \text{con } q \le p \begin{cases} < \infty, \text{ si } N \le q \\ \le \frac{qN}{N-q}, \text{ si } 1 \le q < N. \end{cases} \tag{4.5}$$

Ahora probaremos que $f_0^e(u) \in L^q(\mathbb{R}^N)$. Considerando la hipótesis (4.2) tenemos,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |f_0(x, u(x))|^q\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_0^{u(x)} \partial_s f_0(x, s)\, ds \right|^q dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_0^{u(x)} C(1 + |s|^{r-1})\, ds \right|^q dx \\ &\le C \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |u(x)|^{q(r-1)})\, |u(x)|^q\, dx \end{aligned}$$

es decir

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_0(x, u(x))|^q\, dx \le \hat{C}_0 \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^q\, dx + \hat{C}_0 \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{qr}\, dx. \tag{4.6}$$

La primera integral de la derecha es finita pues $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$, mientras que la segunda integral según (1.3) es finita si y sólo si $1 \le r \le \frac{N}{N-q}$, cuando $N > q$, o para cualquier r, si $N \le q$ pero esto se cumple por hipótesis. Por tanto hemos probado que el operador de Nemitcky transforma el espacio $H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ en $L^q(\mathbb{R}^N)$.

Seguidamente probaremos que el operador de Nemitcky es Lipschitz sobre acotados. Sean $u, v \in H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ con $\|u\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)}$, $\|v\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)} \leq R$ para cierta constante positiva R. Aplicando nuevamente (4.2), sea $x \in \mathbb{R}^N$ fijo

$$\begin{aligned} |f_0(x, u(x)) - f_0(x, v(x))| &\leq \int_{v(x)}^{u(x)} |\partial_s f_0(x, s)| ds \\ &\leq C(1 + |u(x)|^{r-1} + |v(x)|^{r-1})|v(x) - u(x)| \end{aligned}$$

luego tenemos que

$$\begin{aligned} \|f_0^e(u) - f_0^e(v)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} |f_0(x, u(x)) - f_0(x, v(x))|^q \, dx. \\ &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |v(x) - u(x)|^q \, dx \\ &+ C_1 \int_{\mathbb{R}^N} (|u(x)|^{q(r-1)} + |v(x)|^{q(r-1)})|v(x) - u(x)|^q \, dx. \end{aligned} \tag{4.7}$$

En la segunda integral aplicamos la desigualdad de Hölder, con $1 < s, s' < \infty$ tal que $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$.

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} (|u(x)|^{q(r-1)} + |v(x)|^{q(r-1)})|v(x) - u(x)|^q \, dx \\ &\leq C_2 \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(|u(x)|^{qs(r-1)} + |v(x)|^{qs(r-1)} \right) \right]^{\frac{1}{s}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |v(x) - u(x)|^{qs'}(x) \, dx \right]^{\frac{1}{s'}} \\ &\leq C_3 \left[\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{qs(r-1)} + \int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^{qs(r-1)} \right]^{\frac{1}{s}} . \|(v-u)\|^q_{L^{qs'}(\mathbb{R}^N)} \\ &= C_3 \left[\|u\|^{qs(r-1)}_{L^{qs(r-1)}} + \|v\|^{qs(r-1)}_{L^{qs(r-1)}} \right]^{\frac{1}{s}} \|v-u\|^q_{L^{qs'}(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Para la finitud de estos últimos sumandos se necesita por (1.3) que se cumplan es decir, que $q \leq qs(r-1) \leq \frac{qN}{N-q}$ y $q \leq qs' \leq \frac{qN}{N-q}$, si $1 \leq q < N$. Si $1 \leq q < N$, elegimos $s' = \frac{N}{N-q}$ y tenemos que $s = \frac{N}{q}$ y por tanto $qs(r-1) \leq \frac{qN}{N-q}$, ya que $r \leq \frac{N}{N-q}$. Si $N \leq q$, s' y s son arbitrarios. Entonces por (1.3) seguimos acotando superiormente (1.6) y tenemos

$$\begin{aligned} &\left[\|u\|^{qs(r-1)}_{L^{qs(r-1)}} + \|v\|^{qs(r-1)}_{L^{qs(r-1)}} \right]^{\frac{1}{s}} \|v-u\|^q_{L^{qs'}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C_4 \left[\|u\|^{qs(r-1)}_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)} + \|v\|^{qs(r-1)}_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)} \right]^{\frac{1}{s}} \|v-u\|^q_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)} \leq CR^{\frac{qN}{N-q}} \|v-u\|^q_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Por (4.7) (1.6) y (4.9), para $u, v \in H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$, con $\|u\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)}, \|v\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)} \leq R$

$$\|f_0^e(u) - f_0^e(v)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq (CR^{\frac{N}{N-q}} + C_6)\|v-u\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)}.\square$$

■ Enseguida asumiremos alguna condición de disipatividad que garantiza la existencia de soluciones globales de (4.1)

Teorema 4.2. *Sea $1 < q < \infty$. Con las hipótesis del Teorema 4.1, supongamos que existe $C \in L^{\sigma}_{U}(\mathbb{R}^N)$ con $\sigma > \frac{N}{2}$, $\sigma > q$, y $D \in L^q(\mathbb{R}^N)$ con $D \geq 0$ tal que el término no lineal satisface*

$$f(x,s)s \leq C(x)|s|^2 + D(x)|s|, \text{ para todo } s \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.10}$$

Entonces la solución del problema (4.1) con condición inicial $u_0 \in H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ está globalmente definida.

Así (4.1) define un semigrupo no lineal $\{T(t)\}_{t\geq 0}$

$$T(t) : H^{1,q}(\mathbb{R}^N) \to H^{1,q}(\mathbb{R}^N) \tag{4.11}$$

con $T(t)u_0 := u(t)$, donde $u(t)$ es la solución de (4.1) con dato u_0.

Demostración. Por el Teorema 3.1 tenemos que $\Delta + C(x)I$ genera un semigrupo analítico que preserva orden en $X = L^q(\mathbb{R}^N)$, denotado por $S_C(t)$, el cuál tiene los mismos espacios de potencias fraccionarias del $-\Delta$.

Como $D \in L^q(\mathbb{R}^N)$, el problema lineal

$$\begin{cases} \partial_t U - \Delta U = C(x)U + D(x),\ x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0 \\ U(0) = |u_0| \in H^{1,q}(\mathbb{R}^N) = X^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{4.12}$$

está bien definido, y tiene una única solución, denotada $U(t, |u_0|)$, que está explícitamente dada por la fórmula de variación de las constantes

$$U(t,|u_0|) = S_C(t)|u_0| + \int_0^t S_C(t-s)D(x)ds \tag{4.13}$$

y satisface $U(\cdot,|u_0|) \in C([0,\infty), H^{1,q}(\mathbb{R}^N)) \cap C((0,\infty), H^{2,q}(\mathbb{R}^N))$, $U(t,x) \geq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$ y $t > 0$, puesto que $D \geq 0$.

Por las técnicas de comparación, tenemos

$$|u(t,u_0)| \leq U(t,|u_0|) \tag{4.14}$$

para todo $t > 0$.

Ahora, utilizando las inclusiones de Sobolev, obtenemos que

$$q \leq p \begin{cases} < \infty, & \text{si } N \leq q \\ \leq \frac{qN}{N-q}, & \text{si } 1 \leq q < N \end{cases}$$

se tiene

$$\|u(s)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|U(s)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|U(s)\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)}$$

y de (4.13)

$$\begin{aligned} \|U(t,|u_0|)\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)} &\leq \|S_C(t)|u_0|\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)} + \int_0^t \|S_C(t-s)D(x)\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)}ds. \\ &\leq Me^{\mu t}\|u_0\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)} + M\|D\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \int_0^t \frac{e^{\mu(t-s)}}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\, ds \end{aligned}$$

para algún $\mu \in \mathbb{R}$. Por tanto, para todo $T > 0$, si $t \in [0,T]$,

$$\|U(t,|u_0|)\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)} \leq K(T)\big(\|u_0\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)} + \|D\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\big) \tag{4.15}$$

para algún $K(T) > 0$. Utilizando la fórmula de variación de las constantes conseguimos estimaciones de $u(t, u_0)$ in $H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$. En efecto, utilizando (4.4), conseguimos, para algún $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|u(t,u_0)\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)} &\leq \|e^{(\Delta+m(x)I)t}u_0\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)} + \int_0^t \|e^{(\Delta+m(x)I)(t-s)}(g+f_0^e(u(s)))\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)}\,ds \\ &\leq Me^{\alpha t}\|u_0\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)} + M\int_0^t \frac{e^{\alpha(t-s)}}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\|g+f_0^e(u(s))\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\,ds. \end{aligned}$$

así,

$$\|u(t)\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)} \leq Me^{\alpha t}\|u_0\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)} + M\sup_{s\in[0,T]}\|g+f_0^e(u(s))\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\int_0^t \frac{e^{\alpha(t-s)}}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\,ds$$

aentonces

$$\|u(t)\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)} \leq K(T)\big(\|u_0\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)} + \sup_{s\in[0,T]}\|g+f_0^e(u(s))\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\big). \tag{4.16}$$

Utilizando (1.4)

$$\begin{aligned} \|g+f_0^e(u(s))\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} &\leq C\|g\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} + C(\|u(s)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} + \|u(s)\|^{qr}_{L^{qr}(\mathbb{R}^N)}), \\ &\leq C\|g\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} + C(\|U(s)\|^q_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)} + \|U(s)\|^{qr}_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)}). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Por tanto, por (4.15), obtenemos que $s \in [0,T]$, con $T < \infty$

$$\|g+f_0^e(u(s))\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C(T, \|u_0\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)}, \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}, \|D\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}).$$

Llevando esta información a (4.16) obtenemos que para todo $0 \leq t \leq T < \infty$ se tiene

$$\|u(t)\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)} \leq C(T, \|u_0\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)}, \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}, \|D\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}). \tag{4.18}$$

Por tanto la solución es global en $H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$.$\square$ ■ Ahora probaremos que una condición adicional a la disipatividad, permite obtener cotas uniformes de la solución, independiente del dato inicial.

Teorema 4.3. *Sea $1 < q < \infty$. Supongamos que la no linealidad del problema (2.5) satisface las condiciones (4.2), (4.10) con $D \in L^q(\mathbb{R}^N)$, $C \in L^\sigma_U(\mathbb{R}^N)$, $\sigma > \frac{N}{2}$, $\sigma > q$ y que el semigrupo analítico en $X = L^q(\mathbb{R}^N)$ generado por el operador $\Delta + C(x)I$, con dominio $H^{2,q}(\mathbb{R}^N)$ decae exponencialmente. Sea $\phi \in H^{2,q}(\mathbb{R}^N)$ la única solución al problema elíptico*

$$-\Delta\phi = C(x)\phi + D(x),\ x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.19}$$

Entonces la solución de (2.5) satisface para

$$q \leq p \begin{cases} < \infty, & si\ N \leq q \\ \leq \frac{qN}{N-q}, & si\ 1 \leq q < N \end{cases} \tag{4.20}$$

$$\limsup_{t\to\infty}\|u(t,u_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C(\|\phi\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)}) \tag{4.21}$$

y el límite es uniforme para u_0 en subconjuntos acotados de $H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$.

Demostración. (1) Descomponemos la solución U de (4.12) en $U = v + \phi$, donde ϕ es la solución de (4.19). Entonces v satisface la siguiente ecuación lineal homogénea

$$\begin{cases} \partial_t v + (-\Delta - C(x)I)v = 0 \\ v(0) = |u_0| - \phi \end{cases} \tag{4.22}$$

es decir, $v(t) = e^{-(-\Delta - C(x)I)t}(|u_0| - \phi)$ y satisface para $0 \leq \alpha < 1$

$$\|v(t)\|_{H^{2\alpha,q}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{Me^{-at}}{t^\alpha}[\|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} + \|\phi\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}]. \tag{4.23}$$

para algún $a > 0$. Por tanto

$$\|U(t)\|_{H^{2\alpha,q}(\mathbb{R}^N)} \leq \|v(t)\|_{H^{2\alpha,q}(\mathbb{R}^N)} + \|\phi\|_{H^{2\alpha,q}(\mathbb{R}^N)}. \tag{4.24}$$

Tomando límite superior, conseguimos, para $0 \leq \alpha < 1$

$$\limsup_{t\to+\infty} \|U(t)\|_{H^{2\alpha,q}(\mathbb{R}^N)} \leq \|\phi\|_{H^{2\alpha,q}(\mathbb{R}^N)}. \tag{4.25}$$

(2) Sea $B \subset H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ un conjunto acotado de datos iniciales. De (4.14), y (4.24) con $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|w^+(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|w^+(t)\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)} \leq C(t, \|u_0\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)}, \|\phi\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)}) \tag{4.26}$$

donde, por (4.23) y (4.25), el lado derecho de la desigualdad anterior converge exponencialmente en t, y uniformemente para $u_0 \in B$, a una constante lo que implica que

$$\limsup_{t\to\infty} \|u(t, u_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C(\|\phi\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)}). \tag{4.27}$$

Por (4.17), y (4.26)

$$\|f_0^e(u) + g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \hat{C}(t, \|u_0\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)}, \|\phi\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)}, \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}) \tag{4.28}$$

donde de nuevo por (4.23) y (4.25), el lado derecho de la desigualdad anterior converge exponencialmente en t, y uniformemente para $u_0 \in B$, a otra constante de forma que

$$\limsup_{t\to\infty} \|f_0^e(u) + g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C(\|\phi\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^N)}, \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}). \tag{4.29}$$

Por otro lado, tomando λ suficientemente grande de manera que el semigrupo lineal generado por $\Delta + m(x)I - \lambda I$ tenga decaimiento exponencial en $L^q(\mathbb{R}^N)$, en vez de trabajar con la ecuación (2.5), consideramos

$$\partial_t u - \Delta u - m(x)u + \lambda u = f_0(x, u) + g(x) + \lambda u.$$

Utilizando la fórmula de variación de las constantes seguimos, la existencia de un conjunto absorbente para el semigrupo no lineal $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, en $H^{2\alpha,q}(\mathbb{R}^N)$ para $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, aunque no positivamente invariante. □ ■

El siguiente lema permite encontrar un conjunto acotado, absorbente y positivamente invariante

Lema 4.1. *Existe un conjunto acotado $\hat{B}_{0,\alpha}$ en $H^{2\alpha,q}(\mathbb{R}^N)$ invariante, es decir, $T(t)\hat{B}_{0,\alpha} \subset \hat{B}_{0,\alpha}$, $t \geq 0$ y absorbente, es decir, para cada subconjunto acotado B en $H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ existe $t_0(B) > 0$ con $T(t)B \subset \hat{B}_{0,\alpha}$, para cada $t \geq t_0(B)$.*

5. Compacidad asintótica y el atractor global

En esta sección probamos que el semigrupo no lineal $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ obtenido antes, es compacto cuando t tiende a $+\infty$, es decir probamos la compacidad asintótica, ver [4].

Definición 5.1. *Un semigrupo no lineal $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en X espacio de Banach, se dice que es asintóticamente compacto en un espacio de Banach Y si y sólo si para toda sucesión de datos iniciales acotada en X, $\{u_0^n\}$, y $t_n \to +\infty$ entonces $\{T(t_n)u_0^n\}_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión que converge en Y.*

Esto último es equivalente a decir que $\{T(t_n)u_0^n\}_{n\geq 1}$ es precompacto en Y.

Veremos la compacidad asintótica del semigrupo no lineal $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en $L^q(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 5.1. *Con las hipótesis del Teorema 4.3. El semigrupo no lineal $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en $H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ asociado a la ecuación diferencial (2.5) es asintóticamente compacto en $L^q(\mathbb{R}^N)$.*

Demostración. Sea $\{u_0^n\}$ un conjunto de condiciones iniciales acotadas en $H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ y $t_n \to \infty$. Veamos que, para cada $\epsilon > 0$ existe $k = k_0(\epsilon) > 0$, $n_0(\epsilon)$ tal que para todo $k \geq k_0$, $n > n_0(\epsilon)$

$$\int_{|x|>k} |u(t_n, u_0^n)|^q \, dx < \epsilon \tag{5.30}$$

es decir que las soluciones de (2.5) son, asintóticamente, uniformemente pequeñas en el sentido de $L^q(\mathbb{R}^N)$.

En efecto, sea $\epsilon > 0$ arbitrario pero fijo, entonces desde que $v(t,x) = v(t,x,|u_0| - \phi)$, por (4.23), converge exponencialmente a cero en $L^q(\mathbb{R}^N)$ cuando $t \to +\infty$, y esta convergencia es uniforme para $u_0 \in B$ donde B es un conjunto acotado en $H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$, tenemos que, existe un $t_0(\epsilon, B)$ tal que, para todo $t \geq t_0(\epsilon)$ y para todo $u_0 \in B$.

$$\|v(t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} < \epsilon. \tag{5.31}$$

De la integrabilidad de $\phi \in L^q(\mathbb{R}^N)$, ver el Teorema 4.3, existe un $k_0(\epsilon)$ tal que para todo $k \geq k_0(\epsilon)$

$$\int_{|x|>k} |\phi(x)|^q \, dx \leq \epsilon. \tag{5.32}$$

Usando (5.31) y (5.32), de la relación (4.14), de (4.24) con $\alpha = 0$, seguimos que, para todo $t \geq t_0 = t_0(\epsilon, B)$, y para todo $k \geq k_0 = k_0(\epsilon)$,

$$\begin{aligned} \int_{|x|>k} |u(t,u_0)|^q \, dx &\leq C\left(\int_{|x|>k} |v(t)|^q \, dx + \int_{|x|>k} |\phi(x)|^q \, dx\right) \\ &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v(t)|^q \, dx + \int_{|x|>k} |\phi(x)|^q \, dx\right) \leq 2\epsilon C \end{aligned} \tag{5.33}$$

Sea $\epsilon > 0$, $t_0 = t_0(\epsilon, B)$ y $k_0 = k_0(\epsilon)$ como antes, entonces existe $n_0(\epsilon)$ tal que para todo $n \geq n_0$, $t_n \geq t_0$ y usando (5.33) tenemos que, $\forall n \geq n_0(\epsilon)$, $\forall k \geq k_0(\epsilon)$

$$\int_{|x|>k} |u(t_n, u_0^n)|^q \, dx < \epsilon.$$

Sea $k > 0$, $\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq k\}$. Veamos entonces que $\{u(t_n, u_0^n)_{|\Omega_k}\}_{n\geq 1}$ es un conjunto precompacto en $L^q(\Omega_k)$.

En efecto,
(i) Por la cotas uniformes para la solución, $\{u(t_n, u_0^n)\}_{n\geq 1}$ es acotado en $H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$.
(ii) $\{u(t_n, u_0^n)_{|\Omega_k}\}$ es acotado en $H^{1,q}(\Omega_k)$
(iii) por la compacidad de la inclusión $H^{1,q}(\Omega_k) \hookrightarrow L^q(\Omega_k)$ concluimos que $\{u(t_n, u_0^n)_{|\Omega_k}\}$ es precompacto.

En resumen, por todo podemos concluir que, para cada $\epsilon > 0$ existe un cubrimiento finito en $L^q(\mathbb{R}^N)$ de $\{u(t_n, u_0^n)\}_{n\geq 1}$ por bolas de radio a lo más $C\epsilon^{\frac{1}{q}}$, para cierta constante positiva C. ■ Hemos probado que el semigrupo no lineal $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores continuos, definido en $H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ tiene un conjunto absorbente en $H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ y es asintóticamente compacto. Entonces por un resultado, que enunciamos líneas abajo, debido a J.Hale, ver [4], el semigrupo no lineal $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ posee un atractor global $\mathcal{A}$ en $H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$, que tiene las siguientes propiedades
(i) $\mathcal{A}$ es compacto en $H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$
(ii) $\mathcal{A}$ es invariante, $T(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, $\forall t \geq 0$.
(iii) $\mathcal{A}$ atrae cada subconjunto acotado de $H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$. Además es único y maximal en la clase de los subconjuntos acotados e invariantes de $H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$.

6. Dimensión del Atractor

Estudiar la dimensión de Hausdorff del atractor, significa geométricamente, estudiar como evoluciona el elemento de volumen n-dimensional bajo la acción del flujo y tratamos de encontrar la mas pequeña dimensión n en el cual se pueda garantizar que todo elemento de volumen n-dimensional en el espacio fase, se contrae asintóticamente. Esto se traduce a analizar que se verifique la siguiente condición

$$\lim sup \frac{1}{t}\int_0^t Tr_n(A_1(\tau))\, d\tau < 0 \tag{6.1}$$

Teorema 6.1.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = -\lambda_0 u - f_0(u) - g(x), & \lambda_0 > 0,, \quad para\ x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{6.2}$$

si se verifica que,

$$|f_0'(u)| \leq C|u|^{\alpha_0} C_1 u, \quad \alpha_0 > 0 \tag{6.3}$$

donde $C_1(u)$ es una función continua, entonces la dimensión del atractor en el sentido de Hausdorff asociada a (6.2) es finita y se estima una cota superior para su dimensión.

Demostración. En la prueba controlamos la traza del operador que viene de la linealización de la ecuación

$$U_t = \Delta U - \lambda_0 U + f_0'(u(t)) := A_1(t)U$$

Nuestras herramientas son, la desigualdad de Lieb Thirring y el hecho que $\lambda_0 > 0$ implica que el operador $\Delta - \lambda_0 I$ decae exponencialmente.□ ■

- Resultados
- Los artículos [2], [10], [7], trabajan con no linealidades del tipo

$$f(x,u) := -\lambda_0 u - f_0(u) - g(x), \quad \lambda_0 > 0, \ \lambda_0 > 0$$

con fuertes condiciones de signo

$$f_0(u) = 0, \quad f_0'(u) \geq -C \tag{6.4}$$

y condición de crecimiento para la no linealidad

$$|f_0'(u)| \leq C(u + |u|^{p_2}), \quad 0 \leq p_2 \leq p_0, \ p_0 = min\{\frac{4}{n}, \ \frac{2}{n-2}\}, \quad p_1 \geq 0, \ para \ n \leq 2 \qquad (6.5)$$

• Observar que el espectro de $-\Delta + \lambda_0 I$ es estrictamente positivo.
• En este trabajo presentamos una clase de no linealidades, mas amplias que las estudiadas por los autores, donde

$$f(x, u) := m(x)u - f_0(x, u) - g(x), \quad \lambda_0 > 0,$$

donde $m(x) \in L_U^\sigma(\mathbb{R}^N)$, con $\sigma > \frac{N}{2}$.
• Hacemos un estudio sistemático de la Teoría lineal y no lineal de la ecuación (1.1)
• Introducimos no linealidades que dependen también de la variable espacial, garantizando que el problema (1.1) está bien planteado en los espacios $H^{1,q}(\mathbb{R}^N)$.
• Con menos restricciones en nuestras hipótesis, obtenemos nuestros resultados para una amplia clase de no linealidades de la ecuación, que tiene importancia por sus aplicaciones.
• Estudiar la dimensión de Hausdorff del atractor, significa geométricamente, estudiar como evoluciona el elemento de volumen n-dimensional bajo la acción del flujo y tratamos de encontrar la mas pequeña dimensión n en el cual se pueda garantizar que todo elemento de volumen n-dimensional en el espacio fase, se contrae asintóticamente. Esto se traduce a analizar que se verifique la siguiente condición

$$\lim sup \frac{1}{t} \int_0^t Tr_n(A_1(\tau)) \, d\tau < 0 \qquad (6.6)$$

Las técnicas que utilizan [2], [10] y [7], presentan dificultades ante la presencia del potencial en la no linealidad, entonces para controlar la Traza utilizamos herramientas nuevas como son, La desigualdad de Lieb-Thirring y un teorema de perturbación de potenciales.

En el caso en que introducimos un potencial en la no linealidad, hay un término que se tiene que controlar a diferencia del que se desarrolla en [2], [10] y [7].

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] A.V.Babin, M.I.Vishik, Atractors of Evolution Equations. Studies In Mathematics And Its Applications, Volume 25 North-Holland, (1992).

[2] A.V.Babin, M.I.Vishik, Atractors Of Partial Differential Evolution Equations in Unbounded Domain. Proc. Royal. Society. Edinburgh, 116A, 221-243, (1990).

[3] H. Brezis, Analisis funcional teoría y aplicaciones. Alianza Editorial, (1984).

[4] J. Hale, Asymptotic Behavior Of Dissipative System. Mathematical Surveys And Monographs, Number 25, Published by the American Mathematical Society, (1989).

[5] D.Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations,Lecture Notes Math, Vol 840, Springer, Berlin, (1981).

[6] B. Simon, Schrödinguer Semigroups . American Mathematical Society , Volume 7, n^0 3, pp 447 – 526, (1982).

[7] M. Prizzi, A Remark On Reaction-Diffusion Equations In Unbounded Domains. Discrete And Continuous Dynamical Systems Volume 9, Number 2, pp 281 – 286 March (2003).

[8] J. Robinson, Infinite-Dimensional Dynamical Systems An Introduction to Dissipative Parabolic PDES and the Theory of Global Atractors. University Press, (2001).

[9] R.Temam, Infinite dimensional dynamical systems in Mechanics and Physics. Second Edition, Springer-Verlag, New York, (1997).

[10] B. Wang, Atractors for reaction-diffusión equations in unbounded domains. Physica *D*, 2199, 1 – 12, (1999).