PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XIV N°1, pp. 46-57, Lima - Perú, Julio 2011

SINGULARIDAD DE SOLUCIONES PARA UN SISTEMA DE KIRCHHOFF NO LINEAL VISCOELÁSTICO CON TÉRMINO DISIPATIVO

*Teófanes Quispe Méndez**

Resumen: En el presente trabajo, estudiamos la singularidad en tiempo finito de las soluciones de un problema mixto relativo a un sistema de ecuaciones de Kirchhoff no lineal viscoelástico con término disipativo.
Palabras clave: Singularidad de soluciones, Solución Local, Sistema de ecuaciones de Kirchhoff no lineal viscoelástico, Sistema de ecuaciones integro-diferencial.

BLOW-UP OF SOLUTIONS FOR A VISCOELASTIC NONLINEAR KIRCHHOFF'S SYSTEM WITH DISSIPATIVE TERM

Abstract: In present work, we study the blow-up infinite time of solutions to the mixed problem relative to a system of viscoelastic nonlinear Kirchhoff's equations with dissipative term.
Key words: Blow-up of solutions, Local solution, System of viscoelastic nonlinear Kirchhoff's equations, System of integro-differential equations.

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo consideramos el problema de valor inicial y de frontera para el siguiente sistema de ecuaciones de Kirchhoff con memoria:

$$u'' - M\left(|\nabla u|_2^2\right)\Delta u + g_1 * \Delta u - \Delta u' = f_1(u,v) \text{ en } \Omega \times]0,\infty[,1.1 \quad (1)$$

$$v'' - M\left(|\nabla v|_2^2\right)\Delta v + g_2 * \Delta v - \Delta v' = f_2(u,v) \text{ en } \Omega \times]0,\infty[,1.2 \quad (2)$$

con condiciones iniciales,

$$u(x,0) = u_0(x),\ u'(x,0) = u_1(x),\ \text{en } \Omega,1.3 \quad (3)$$

$$v(x,0) = v_0(x),\ v'(x,0) = v_1(x),\ \text{en } \Omega,1.4 \quad (4)$$

y condiciones de frontera,

$$u(x,t) = 0,\ \text{en } \partial\Omega \times]0,\infty[.1.5 \quad (5)$$

$$v(x,t) = 0,\ \text{en } \partial\Omega \times]0,\infty[.1.6 \quad (6)$$

donde Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, con frontera suficientemente regular $\partial\Omega$, ∇ es el operador gradiente, Δ es el operador laplaciano, $M(s)$ es una función real positiva de clase C^1 para $s \geq 0$, $g_i(t)$, $i = 1,2$, son funciones reales no negativas de clase C^1 para $t \geq 0$, $f_i(s,r)$, $i = 1,2$, son funciones reales no lineales continuamente diferenciables para $(s,r) \in \mathbb{R}^2$, $w' := \frac{\partial w}{\partial t}$, $w'' := \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, $|\nabla w|_2^2 := \int_\Omega |\nabla w(x,t)|^2 dx$ y $(g * w)(x,t) := \int_0^t g(t-s)w(x,s)ds$.

El caso $n = 1$ y $u = v$, la ecuación (1.1) describe vibraciones transversales no lineales de una cuerda de material viscoelástico, fuertemente tensa entre dos puntos fijos $x = 0$ y $x = L$, en el eje x del plano xu. En estas condiciones la ecuación resultante es

$$\rho h u'' - \left(p_o + \frac{Eh}{2L}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_2^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g * \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = f(u), \quad (1.7)$$

*UNMSMS, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: tquispem@unmsm.edu.pe

donde $u = u(x,t)$ es el desplazamiento transversal en el espacio de coordenada x y en el tiempo t, ρ es la densidad de masa, h es el área de la sección transversal de la cuerda, p_0 es la tensión inicial, E es el módulo de Young del material, β es el coeficiente de la fuerza amortiguadora, $g(t)$ es la función de relajación, y $f(u)$ es la fuerza restauradora. Cuando $\beta \equiv g \equiv 0$ y la cuerda es de material elástico, se tiene que la ecuación (1.7) es la propuesta y estudiada por Kirchhoff en [3]. El caso general $n \geq 1$ y $u = v$, la ecuación (1.1) tiene diversas aplicaciones, como en el área de la óptica no lineal, física del plasma, mecánica de fluidos y entre otras.

El caso $M \equiv 1$, $g_i \equiv 0$ y sin término disipativo, el sistema (1.1) – (1.2) describe la interacción de ciertas partículas elementales en un campo electromagnético, llamadas mesones. Un modelo matemático clásico que describe la interacción de los mesones es el sistema propuesto por Segal [14] que mostramos a continuación:

$$\begin{aligned} u'' - \Delta u + \alpha^2 u + g^2 v^2 u &= 0, \\ v'' - \Delta v + \beta^2 v + h^2 u^2 v &= 0, \end{aligned} \tag{1.8}$$

donde α y β son las masas de los mesones u y v respectivamente y g, h son las constantes de interacción.

Cuando g_i son funciones no triviales, $M \equiv 1$ y sin considerar términos disipativos, el sistema (1.1) – (1.2) fue investigado por Andrade y Mognon [1], quienes obtienen existencia global para $f_1(u,v) = -|u|^{\rho-1} u |v|^{\rho}$ y $f_2(u,v) = -|v|^{\rho-1} v |u|^{\rho}$; por su parte Santos [13], obtiene existencia global y decaimiento exponencial para $f_1(u,v) = -\alpha(u-v)$ y $f_2(u,v) = \alpha(u-v)$. Cuando $g_i \equiv 0$, $M \equiv 1$ y sin considerar términos disipativos, el sistema (1.1) – (1.2) fue también estudiado por Milla Miranda y Medeiros [6], quienes obtienen existencia global para $f_1(u,v) = |v|^{\rho+2} |u|^{\rho} u - u$ y $f_2(u,v) = |u|^{\rho+2} |v|^{\rho} v - v$; asimismo, Li y Tsai [4], obtienen existencia local, existencia global y singularidad de soluciones para $f_1(u,v) = -m_1^2 u - 4\lambda(u+\alpha v)^3 - 2\beta u v^2$ y $f_2(u,v) = -m_2^2 v - 4\alpha\lambda(u+\alpha v)^3 - 2\beta u^2 v$. Cuando $g_i \equiv 0$ y M es una función no trivial, el sistema (1.1) – (1.2) fue estudiado por Quispe Méndez [7,9], quien obtiene soluciones locales y singularidad de soluciones para f_i específicas y sin términos disipativos; por su parte Wu y Tsai [18], obtienen existencia local y singularidad de soluciones para f_i genéricas y adicionando términos disipativos. Cuando g_i y M son funciones no triviales, el sistema (1.1) – (1.2) fue estudiado por Quispe Méndez y Carrillo Díaz [12], quienes obtienen soluciones locales para f_i genéricas y con términos disipativos.

En este trabajo probaremos la propiedad de singularidad en tiempo finito de las soluciones del problema (1.1) – (1.6), cuando g_i son funciones continuas no negativas, M es una función continua positiva y las f_i son funciones reales no lineales. Obtendremos la singularidad de soluciones, con energía inicial negativa, nula y positiva restringida, empleando el método directo [4]. Asimismo hallaremos las estimativas para el tiempo finito de explosión. En la discusión del problema emplearemos las estrategias y técnicas inspiradas en los trabajos de Wu y Tsai [16, 17] y Quispe Méndez [11].

2. PRELIMINARES

En esta sección presentamos algunas notaciones, conceptos y resultados sin demostración, los cuales serán usados en el desarrollo del presente trabajo.

Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, con frontera suficientemente $\partial\Omega$. Denotamos el producto interno y la norma de $L^2(\Omega)$ y $L^p(\Omega)$, con $(.,.)$ y $|\,.\,|_p$, respectivamente, para $1 \leq p \leq \infty$. Además $((.,.))$ y $\|.\|$, denotaran el producto interno y la norma de $H_0^1(\Omega)$, donde $((u,v)) := \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx$ es la forma de Dirichlet.

Sea X un espacio de Banach, T y p números reales tales que $0 < T \leq \infty$ y $1 \leq p \leq \infty$. Representamos con $L^p(0,T;X)$ al espacio de Banach de las funciones vectoriales $u :]0,T[\longrightarrow X$ medibles con $\|u(t)\|_X \in L^p(0,T)$, dotado de la norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := \sup_{0<t<T} \operatorname{ess} \|u(t)\|_X, \quad p = \infty.$$

Similarmente, cuando $0 < T < \infty$, representamos con $C([0,T];X)$ al espacio de Banach de las funciones continuas $u : [0,T] \longrightarrow X$, dotado de la norma

$$\|u\|_{C([0,T];X)} := \sup_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_X .$$

Denotamos $w' := \frac{\partial w}{\partial t}$, $w'' := \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, $w(t)(x) := w(x,t)$, $L^1 := L^1(0,T)$ y $L^\infty := L^\infty(\Omega)$.

Hipótesis. Imponemos sobre las funciones reales $g_i(t)$, $M(s)$ y $f_i(r,s)$ las siguientes condiciones:

$(H1)$ $g_i \in C^1([0,\infty[)$, acotada, $g_i(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$, existe una constante positiva m_0 tal que

$$m_0 - \int_0^\infty g_i(s)ds := l_i > 0$$

para $i = 1,2$, y existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$-C_1 g_i(t) \leq g_i'(t) \leq -C_2 g_i(t), \ \forall t \geq 0$$

para $i = 1,2$.

$(H2)$ $M \in C^1([0,\infty[)$ y $M(s) \geq m_0 > 0$, $\forall s \geq 0$, donde m_0 es la constante dada en $(H1)$.

$(H3)$ $f_i \in C^1(\mathbb{R}^2)$ para $i = 1,2$, y para cada $(u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, tenemos $uf_1(u,v) + vf_2(u,v) \in L^1(\Omega)$ y $F(u,v) \in L^1(\Omega)$, donde

$$F(u,v) := \int_0^u f_1(\xi,v)\,d\xi + \int_0^v f_2(0,\xi)\,d\xi.$$

$(H4)$ $f_i(0,0) = 0$, $i = 1,2$ y existe una constante positiva K tal que

$$\begin{aligned} |f_i(r_1,s_1) - f_i(r_2,s_2)| \ &\leq \ K\Big[\Big(|r_1|^\alpha + |r_2|^\alpha\Big)|r_1 - r_2| \\ &\quad + \Big(|s_1|^\beta + |s_2|^\beta\Big)|s_1 - s_2|\Big], \end{aligned}$$

para cada $(r_1,s_1),(r_2,s_2) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1,2$, con $0 \leq \alpha,\beta \leq \frac{2}{n-2}$ para $n \geq 3$ ó $\alpha,\beta \geq 0$ para $n \leq 2$.

$(H5)$ $\frac{\partial f_1}{\partial s}(r,s) = \frac{\partial f_2}{\partial r}(r,s)$, $\forall (r,s) \in \mathbb{R}^2$.

$(H6)$ Existe una constante positiva γ tal que

$$rf_1(r,s) + sf_2(r,s) \geq 2(2\gamma+1)F(r,s), \ \forall (r,s) \in \mathbb{R}^2,$$

donde $F(r,s)$ es la función dada en $(H3)$.

$(H7)$ $(2\gamma+1)\widehat{M}(s) \geq (M(s) + 2\gamma m_0)s$, $\forall s \geq 0$, donde $\widehat{M}(s) := \int_0^s M(\xi)\,d\xi$; m_0 y γ son constantes dadas en $(H1)$ y $(H6)$ respectivamente.

$(H8)$ $(4\gamma+1)\int_0^\infty g_i(s)ds < 4\gamma m_0$ para $i = 1,2$, donde m_0 y γ son las constantes dadas en $(H1)$ y $(H6)$ respectivamente.

Lema 2.1 (Desigualdad de Sobolev-Poincaré [2]). *Si $2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}$ para $n \geq 3$ ó $p \geq 2$ para $n \leq 2$, entonces existe una constante positiva B_1 tal que*

$$|u|_p \leq B_1 \|u\|, \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Lema 2.2. *Si $g \in C^1([0,\infty[)$ y $w \in C^1([0,T];L^2(\Omega))$, entonces*

$$\begin{aligned} \int_0^t g(t-s)(w(s),w'(t))\,ds \ &= \ -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[(g\Box w)(t) - \left(\int_0^t g(s)ds\right)|w(t)|_2^2\right] \\ &\quad -\frac{1}{2}g(t)|w(t)|_2^2 + \frac{1}{2}(g'\Box w)(t), \end{aligned}$$

donde

$$(v\Box w)(t) := \int_0^t v(t-s)\,|w(t) - w(s)|_2^2\, ds\ .$$

Demostración. Diferenciando el término $g\Box w$, se obtiene el resultado. $\Box$

Definición 2.3. Al par de funciones (u, v) se le llama solución del problema (1.1) – (1.6) sobre $[0, T]$, si las funciones $u, v : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ satisfacen las condiciones (1.3) – (1.6) y verifican las igualdades siguientes:

$$u'' - M\left(|\nabla u|_2^2\right)\Delta u + g_1 * \Delta u - \Delta u' = f_1(u, v) \quad \text{en} \quad L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right),$$
$$v'' - M\left(|\nabla v|_2^2\right)\Delta v + g_2 * \Delta v - \Delta v' = f_2(u, v) \quad \text{en} \quad L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right).$$

Teorema 2.4 (Existencia Local [12]). *Supongamos que las funciones g_i, M y f_i satisfacen las hipótesis (H1), (H2) y (H4) respectivamente, $u_0, v_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ y $u_1, v_1 \in L^2(\Omega)$. Entonces existe un único intervalo $[0, T_{\text{máx}}[$ con $0 < T_{\text{máx}} \le \infty$ y el problema (1.1) – (1.6) admite solución única (u, v) sobre $[0, T_{\text{máx}}[$ tal que*

$$u, v \in C\left([0, T_{\text{máx}}[\,; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right),$$
$$u', v' \in C\left([0, T_{\text{máx}}[\,; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0, T_{\text{máx}}; H_0^1(\Omega)\right),$$
$$u'', v'' \in L^2\left(0, T_{\text{máx}}; L^2(\Omega)\right).$$

Lema 2.5 ([4]). *Sea $\gamma > 0$ y sea $B \in C^2([0, \infty[)$ una función no negativa que satisface*

$$B''(t) - 4(\gamma + 1) B'(t) + 4(\gamma + 1) B(t) \ge 0.$$

Si $B'(0) > r_2 B(0) + K_0$, entonces $B'(t) > K_0$, para $t > 0$, donde K_0 es una constante y

$$r_2 := 2(\gamma + 1) - 2\sqrt{(\gamma + 1)\gamma}$$

es la menor raíz de la ecuación cuadrática $r^2 - 4(\gamma + 1) r + 4(\gamma + 1) = 0$.

Lema 2.6 ([4]). *Si $J(t)$ es una función no creciente en $[t_0, \infty[$, $t_0 \ge 0$ y satisface la inecuación diferencial*

$$\left[J'(t)\right]^2 \ge a + b\,[J(t)]^{2+\frac{1}{\gamma}}, \quad \text{para } t \ge t_0,$$

donde $a > 0$, $\gamma > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces existe un número real positivo T_* tal que $\lim\limits_{t \to T_*^-} J(t) = 0$ y una cota superior de T_* puede ser estimado respectivamente, en los siguientes casos:

(i) Si $b < 0$ y $J(t_0) < \min\left\{1, \sqrt{\frac{a}{-b}}\right\}$, entonces

$$T_* \le t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{a}{-b}}}{\sqrt{\frac{a}{-b}} - J(t_0)}\right).$$

(ii) Si $b = 0$, entonces

$$T_* \le t_0 + \frac{J(t_0)}{\sqrt{a}}.$$

(iii) Si $b > 0$, entonces

$$T_* \le \frac{J(t_0)}{\sqrt{a}}$$

o

$$T_* \le t_0 + 2^{\frac{3\gamma+1}{2\gamma}} \frac{\gamma c}{\sqrt{a}} \left(1 - [1 + cJ(t_0)]^{-\frac{1}{2\gamma}}\right),$$

donde $c := \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}$.

3. EL RESULTADO PRINCIPAL

El objetivo principal del presente trabajo es discutir la propiedad de singularidad en tiempo finito de las soluciones del problema (1.1) – (1.6) sobre un intervalo maximal $[0, T_{\text{máx}}[$. En la discusión usaremos el método directo [4].

Definición 3.1. Una solución (u, v) del problema (1.1) – (1.6) sobre $[0, T_{\text{máx}}[$ tiene la propiedad de explosión o singularidad en tiempo finito, si

$$T_{\text{máx}} < \infty \text{ y } \lim_{t \to T_{\text{máx}}^-} \int_\Omega \left(|\nabla u(x,t)|^2 + |\nabla v(x,t)|^2 \right) dx = \infty.$$

Definición 3.2. La función energía $E(t)$ del problema (1.1) – (1.6), se define por

$$\begin{aligned} E(t) := & \tfrac{1}{2}\left[|u'(t)|_2^2 + |v'(t)|_2^2 \right] + \tfrac{1}{2}\left[\widehat{M}\left(\|u(t)\|^2\right) + \widehat{M}\left(\|v(t)\|^2\right) \right] \\ & + \tfrac{1}{2}\left[(g_1 \square \nabla u)(t) + (g_2 \square \nabla v)(t) \right] \\ & - \tfrac{1}{2}\left[\left(\int_0^t g_1(s) ds \right) \|u(t)\|^2 + \left(\int_0^t g_1(s) ds \right) \|v(t)\|^2 \right] \\ & - \int_\Omega F(u(x,t), v(x,t))\, dx, \end{aligned}$$

para $t \geq 0$, donde

$$\widehat{M}(s) := \int_0^s M(\xi)\, d\xi,$$

$$F(r,s) := \int_0^r f_1(\xi, s)\, d\xi + \int_0^s f_2(0, \xi)\, d\xi$$

y

$$(g \square \nabla w)(t) := \int_0^t g(t-s) \|w(t) - w(s)\|^2 ds\ .$$

Lema 3.3. *Supongamos que se cumplen las hipótesis $(H1)-(H5)$. Si (u, v) es una solución del problema (1.1)–(1.6) sobre $[0, T_{\text{máx}}[$ con datos iniciales $u_0, v_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ y $u_1, v_1 \in L^2(\Omega)$, entonces*

$$\begin{aligned} & E(t) + \int_0^t \left[\|u'(s)\|^2 + \|v'(s)\|^2 \right] ds \\ & + \tfrac{1}{2} \int_0^t \left[g_1(s) \|u(s)\|^2 + g_2(s) \|v(s)\|^2 \right] ds \\ & - \tfrac{1}{2} \int_0^t \left[(g_1' \square \nabla u)(s) + (g_2' \square \nabla v)(s) \right] ds = E(0), \end{aligned} \tag{3.1}$$

para $t \geq 0$, donde $E(0)$ es la energía inicial definida por

$$\begin{aligned} E(0) \ : \ = & \frac{1}{2}\left[|u_1|_2^2 + |v_1|_2^2 \right] + \frac{1}{2}\left[\widehat{M}\left(\|u_0\|^2\right) + \widehat{M}\left(\|v_0\|^2\right) \right] \\ & - \int_\Omega F(u_0(x), v_0(x))\, dx. \end{aligned}$$

Demostración. Multiplicando a la ecuación (1.1) por u' y a la ecuación (1.2) por v', sumando estos resultados, integrando sobre Ω, utilizando el teorema de la Divergencia, el Lema 2.2, $(H3)$ y $(H5)$, obtenemos

$$\begin{aligned} & E'(t) + \left[\|u'(t)\|^2 + \|v'(t)\|^2 \right] \\ & + \tfrac{1}{2}\left[g_1(t) \|u(t)\|^2 + g_2(t) \|v(t)\|^2 \right] \\ & - \tfrac{1}{2}\left[(g_1' \square \nabla u)(t) + (g_2' \square \nabla v)(t) \right] = 0. \end{aligned}$$

De aquí, se obtiene el resultado. □

Definición 3.4. Para una solución (u, v) del problema (1.1) – (1.6) sobre $[0, T_{\text{máx}}[$, se define la función explosión

$$A(t) := \left[|u(t)|_2^2 + |v(t)|_2^2 \right] + \int_0^t \left[\|u(s)\|^2 + \|v(s)\|^2 \right] ds, \text{ para } t \geq 0. \tag{3.2}$$

Lema 3.5. *Supongamos que se cumplen las hipótesis* $(H1)-(H8)$. *Si* (u,v) *es una solución del problema* (1.1)−(1.6) *sobre* $[0,T_{\text{máx}}[$ *con datos iniciales* $u_0, v_0 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ *y* $u_1, v_1 \in L^2(\Omega)$, *entonces*

$$\begin{aligned} A''(t) - 4(\gamma+1)\Big[|u'(t)|_2^2 + |v'(t)|_2^2 \\ + \int_0^t \left[\|u'(s)\|^2 + \|v'(s)\|^2 \right] ds \Big] \geq -4(2\gamma+1)E(0), \end{aligned} \tag{3.3}$$

para $t \geq 0$, donde γ es la constante dada en $(H6)$.

Demostración. Por diferenciación de (3.2), se tiene

$$A'(t) = 2\left[(u'(t), u(t)) + (v'(t), v(t))\right] + \left[\|u(t)\|^2 + \|v(t)\|^2\right]. \tag{3.4}$$

Diferenciando (3.4), utilizando las ecuaciones (1.1) − (1.2) y el teorema de la Divergencia, se obtiene

$$\begin{aligned} A''(t) &= 2\left[|u'(t)|_2^2 + |v'(t)|_2^2\right] \\ &\quad -2\left[M\left(\|u(t)\|^2\right)\|u(t)\|^2 + M\left(\|v(t)\|^2\right)\|v(t)\|^2\right] \\ &\quad +2\left[(f_1(u(t),v(t)),u(t)) + (f_2(u(t),v(t)),v(t))\right] \\ &\quad +2\Big[\int_0^t g_1(t-s)\,((u(s),u(t)))\,ds \\ &\quad + \int_0^t g_2(t-s)\,((v(s),v(t)))\,ds\Big] .3.5 \end{aligned} \tag{7}$$

De (3.5) y (3.1), resulta

$$\begin{aligned} & A''(t) - 4(\gamma+1)\Big[|u'(t)|_2^2 + |v'(t)|_2^2 \\ & + \textstyle\int_0^t \left[\|u'(s)\|^2 + \|v'(s)\|^2\right] ds\Big] = -4(2\gamma+1)E(0) \\ & \quad + 2\textstyle\int_\Omega \left[u f_1(u,v) + v f_2(u,v) - 2(2\gamma+1)F(u,v)\right] dx \\ & \quad + 2(2\gamma+1)\left[\widehat{M}\left(\|u(t)\|^2\right) + \widehat{M}\left(\|v(t)\|^2\right)\right] \\ & \quad - 2\left[M\left(\|u(t)\|^2\right) + (2\gamma+1)\textstyle\int_0^t g_1(s)\,ds\right]\|u(t)\|^2 \\ & \quad - 2\left[M\left(\|v(t)\|^2\right) + (2\gamma+1)\textstyle\int_0^t g_2(s)\,ds\right]\|v(t)\|^2 \\ & \quad + 2\left[\textstyle\int_0^t g_1(t-s)\,((u(s),u(t)))\,ds + \int_0^t g_2(t-s)\,((v(s),v(t)))\,ds\right] \\ & \quad - 2(2\gamma+1)\left[\textstyle\int_0^t (g_1'\Box\nabla u)(s)\,ds + \int_0^t (g_2'\Box\nabla v)(s)\,ds\right] \\ & \quad + 2(2\gamma+1)\left[\textstyle\int_0^t g_1(s)\|u(s)\|^2 ds + \int_0^t g_2(s)\|v(s)\|^2 ds\right] \\ & \quad + 2(2\gamma+1)\left[(g_1\Box\nabla u)(t) + (g_2\Box\nabla v)(t)\right] \\ & \quad + 4\gamma\left[\textstyle\int_0^t \|u'(s)\|^2 ds + \int_0^t \|v'(s)\|^2 ds\right]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Utilizando la desigualdad $2((w_1,w_2)) \geq -\left[\|w_1\|^2 + \|w_2\|^2\right]$, resulta

$$\begin{aligned} 2\textstyle\int_0^t g(t-s)\,((w(s),w(t)))\,ds &= 2\textstyle\int_0^t g(t-s)\,((w(s)-w(t),w(t)))\,ds \\ &\quad +2\left(\textstyle\int_0^t g(s)\,ds\right)\|w(t)\|^2 \\ &\geq -\left[(g\Box\nabla w)(t) + \left(\textstyle\int_0^t g(s)\,ds\right)\|w(t)\|^2\right] \\ &\quad +2\left(\textstyle\int_0^t g(s)\,ds\right)\|w(t)\|^2 \\ &= \left(\textstyle\int_0^t g(s)\,ds\right)\|w(t)\|^2 - (g\Box\nabla w)(t).3.7 \end{aligned} \tag{8}$$

Por las hipótesis $(H1)$, $(H6)-(H8)$ y utilizando (3.7), se obtiene de (3.6) el resultado (3.3). □

Lema 3.6. *Supongamos que se cumplen las hipótesis* $(H1)-(H8)$. *Si* (u,v) *es una solución del problema* (1.1)−(1.6) *sobre* $[0,T_{\text{máx}}[$ *con datos iniciales* $u_0, v_0 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ *y* $u_1, v_1 \in L^2(\Omega)$, *y satisfaciendo una de las siguientes condiciones:*

(i) $E(0) < 0$;

(ii) $E(0) = 0$ *y* $A'(0) > K_0$;

(iii) $E(0) > 0$ *y* $A'(0) > r_2\left[A(0) + \dfrac{K_1}{4(\gamma+1)}\right] + K_0$,

donde

$$K_0 := \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2,$$
$$A(0) := |u_0|_2^2 + |v_0|_2^2\ ,\quad A'(0) := 2\left[(u_1, u_0) + (v_1, v_0)\right] + K_0,$$
$$K_1 := 4(2\gamma+1)E(0) + 4(\gamma+1)K_0,$$
$$r_2 := 2(\gamma+1) - 2\sqrt{(\gamma+1)\gamma},$$

entonces

$$A'(t) > K_0,\ \textit{para } t > t_0, \tag{3.8}$$

donde $t_0 := \text{máx}\left\{\frac{A'(0)-K_0}{4(1+2\gamma)E(0)}, 0\right\}$ *en el caso (i) y* $t_0 := 0$ *en los casos (ii) y (iii).*

Demostración. Consideremos tres casos de acuerdo al signo de la energía inicial $E(0)$.

(i) Si $E(0) < 0$, de (3.3), se tiene

$$A''(t) \geq -4(2\gamma+1)E(0)$$

e integrando, resulta

$$A'(t) \geq A'(0) - 4(2\gamma+1)E(0)t,\ \text{ para }\ t \geq 0.$$

Considerando $A'(0) - K_0 - 4(2\gamma+1)E(0)t > 0$, se obtiene

$$A'(t) > K_0, \text{ para } t > t_0,$$

donde

$$t_0 := \text{máx}\left\{\frac{A'(0)-K_0}{4(1+2\gamma)E(0)}, 0\right\}.$$

(ii) Si $E(0) = 0$, de (3.3), se tiene

$$A''(t) \geq 0$$

e integrando, resulta

$$A'(t) \geq A'(0)\,,\ \text{ para }\ t \geq 0.$$

Considerando $A'(0) - K_0 > 0$, se obtiene

$$A'(t) > K_0,\ \text{ para } t \geq 0.$$

(iii) Para $E(0) > 0$. Primero notemos que se cumple

$$2\int_0^t ((w'(s), w(s)))\,ds = \|w(t)\|^2 - \|w_0\|^2. \tag{3.9}$$

Usando la desigualdad de Hölder en (3.9), se obtiene

$$\|w(t)\|^2 \leq \|w_0\|^2 + \int_0^t \|w(s)\|^2\,ds + \int_0^t \|w'(s)\|^2\,ds. \tag{3.10}$$

Nuevamente usando la desigualdad de Hölder en (3.4) y por (3.10), resulta

$$\begin{aligned} A'(t) \ &\leq\ A(t) + K_0 + \left[|u'(t)|_2^2 + |v'(t)|_2^2\right] \\ &\quad + \int_0^t \left[\|u'(s)\|_2^2 + \|v'(s)\|_2^2\right] ds.3.11 \end{aligned} \tag{9}$$

De (3.3) y (3.11), obtenemos

$$A''(t) - 4(\gamma+1)A'(t) + 4(\gamma+1)A(t) + K_1 \geq 0,$$

donde

$$K_1 := 4(2\gamma+1)E(0) + 4(\gamma+1)K_0.$$

Definamos la función

$$B(t) := A(t) + \frac{K_1}{4(\gamma+1)}, \quad \text{para } t \geq 0.$$

Considerando $B'(0) > r_2 B(0) + K_0$, la función B satisface las condiciones del Lema 2.5. Así se tiene $A'(t) > K_0$, para $t > 0$. Con esto se concluye la prueba del Lema 3.6. □

Definición 3.7. Para las estimativas del tiempo finito de la función explosión A, definamos la función

$$J(t) := [A(t) + (T_1 - t)K_0]^{-\gamma}, \quad \text{para } t \in [0, T_1], \tag{3.12}$$

donde T_1 es una constante positiva que será determinada posteriormente y γ es la constante dada en $(H6)$.

Teorema 3.8 (Singularidad de Soluciones). *Supongamos que se cumplen las hipótesis $(H1)-(H8)$. Si (u,v) es una solución del problema $(1.1)-(1.6)$ sobre $[0, T_{\text{máx}}[$ con datos iniciales $u_0, v_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ y $u_1, v_1 \in L^2(\Omega)$, y satisfaciendo una de las siguientes condiciones:*

(*i*) $E(0) < 0$;

(*ii*) $E(0) = 0$ *y* $A'(0) > K_0$;

(*iii*) $0 < E(0) < \dfrac{[A'(0) - K_0]^2}{8[A(0) + T_1 K_0]}$ *y* $A'(0) > r_2\left[A(0) + \dfrac{K_1}{4(\gamma+1)}\right] + K_0$;

entonces $T_{\text{máx}} < \infty$ *y* $\lim\limits_{t \to T_{\text{máx}}^-}\left[\|u(t)\|^2 + \|v(t)\|^2\right] = \infty$. *Además el tiempo finito* $T_{\text{máx}}$ *es estimado, en el caso* (*i*),

$$T_{\text{máx}} \leq t_0 - \frac{J(t_0)}{J'(t_0)}. \tag{3.13}$$

Además, si $J(t_0) < \text{mín}\left\{1, \sqrt{\frac{a}{-b}}\right\}$, *entonces*

$$T_{\text{máx}} \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{a}{-b}}}{\sqrt{\frac{a}{-b}} - J(t_0)}\right). \tag{3.14}$$

En el caso (*ii*),

$$T_{\text{máx}} \leq t_0 - \frac{J(t_0)}{J'(t_0)} \tag{3.15}$$

o

$$T_{\text{máx}} \leq t_0 + \frac{J(t_0)}{\sqrt{a}}. \tag{3.16}$$

En el caso (*iii*),

$$T_{\text{máx}} \leq \frac{J(t_0)}{\sqrt{a}} \tag{3.17}$$

o

$$T_{\text{máx}} \leq t_0 + 2^{\frac{3\gamma+1}{2\gamma}} \frac{\gamma c}{\sqrt{a}} \left\{1 - [1 + cJ(t_0)]^{-\frac{1}{2\gamma}}\right\}, \tag{3.18}$$

donde $a := \gamma^2 [J(t_0)]^{\frac{2}{\gamma}+2}\left[[A'(t_0) - K_0]^2 - 8E(0)[J(t_0)]^{\frac{-1}{\gamma}}\right]$, $b := 8\gamma^2 E(0)$ *y* $c := \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}$.

En el caso (*i*), $t_0 := \text{máx}\left\{\frac{A'(0) - K_0}{4(1+2\gamma)E(0)}, 0\right\}$ *y* $t_0 := 0$ *en los casos* (*ii*) *y* (*iii*).

Demostración. Por diferenciación de (3.12), resulta

$$J'(t) = -\gamma\,[J(t)]^{\frac{1}{\gamma}+1}\,[A'(t) - K_0] \tag{3.19}$$

y

$$J''(t) = -\gamma\,[J(t)]^{\frac{2}{\gamma}+1}\,V(t), \tag{3.20}$$

donde

$$V(t) := A''(t)\,[A(t) + (T_1 - t)\,K_0] - (\gamma+1)\,[A'(t) - K_0]^2 .$$

Utilizando la desigualdad $\left(\sum\limits_{i=1}^{4} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{4} a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{4} b_i^2\right)$, (3.9) y la desigualdad de Hölder, de (3.4), resulta

$$\begin{aligned}[A'(t) - K_0]^2 \quad &\leq \quad 4\,[A(t) + (T_1 - t)\,K_0]\left[|u'(t)|_2^2 + |v'(t)|_2^2\right.\\ &\quad + \left.\int_0^t \left[\|u'(s)\|_2^2 + \|v'(s)\|_2^2\right] ds\right] .3.21\end{aligned} \tag{10}$$

De (3.20) y (3.21), se tiene

$$J''(t) \leq -\gamma\,[J(t)]^{\frac{1}{\gamma}+1}\,K(t), \tag{3.22}$$

donde

$$\begin{aligned}K(t) \quad : \quad &= A''(t) - 4(\gamma+1)\left[|u'(t)|_2^2 + |v'(t)|_2^2\right.\\ &\quad + \left.\int_0^t \left[\|u'(s)\|^2 + \|v'(s)\|_2^2\right] ds\right].\end{aligned}$$

Por (3.3) y (3.22), resulta

$$J''(t) \leq 4\gamma\,(2\gamma+1)\,E(0)\,[J(t)]^{\frac{1}{\gamma}+1}, \quad \text{para } t \geq t_0. \tag{3.23}$$

De (3.8) y (3.19), se tiene

$$J'(t) < 0, \text{ para } t > t_0. \tag{3.24}$$

Multiplicando (3.23) por $J'(t)$ y luego integrando de t_0 a t, se obtiene

$$[J'(t)]^2 \geq a + b\,[J(t)]^{2+\frac{1}{\gamma}}, \quad \text{para} \quad t \geq t_0, \tag{3.25}$$

donde

$$\begin{aligned} a := \quad & [J'(t_0)]^2 - 8\gamma^2 E(0)\,[J(t_0)]^{\frac{1}{\gamma}+2}\\ = \quad & \gamma^2\,[J(t_0)]^{\frac{2}{\gamma}+2}\left[[A'(t_0) - K_0]^2 - 8E(0)\,[J(t_0)]^{\frac{-1}{\gamma}}\right]\end{aligned}$$

y

$$b := 8\gamma^2 E(0).$$

Observemos que $a > 0$ si y solo si $E(0) < \dfrac{[A'(t_0) - K_0]^2}{8\,[A(t_0) + (T_1 - t_0)\,K_0]}$.

El caso particular en el que $E(0) < 0$, por (3.23) y (3.24), se obtiene directamente $\lim\limits_{t \to T_*^-} J(t) = 0$ y la estimativa (3.13) para el tiempo finito T_*. Para los demás casos, por (3.24) y (3.25), la función J satisface las condiciones del Lema 2.6. Entonces existe un tiempo finito T_* tal que $\lim\limits_{t \to T_*^-} J(t) = 0$ y la cota superior para T_* son estimadas respectivamente de acuerdo al signo de la energía inicial $E(0)$.

Observemos que las estimativas (3.15) y (3.16) son equivalentes, es decir $\sqrt{a} = -J'(t_0)$.

Desde que $[0, T_{\text{máx}}[$ es el intervalo maximal de las soluciones del problema (1.1) – (1.6), resulta que $T_{\text{máx}} = T_*$. También por $\lim\limits_{t \to T_{\text{máx}}^-} J(t) = 0$, se obtiene

$$\lim_{t \to T_{\text{máx}}^-} A(t) = \infty.$$

De aquí y la desigualdad de Sobolev-Poincaré, se deduce

$$\lim_{t\to T_{\text{máx}}^-}\left[\|u(t)\|^2+\|v(t)\|^2\right]=\infty.$$

Con todo esto se concluye la demostración del Teorema 3.8. □

Observación 3.9. La selección de T_1 de (3.12) es posible escoger con algunas consideraciones. Veamos tres casos de acuerdo al signo de la energía inicial $E(0)$.

(*a*) *Para el caso* $E(0)=0$.

Por la condición $A'(0)>K_0$, resulta $(u_1,u_0)+(v_1,v_0)>0$ y $t_0=0$. Por (3.15), escogemos

$$T_1\geq\frac{A(0)+T_1K_0}{\gamma\left[A'(0)-K_0\right]}=-\frac{J(0)}{J'(0)}.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder, desigualdad de Sobolev-Poincaré y la desigualdad de Young, resulta

$$A(0)+T_1K_0\leq\gamma B_1T_1\left(\varepsilon K_0+\frac{1}{\varepsilon}\left[|u_1|_2^2+|v_1|_2^2\right]\right),$$

donde B_1 es la constante de la desigualdad de Sobolev-Poincaré y ε es cualquier constante positiva. Escogiendo $\varepsilon=\frac{1}{\gamma B_1}$, obtenemos

$$T_1\geq\frac{A(0)}{\gamma^2B_1^2\left[|u_1|_2^2+|v_1|_2^2\right]}.$$

En particular, podemos tomar

$$T_1=\frac{A(0)}{\gamma^2B_1^2\left[|u_1|_2^2+|v_1|_2^2\right]}.$$

(*b*) *Para el caso* $E(0)<0$.

Veamos dos casos de acuerdo al signo de $A'(0)-K_0$.

b_1) Si $A'(0)>K_0$, entonces $(u_1,u_0)+(v_1,v_0)>0$ y $t_0=0$. Por (3.13), podemos escoger T_1 como en el caso (a).

b_2) Si $A'(0)<K_0$, entonces $(u_1,u_0)+(v_1,v_0)<0$ y $t_0=\frac{(u_1,u_0)+(v_1,v_0)}{2(1+2\gamma)E(0)}$. Por (3.13), teniendo en cuenta el signo de $A'(t_0)-K_0$, escogemos T_1 que resuelva la inecuación

$$T_1\geq t_0+\frac{A(t_0)+(T_1-t_0)K_0}{\gamma\left[A'(t_0)-K_0\right]}.$$

(*c*) *Para el caso* $E(0)>0$.

Definamos las siguientes constantes positivas:

$$\kappa_1:=\frac{(\gamma+1)\left[A'(0)-r_2A(0)-(r_2+1)K_0\right]}{r_2(2\gamma+1)},$$

$$\kappa_2:=\frac{\left[A'(0)-K_0\right]^2\left[c\gamma-K_0\right]}{8c\gamma A(0)},$$

$$\kappa_3:=\frac{A(0)}{c\gamma-K_0}$$

y

$$\kappa_4:=\frac{\left[A'(0)-K_0\right]^2-8E(0)A(0)}{8E(0)K_0},$$

donde

$$c:=\begin{cases}1, & \text{si } \gamma>K_0\\ \frac{2K_0}{\gamma}, & \text{si } \gamma\leq K_0.\end{cases}$$

Entonces, resultan las siguientes equivalencias:

$$A'(0) > r_2 \left[A(0) + \frac{K_1}{4(\gamma+1)} \right] + K_0 \Longleftrightarrow E(0) < \kappa_1 \tag{3.26}$$

y

$$\kappa_3 \leq \kappa_4 \Longleftrightarrow E(0) \leq \kappa_2. \tag{3.27}$$

Ahora hallemos la constante positiva T_1. Primero observemos las siguientes equivalencias con T_1:

$$E(0) < \frac{[A'(0) - K_0]^2}{8[A(0) + T_1 K_0]} \Longleftrightarrow T_1 < \kappa_4, \tag{3.28}$$

$$\frac{A(0) + T_1 K_0}{c\gamma} \leq T_1 \Longleftrightarrow \kappa_3 \leq T_1 \tag{3.29}$$

y

$$\frac{c}{\sqrt{[A'(0) - K_0]^2 - 8E(0)[A(0) + T_1 K_0]}} < 1 \Longleftrightarrow T_1 < \kappa_4 - \frac{c^2}{8E(0) K_0}. \tag{3.30}$$

Por (3.17), debemos escoger T_1 que resuelva la inecuación

$$\frac{A(0) + T_1 K_0}{\gamma \sqrt{[A'(0) - K_0]^2 - 8E(0)[A(0) + T_1 K_0]}} \leq \frac{A(0) + T_1 K_0}{c\gamma} \leq T_1. \tag{3.31}$$

Por (3.26) y (3.27), tenemos

$$E(0) < \text{mín}\{\kappa_1, \kappa_2\}. \tag{3.32}$$

Por (3.32) y (3.28) – (3.30), el T_1 que satisface (3.31), debemos de escoger en el intervalo

$$\kappa_3 \leq T_1 \leq \kappa_4.$$

En particular, tomando $T_1 = \kappa_3$, resulta

$$T_{\text{máx}} \leq \frac{J(t_0)}{\sqrt{a}} = \frac{c\kappa_3}{\sqrt{[A'(0) - K_0]^2 - 8E(0)\, c\gamma\kappa_3}}.$$

Con esto se concluye las posibles selecciones de T_1. $\square$

Bibliografía

[1] Andrade D. and Mognon A. (2003), *Global solutions for a system of Klein-Gordon equations with memory*, Bol. Soc. Paran. Mat. 21 1/2.

[2] Brézis H. (1984), *Análisis funcional*, Alianza Editorial, Madrid.

[3] Kirchhoff G. (1883), *Vorlesungen über mechanik*, Leipzig, Teubner.

[4] Li, M.-R. and Tsai L.-Y. (2003), *On a system of nonlinear wave equation*, Taiwanese Journal of Mathematic Vol.7, No. 4, pp. 557-573.

[5] Messaoudi S. (2006), *Blow-up of positive-initial-energy solutions of a nonlinear viscoelastic hyperbolic equation*, J. Math. Anal. Appl. 320, 902-915.

[6] Milla Miranda, M. and Medeiros, L. A. (1987), *On the existence of global solutions of a coupled nonlinear Klein-Gordon equation*, Funkcialaj Ekvacioj, 30, 147-161.

[7] Quispe Méndez, T. (1998), *Singularidad en tiempo finito para un sistema de Kirchhoff*, Tesis de Maestria, Fac. CC. MM. de la UNMSM.

[8] Quispe Méndez, T. (2004), *Singularidad de soluciones de una ecuación de Kirchhoff no lineal con término disipativo*, PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos Vol. VII, No.1, pág. 18-29, LIMA-PERÚ.

[9] Quispe Méndez, T. (2005), *Solución local y singularidad para un sistema de Kirchhoff no lineal*. PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos Vol. VIII, No.2, pp 45-62, LIMA-PERÚ.

[10] Quispe Méndez, T. (2007), *Solución local de una ecuación de Kirchhoff no lineal viscoelástica con término disipativo*, PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos Vol. X, No.1, pp 11-32, LIMA-PERÚ.

[11] Quispe Méndez, T. (2007), *Singularidad de soluciones para una ecuación de Kirchhoff no lineal viscoelástica con término disipativo*, PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos Vol. X, No.2, pp 67-80, LIMA-PERÚ.

[12] Quispe Méndez, T. y Carrillo Díaz, L. E. (2010), *Solución local de un sistema de Kirchhoff no lineal viscoelástico con término disipativo*. PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos Vol. XIII, No.2, pp 40-58, LIMA-PERÚ.

[13] Santos, M. L. (2002), *Decay rates for solutions of a system of wave equations with memory*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2002, No. 38, pp.1-17.

[14] Segal, I. (1965), *Nonlinear partial differential equations in quantum fiels theory*, Proc. Symp. Appl. Math. A.M.S., 17, 210-226.

[15] Wu S.-T. (2006), *Blow-up of solutions for an integro-differential equation with a nonlinear source*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2006, No. 45, pp.1-9.

[16] Wu S.-T. and Tsai L.-Y. (2006), *On global existence and blow-up of solutions for an integro-differential equation with strong damping*, Taiwanese Journal of Mathematic Vol.10, No. 4, pp. 979-1014.

[17] Wu S.-T. and Tsai L.-Y. (2007), *On system of nonlinear wave equation of Kirchhoff type with a strong dissipation*, Tamkang Journal of Mathematic Vol.38, No. 1, pp. 1.20.

[18] Wu S.-T. (2009), *Blow-up of solutions for a system of nonlinear wave equations with nonlinear damping*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2009, No. 105, pp.1-11.