

SIMULACIÓN COMPUTACIONAL DE UN SISTEMA TERMOELÁSTICO USANDO PYTHON

José Luyo Sanchez & Alonso Mansilla***

Resumen: En el presente trabajo mostramos el desarrollo de un esquema numérico en base a diferencias finitas para la aproximación numérica a la solución de un sistema lineal acoplado termoelástico unidimensional. Desarrollamos las condiciones necesarias para la estabilidad, consistencia y convergencia del esquema obtenido.

En base al método de Von Neumann, obtenemos cotas necesarias para la estabilidad condicional de dicho algoritmo y en base a un ejemplo contrastamos computacionalmente la solución aproximada obtenida mediante el esquema en diferencias finitas con la solución analítica del sistema de ecuaciones.

Palabras clave: Sistema termoelástico, diferencias finitas, estabilidad numérica, python.

COMPUTATIONAL SIMULATION OF A SYSTEM THERMOELASTICITY USING PYTHON

Abstract: In this work, we present the development of a numerical scheme based in finite differences for numerical approximation to the solution of a unidimensional coupled linear thermoelastic system. Development the necessaries conditions for stability, consistence and convergence of the numerical scheme.

Based in Von Neumann's method, we get the conditions for conditional stability of this algorithm and based in an example we contrast computationally the approximate the approximate solution got by the finite differences scheme with the analytic solution.

Key words: Thermoelastic system, finite difference, numerical stability, python.

1. Preliminares

En este trabajo presentamos el desarrollo de un algoritmo numérico para aproximar la solución de un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales parciales que describe el comportamiento termoelástico de una cuerda unidimensional y de longitud finita, bajo ciertas condiciones físicas tales como homogeneidad y linealidad del material.

El algoritmo que planteamos es formado en base a aplicar el método de diferencias finitas en el sistema de ecuaciones, esto luego de eliminar el acoplamiento de estas mediante la generación de un sistema modificado que lleve el sistema acoplado a una ecuación lineal de evolución.

La forma en la cual se elimina el acoplamiento, para luego de esto aplicar el método de diferencias finitas y obtener aproximaciones numéricas en base al esquema, puede ser utilizada del mismo modo para analizar ecuaciones más complejas o incluso ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

Debido a la diversidad de aproximaciones posibles hacia los operadores diferenciales existen diversos algoritmos para un mismo problema, pero la mayoría de estos no son de utilidad práctica debido a la falta de información sobre la estabilidad, consistencia y convergencia, conceptos claves dentro del análisis numérico y los cuales garantizan la confiabilidad de los resultados generados. A partir de esto, se desarrollan los conceptos anteriores para el esquema desarrollado en el presente trabajo, via el criterio de von Neumann conseguimos las condiciones necesarias para asegurar las estabilidad del esquema.

La confiabilidad de los resultados obtenidos por el esquema se ven asegurados mediante el análisis de la consistencia y el consecuente estudio de la convergencia mediante el teorema de equivalencia de Lax-Rightmyer.

*UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: jluyos@unmsm.edu.pe

**UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: alonso.mansilla.a@gmail.com

2. Aproximación numérica a la solución del sistema termoelástico

El sistema lineal acoplado que describe el sistema que proponemos es

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + \alpha\theta_x &= 0 & (0, L) \times (0, T) \\ \theta_t - \theta_{xx} + \beta u_{xt} &= 0 & (0, L) \times (0, T) \end{aligned} \quad (1)$$

con condiciones iniciales

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad x \in (0, L) \quad (2)$$

y condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(L, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(L, t) = 0 \quad t > 0 \quad (3)$$

En dichas ecuaciones, $u(x, t)$ y $\theta(x, t)$ representan, respectivamente, el desplazamiento espacial con respecto a la posición de equilibrio y la variación de la temperatura con respecto al equilibrio térmico, ambos en la ubicación espacial x y en el instante de tiempo t . Las funciones $u_0(x)$, $u_1(x)$ y $\theta_0(x)$ son el desplazamiento, velocidad y temperatura iniciales en la cuerda, mientras que los parámetros α y β con considerados valores conocidos para cada material.

La buena colocación del sistema, en el sentido de Hadamard, y el decaimiento exponencial de la energía ha sido estudiada por diversos autores, ver por ejemplo [6], [7] y [10]. A fin de utilizar un esquema a partir de series de Taylor, consideremos $T > 0$ y las condiciones de regularidad

$$u \in C^3(0, T; \mathcal{W}), \quad \theta \in C^2(0, T; \mathcal{V}), \quad (u_0, u_1, \theta_0) \in \mathcal{W} \times \mathcal{W} \times \mathcal{V}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \{w \in C^4(0, L); w(0) = w(L) = 0\} \\ \mathcal{V} &= \{v \in C^3(0, L); v'(0) = v'(L) = 0\} \end{aligned}$$

Con estas condiciones, construiremos un algoritmo discreto en diferencias finitas para aproximar la solución del sistema (1)-(3). Para esto, consideramos la ecuación matricial equivalente a (1):

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \mathcal{F}W, \quad W(x, 0) = W_0 \quad (4)$$

donde

$$W = (u, u_t, \theta)^T, \quad W_0 = (u_0, u_1, \theta_0)$$

y el operador \mathcal{F} es definido como

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ \partial_x^2 & 0 & -\alpha\partial_x \\ 0 & -\beta\partial_x & \partial_x^2 \end{bmatrix}$$

de esta manera, el sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas se reduce a una ecuación diferencial parcial de evolución.

La ecuación (4) es válida en el dominio $\Omega = (0, L) \times (0, T)$, el cual será necesario discretizar en un conjunto de puntos. Esta malla de puntos será determinada tomando una partición uniforme de tamaño Δx en la dimensión espacial y una partición del mismo modo uniforme, de tamaño Δt en la variable temporal. Los valores Δx y Δt son denominados tamaños de paso.

Considerando un punto arbitrario y fijo (i, j) dentro de la malla de puntos, la solución $W_i^j = W(i\Delta x, j\Delta t)$ obedece la relación

$$\frac{\partial}{\partial t} W_i^j = \mathcal{F}W_i^j, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq M-1$$

$$W_i^0 = W_0(i\Delta x), \quad 0 \leq i \leq N$$

donde $N = \frac{L}{\Delta x}$ y $M = \frac{T}{\Delta t}$ son el número de puntos en la partición del espacio y el tiempo, respectivamente.

Empleando la aproximación

$$\frac{\partial}{\partial t} W_i^j \approx \frac{W_i^{j+1} - W_i^j}{\Delta t}$$

obtenemos una relación semidiscreta a la solución en el instante de tiempo $j + 1$, la cual se basa en conocer la solución en un tiempo anterior j :

$$W_i^{j+1} = (I + \Delta t \mathcal{F}) W_i^j$$

Para obtener un esquema totalmente discretizado, debemos obtener un equivalente discreto al operador \mathcal{F} , para esto usando las aproximaciones:

$$\partial_x W_i^j \approx \frac{W_{i+1}^j - W_{i-1}^j}{2\Delta x} := \hat{d}_x W_i^j, \quad \partial_x^2 W_i^j \approx \frac{W_{i+1}^j - 2W_i^j + W_{i-1}^j}{\Delta x^2} := \hat{d}_x^2 W_i^j$$

podemos considerar

$$\mathcal{F} \approx \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ \hat{d}_x^2 & 0 & -\alpha \hat{d}_x \\ 0 & -\beta \hat{d}_x & \hat{d}_x^2 \end{bmatrix} := \mathcal{F}_h$$

y el esquema discreto aproximado será

$$W_i^{j+1} = G W_i^j \quad (5)$$

donde la matriz G es dada por

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 \\ \Delta t \hat{d}_x^2 & 1 & -\alpha \Delta t \hat{d}_x \\ 0 & -\beta \Delta t \hat{d}_x & 1 + \Delta t \hat{d}_x^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Siendo conocidos los valores de la solución aproximada en el instante de tiempo $j = 0$, el esquema (5) proporciona la aproximación a la solución para cada instante de tiempo j y para cada punto i del espacio.

2.1. Estabilidad del esquema numérico

Para verificar la estabilidad, nos enfocaremos en el análisis de von Neumann. Considerando una solución de la forma

$$u_i^j = f_j \exp(\eta i \Delta x \hat{i}); \quad \hat{i} = \sqrt{-1} \quad (7)$$

luego obtenemos las relaciones

$$\hat{d}_x = \frac{1}{\Delta x} \hat{i} \sin(2\varphi), \quad \hat{d}_x^2 = -\frac{4}{\Delta x^2} \sin^2(\varphi), \quad \varphi = \frac{\eta \Delta x}{2} \quad (8)$$

y reemplazando estas relaciones en (6), obtenemos la denominada matriz de amplificación de errores

$$\mathcal{G}(\Delta x, \Delta t, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 \\ -\frac{4\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\varphi) & 1 & -\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \hat{i} \sin(2\varphi) \\ 0 & -\beta \frac{\Delta t}{\Delta x} \hat{i} \sin(2\varphi) & 1 - \frac{4\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\varphi) \end{bmatrix} \quad (9)$$

A fin de asegurar la estabilidad del esquema, es necesario obtener las condiciones que garanticen que el radio espectral de la matriz \mathcal{G} sea menor a la unidad.

Teorema 2.1 (Teorema de Estabilidad). Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ parámetros positivos. Bajo las condiciones sobre los tamaños de paso

$$\Delta x < \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}, \quad \Delta t < \frac{\Delta x^2}{2} \quad (10)$$

el esquema numérico aproximado al sistema termoelástico dado en (5) es un esquema estable.

Demostración. Definimos las matrices reales \mathcal{G}_{\Re} y \mathcal{G}_{\Im} definidas como la parte real e imaginaria de $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\Delta x, \Delta t, \varphi)$, respectivamente, esto es:

$$\mathcal{G}_{\Re} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 \\ -4\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\varphi) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 4\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\varphi) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathcal{G}_{\Im} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(2\varphi) \\ 0 & -\beta\frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(2\varphi) & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Así denotado, si $\xi = \xi_{\Re} + i\xi_{\Im}$ es un autovalor de \mathcal{G} , con $\xi_{\Re}, \xi_{\Im} \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\mathcal{G}W = \xi W \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{G}_{\Re}W + i\mathcal{G}_{\Im}W = \xi_{\Re}W + i\xi_{\Im}W$$

igualando la parte real e imaginaria de ambos miembros de la ecuación anterior, vemos que cada autovalor $\xi \in \mathbb{C}$ de \mathcal{G} es combinación de los autovalores de \mathcal{G}_{\Re} y \mathcal{G}_{\Im} .

Autovalores de la matriz \mathcal{G}_{\Im}

Sea $\xi_{\Im} \in \mathbb{R}$ autovalor de la matriz real \mathcal{G}_{\Im} , luego ξ_{\Im} es solución de la ecuación

$$\det(\xi_{\Im}I - \mathcal{G}_{\Im}) = 0$$

con lo cual, los autovalores de \mathcal{G}_{\Im} son cada uno de los elementos del conjunto

$$\left\{ 0, \sqrt{\alpha\beta} \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(2\varphi), -\sqrt{\alpha\beta} \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(2\varphi) \right\}$$

Autovalores de la matriz \mathcal{G}_{\Re}

Sea $\xi_{\Re} \in \mathbb{R}$ autovalor de la matriz real \mathcal{G}_{\Re} , este es solución de la ecuación

$$\det \begin{bmatrix} \xi_{\Re} - 1 & -\Delta t & 0 \\ 4\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\varphi) & \xi_{\Re} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{\Re} - 1 + 4\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\varphi) \end{bmatrix} = 0$$

y como $\xi_{\Re} \in \mathbb{R}$, concluimos que

$$\xi_{\Re} = 1 - 4\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\varphi).$$

Autovalores de la matriz de amplificación de errores \mathcal{G}

Conociendo los autovalores de las matrices \mathcal{G}_{\Re} y \mathcal{G}_{\Im} , obtenemos los autovalores $\xi_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, 2, 3$) de la matriz compleja \mathcal{G} , siendo estos:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 1 - 4\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\varphi) \\ \xi_2 &= 1 - 4\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\varphi) - i\sqrt{\alpha\beta} \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(2\varphi) \\ \xi_3 &= 1 - 4\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\varphi) + i\sqrt{\alpha\beta} \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(2\varphi) \end{aligned}$$

Al considerar las hipótesis del teorema

$$\Delta x < \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}, \quad \Delta t < \frac{\Delta x^2}{2}$$

podemos asegurar que el módulo de cada uno de estos es menor a la unidad. En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2} &\Rightarrow 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\varphi) \leq 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < 2 \\ &\Rightarrow -1 < 1 - 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\varphi) < 1 \\ &\Rightarrow |\xi_1| < 1 \end{aligned}$$

Análogamente

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t \left(\frac{4}{\Delta x^2} - \alpha\beta \right) + \alpha\beta\Delta t < 2 \quad (13)$$

además se tiene

$$\Delta x < \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}} \Rightarrow 0 < \frac{4}{\Delta x^2} - \alpha\beta \Rightarrow \left(\frac{4}{\Delta x^2} - \alpha\beta \right) \sin^2(\varphi) < \frac{4}{\Delta x^2} - \alpha\beta$$

y combinando este último resultado con la relación obtenida en (13) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2} &\Rightarrow \Delta t \left(\frac{4}{\Delta x^2} - \alpha\beta \right) \sin^2(\varphi) + \alpha\beta\Delta t < 2 \\ &\Rightarrow 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\varphi) + \alpha\beta\Delta t (1 - \sin^2(\varphi)) < 2 \\ &\Rightarrow 16 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^4} \sin^4(\varphi) + \alpha\beta \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (4 \sin^2(\varphi) (1 - \sin^2(\varphi))) < 8 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\varphi) \\ &\Rightarrow 16 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^4} \sin^4(\varphi) + \alpha\beta \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (\sin^2(2\varphi)) < 8 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\varphi) \\ &\Rightarrow 1 - 8 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\varphi) + 16 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^4} \sin^4(\varphi) + \alpha\beta \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (\sin^2(2\varphi)) < 1 \\ &\Rightarrow \left(1 - 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\varphi) \right)^2 + \left(\sqrt{\alpha\beta} \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(2\varphi) \right)^2 < 1 \\ &\Rightarrow |\xi_i| < 1, \quad i = 2, 3 \end{aligned}$$

con lo cual podemos asegurar que el radio espectral de la matriz de amplificación de errores \mathcal{G} es menor a la unidad, garantizando con esto la estabilidad del esquema numérico presentado en (5). ■

2.2. Consistencia y convergencia del esquema numérico

Consideremos u una función real suficientemente regular. En base a la serie de Taylor de dicha función en el punto $(i\Delta x, j\Delta t)$ y con la notación utilizada anteriormente, podemos expresar los siguientes operadores diferenciales como:

$$\begin{aligned} \partial_t u_i^j &= \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \\ \partial_x u_i^j &= \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) = \hat{d}_x u_i^j + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ \partial_x^2 u_i^j &= \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) = \tilde{d}_x^2 u_i^j + \mathcal{O}(\Delta x^2) \end{aligned}$$

Con esto, el operador \mathcal{F} puede ser expresado como

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ \partial_x^2 & 0 & -\alpha\partial_x \\ 0 & -\beta\partial_x & \partial_x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ \tilde{d}_x^2 & 0 & -\alpha\hat{d}_x \\ 0 & -\beta\hat{d}_x & \tilde{d}_x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & -\beta & 1 \end{bmatrix} \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

con lo cual, denotando por \mathcal{M} la segunda matriz presente en el término derecho, conseguimos la relación $\mathcal{F} = \mathcal{F}_h + \mathcal{M}\mathcal{O}(\Delta x^2)$. Teniendo en cuenta las relaciones anteriores, reemplazando en la ecuación diferencial (4) tenemos

$$\frac{W_i^{j+1} - W_i^j}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) = (\mathcal{F}_h + \mathcal{M}\mathcal{O}(\Delta x^2)) W_i^j$$

de donde, despejando se obtiene

$$W_i^{j+1} - (I + \Delta t \mathcal{F}_h) W_i^j = \mathcal{M} \Delta t \mathcal{O}(\Delta x^2) W_i^j - \Delta t \mathcal{O}(\Delta t)$$

En esta última ecuación, el lado izquierdo de la igualdad representa el esquema numérico (5), con lo que el lado derecho es el error de truncamiento de dicho esquema; esto es, el error producido al despreciar el error de aproximación en las series de Taylor utilizadas para cada operador diferencial.

Con lo anterior, el error de truncamiento está dado por la expresión

$$e_T = \mathcal{M} \Delta t \mathcal{O}(\Delta x^2) W_i^j - \Delta t \mathcal{O}(\Delta t)$$

y teniendo en cuenta las condiciones de regularidad exigidas para las funciones, es simple notar que dicho error satisface

$$\|e_T\|_\infty \rightarrow 0, \quad \text{cuando } \Delta x, \Delta t \rightarrow 0$$

mostrando con esto la consistencia del esquema. La convergencia, y con esto la robustez del esquema numérico, se sigue del teorema de equivalencia de Lax [13].

3. Eficiencia computacional del esquema

Con el fin de confrontar los resultados obtenidos numéricamente a partir del esquema numérico obtenido con los resultados obtenidos teóricamente, es necesario conocer una solución analítica del sistema (1)-(3); para esto construimos una de estas soluciones.

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + \theta_x &= 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ \theta_t - \theta_{xx} + u_{xt} &= 0, & x \in (0, 1), t > 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad \theta(x, 0) = 0, \quad \forall x \in (0, 1) \quad (15)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (16)$$

Sea (u, θ) la solución al sistema y supongamos que puede ser expresada como

$$u(x, t) = g(t) \text{sen}(2\pi x) \quad \theta(x, t) = h(t) \cos(2\pi x) \quad (17)$$

para funciones g y h adecuadas. Reemplazando la solución así supuesta en el sistema (14), obtenemos las condiciones a cumplir por las funciones g y h , estas son

$$\begin{aligned} g''(t) + 4\pi^2 g(t) - 2\pi h(t) &= 0 \\ h'(t) + 4\pi^2 h(t) + 2\pi g'(t) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

despejando una expresión para la función $h(t)$ en la primera de las ecuaciones anteriores resulta

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} g''(t) + 2\pi g(t) \quad (19)$$

y reemplazando esto en la segunda ecuación de (18) obtenemos la ecuación diferencial

$$g'''(t) + 4\pi^2 g''(t) + 8\pi^2 g'(t) + 16\pi^2 g(t) = 0 \quad (20)$$

para obtener la función que determina la solución $u(x, t)$, consideramos el polinomio característico

$$r^3 + 4\pi^2 r^2 + 8\pi^2 r + 16\pi^4 = 0$$

De acuerdo a las fórmulas de Cardano, la ecuación anterior tiene como solución una raíz real z_1 y dos imaginarias z_2, z_3 . Sean $r_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$) tales que podemos expresar las raíces como

$$z_1 = r_1, \quad z_2 = r_2 + \hat{i}r_3, \quad z_3 = r_2 - \hat{i}r_3$$

Con esto, expresamos la función $g(t)$ como

$$g(t) = c_1 e^{r_1 t} + e^{r_2 t} (c_2 \cos(r_3 t) + c_3 \sin(r_3 t))$$

donde $c_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$). Para determinar el valor de estas últimas constantes, nos valemos de las condiciones iniciales del problema

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad \theta(x, 0) = 0$$

y considerando $u(x, t) = g(t) \sin(2\pi x)$, $\theta(x, t) = h(t) \cos(2\pi x)$ obtenemos las igualdades

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = 0, \quad h(0) = 0.$$

Para obtener una tercera relación que permita resolver los valores para cada c_i ($i = 1, 2, 3$), usamos la relación (19) y obtenemos

$$g''(0) = -4\pi^2,$$

luego diferenciando la función $g(t)$ y usando las relaciones anteriores obtenemos un sistema con tres incógnitas

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ c_1 r_1 + c_2 r_2 + c_3 r_3 &= 0 \\ c_1 r_1^2 + r_2^2 c_2 + 2c_3 r_3 r_2 - c_2 r_3^2 &= -4\pi^2 \end{aligned}$$

de donde obtenemos los valores para cada constante involucrada en la función $g(t)$, siendo estas

i	1	2	3
r_i	-38.479092	-0.499663	6.346066
c_i	0.000691	0.999309	0.082893

Con lo cual, la función $g(t)$ está totalmente definida y de la igualdad

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} g''(t) + 2\pi g(t)$$

también lo está la función $h(t)$, dejando explícita la solución (u, θ) del sistema.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left((0.08290 \sin(6.3446 t) + 0.9993 \cos(6.3446 t)) e^{(-0.4997 t)} + 0.0006914 e^{(-38.4791 t)} \right) \sin(2\pi x) \\ \theta(x, t) &= (0.51325 e^{(-37.9791 t)} + 1.67583 \sin(6.3446 t) - 18.25248 \cos(6.3446 t)) \pi \exp(-0.4997 t) \cos(2\pi x) \end{aligned}$$

3.1. Confrontación de resultados

Considerando el sistema anterior, del cual poseemos la expresión de la solución analítica, podemos comparar el resultado obtenido por el esquema numérico, consiguiendo calcular el error obtenido. Tomaremos como tamaños de paso, los valores

$$\Delta x = 10^{-2}, \quad \Delta t = 10^{-5}$$

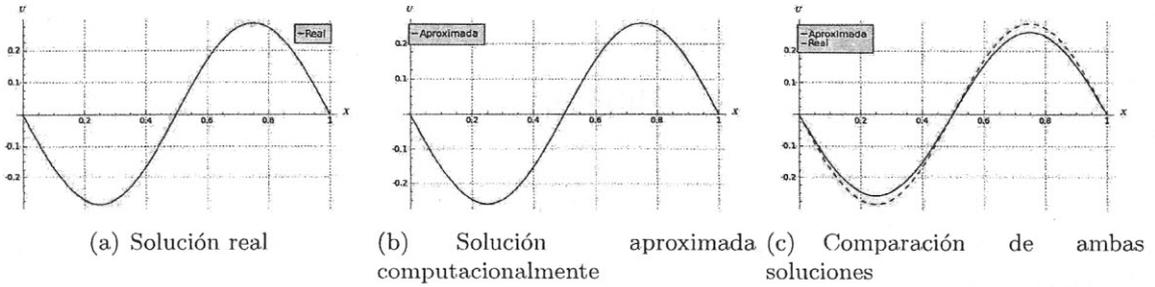


Figura 1: Resultados computacionales para un tiempo $t = 2.5$

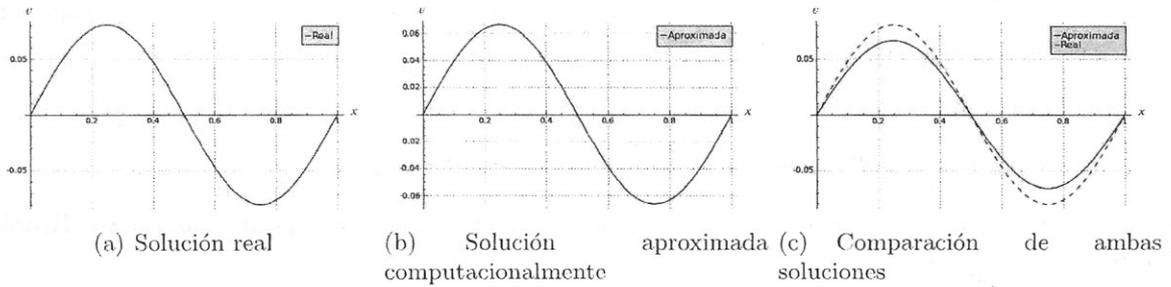


Figura 2: Resultados computacionales para un tiempo $t = 5$

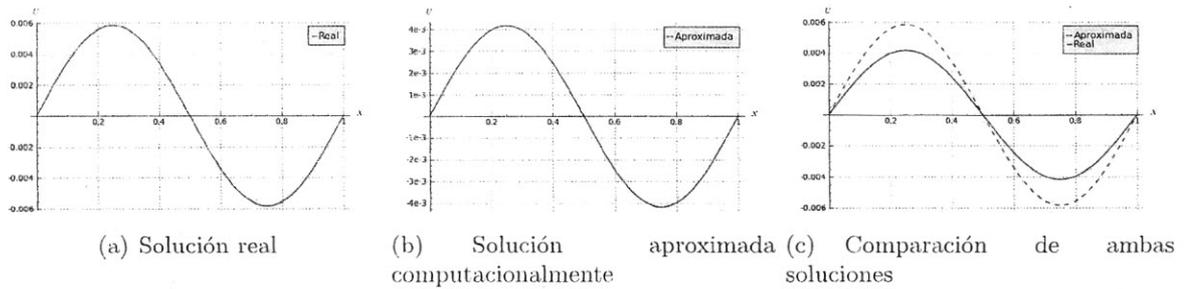


Figura 3: Resultados computacionales para un tiempo $t = 10$

Bibliografía

- [1] Atkinson, K.; Han, W. *Theoretical Numerical Analysis: a functional analysis framework* Texts in applied mathematics; 39.
- [2] Burden, R.; Faires, J. (2002) *Análisis Numérico* Thomson Learning, Mexico, D.F.
- [3] Brezis, H. (1983) *Analyse fonctionnelle: théorie et applications* Masson, Paris.
- [4] Carbajal P., E. (1999) *Una clase de algoritmos de alta precisión para un sistema acoplado*. PESQUIMAT, Revista de la Unidad de Post Grado - UNMSM, Vol. 3, Nro. 1, pag. 1-14.
- [5] Codeço, F. (2007) *Computação científica com Python : Uma introdução à programação para cientistas* Petrópolis - RJ.
- [6] Dafermos, C. M. (1968) *On the existence and the asymptotic stability of solution to the equations of linear thermoelasticity* Arch. Rational Mech. Anal., 29, 241-271.
- [7] Jiang, S.; Racke, R. (2000) *Evolution Equations in Thermoelasticity*. Chapman & Hall/CRC.
- [8] Johnson, A. (2006) *The Fundamental Theorem of Numerical Analysis*.
- [9] Kincaid, D.; Ward, E. (1990) *Numerical analysis : mathematics of scientific computing* Brooks/Cole Publishing Company.
- [10] Muñoz R., J. (1992) *Energy decay rates in linear thermoelasticity* Funkcialaj Ekvacioj, 35(1), 19-30.
- [11] Pereira, D.C.; Menzala, G.P. (1989) *Exponential decay of solutions in thermoelasticity* Comp. Appl. Math., 8, 192-204.
- [12] Racke, R. (1993) *Exponential decay for a class of initial boundary value problems in thermoelasticity* Comp. Appl. Math., 12, 67-80.
- [13] Richtmyer, R.; Morton, K. (1967) *Difference Methods for Initial Value Problems* Interscience Publishers, New York.