PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XIV N°2, pp. 44-59, Lima - Perú, Agosto 2011

LA SILLA-NODO COMPLEJA

*Renato Benazic** & *Gerardo Huaroto***

Resumen: En el presente trabajo se establece la forma local formal de un campo de dimensión compleja dos, en la vecindad de un punto singular aislado, cuyo desarrollo en serie de Taylor (alrededor de la singularidad aislada) tiene parte lineal con un autovalor cero. Tales singularidades son llamadas sillas-nodos complejas. **Palabras clave:** Ecuaciones Diferenciales Complejas, Singularidades Aisladas, Dinámica compleja, Sillas-nodo.

THE SADDLE-NODE COMPLEX

Abstract: In this paper establishes the formal locally a field of complex dimension two, in the vicinity of an isolated singular point, whose Taylor series expansion (around the isolated singularity) has linear part with a zero eigenvalue. Such singularities are called chair-node complex.

Key words: Complex Differential Equations, Isolated Singularities, complex dynamics, saddle-node.

1. Introducción

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto, un campo vectorial $Z = (Z_1, \ldots, Z_n) : U \to \mathbb{C}^n$ es llamado *holomorfo* si y sólo si todas sus funciones coordenadas $Z_1, \ldots, Z_n : U \to \mathbb{C}$ son funciones holomorfas de varias variables complejas. Denotaremos por $\mathcal{X}(U)$ al conjunto de todos los campos vectoriales definidos en el abierto $U \subseteq \mathbb{C}^n$.

Un punto $p \in U$ es llamado *singularidad* de $Z \in \mathcal{X}(U)$ si y sólo si $Z(p) = 0$. Caso contrario p es llamado *punto regular de* Z. Denotaremos por $\mathrm{Sing}\,(Z)$ al conjunto de todos los puntos singulares del campo Z.

Dados $Z \in \mathcal{X}(U)$, $z_0 \in U$ y $T_0 \in \mathbb{C}$, su *Problema de Valor Inicial (P.V.I.)* o *Problema de Cauchy* asociado es dado por:

$$\left| \begin{array}{lcl} z' & = & Z(z) \\ z(T_0) & = & z_0 \end{array} \right. \tag{1}$$

Una solución de (??) es una función holomorfa $\varphi : D \to U$ donde $D \subseteq \mathbb{C}$ es un disco abierto, tal que

1. $T_0 \in D$.
2. $\varphi'(T) = Z(\varphi(T))$; $\forall\, T \in D$.
3. $\varphi(T_0) = z_0$.

El Teorema de existencia y unicidad (ver [?]) asegura que el PVI (??) admite una única solución $\varphi_{(T_0,z_0)}$, la cual está definida en un disco cerrado $D_\alpha[T_0]$ de radio suficientemente pequeño $\alpha > 0$, centrado en T_0. Más aún, sea $\Delta[z_0; r]$ un polidisco cerrado contenido en U, si $Z \in \mathcal{X}(U)$ es Lipschitz en $\Delta[z_0; r]$ entonces se puede demostrar que (ver [?]) existe poliradio $r' < r$ y existe $0 < \alpha' < \alpha$ tales que para todo $z \in \Delta[z_0; r']$ existe una única solución $\varphi_z : D_{\alpha'}[T_0] \to \Delta[z_0; r]$ del PVI:

$$\left| \begin{array}{lcl} w' & = & Z(w) \\ w(T_0) & = & z \end{array} \right. \tag{2}$$

*UNMSMS, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: rbenazict@unmsm.edu.pe
**IMCA, e-mail: ghuaroto@imca.edu.pe

Como consecuencia de este último resultado, podemos definir la función

$$\varphi_Z : D_{\alpha'}[T_0] \times \Delta\left[z_0; r'\right] \to \Delta[z_0; r]$$

mediante

$$\varphi_Z(T, z) = \varphi_z(T)$$

Esta función φ es llamada *Flujo Local asociado a Z alrededor de* (T_0, z_0) y satisface las siguientes condiciones:

1. $\dfrac{\partial\varphi}{\partial T}(T, z) = Z(\varphi(T, z)),\ \forall\ (T, z) \in D_{\alpha'}(T_0) \times \Delta(z_0; r')$.
2. $\varphi(T_0, z) = z,\ \forall\ z \in \Delta(z_0; r')$.
3. φ es una función holomorfa.

Para simplificar, en lo sucesivo, trabajaremos siempre con el valor inicial $T_0 = 0$.

Definición 1.1. *Sean $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ abiertos, $Z_1 \in \mathcal{X}(U_1)$, $Z_2 \in \mathcal{X}(U_2)$, $p_1 \in U_1$, $p_2 \in U_2$ y consideremos sus flujos locales asociados*

$$\varphi_1 : D_\delta(0) \times \Delta(p_1; r') \to \Delta(p_1; r) \qquad \varphi_2 : D_\delta(0) \times \Delta(p_2; r') \to \Delta(p_2; r)$$

Decimos que Z_1 es localmente topológicamente (resp. analíticamente) conjugado *a Z_2 alrededor de p_1 y p_2, lo que denotamos $Z_1 \sim_{top} Z_2$ (resp. $Z_1 \sim_{ana} Z_2$) si y sólo si existen vecindades abiertas $V_1 \subseteq U_1$, $V_2 \subseteq U_2$ de p_1 y p_2 respectivamente, y existe $h : V_1 \to V_2$ homeomorfismo (resp. biholomorfismo) llamado* conjugación topológica local *(resp.* conjugación analítica local*) tal que*

$$h(\varphi_1(T, z)) = \varphi_2(T, h(z)), \quad \forall\ (T, z) \in D_\delta(0) \times V_1$$

El hecho de que dos campos sean analíticamente localmente conjugados, significa geométricamente que sus soluciones son indistinguibles módulo biholomorfismos.

El siguiente resultado, cuya demostración puede ser encontrada en [?] o [?], nos dice que en la vecindad de un punto regular, las soluciones de Z pueden ser rectificadas.

Teorema 1.1. ***(Teorema del Flujo Tubular)*** *Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto y $Z \in \mathcal{X}(U)$. Si $z_0 \in U$ es un punto regular de Z entonces Z es localmente analíticamente conjugado al campo constante $Y = (1, 0, \ldots, 0)$ alrededor de z_0 y 0.*

En virtud del Teorema del Flujo Tubular, podemos considerar satisfactorio el conocimiento geométrico local de las soluciones de una ecuación diferencial alrededor de un punto regular. Resta entender cómo es este comportamiento en la vecindad de una singularidad.

2. Comportamiento de las soluciones alrededor de una singularidad aislada

En lo sucesivo, nos restringiremos a la dimensión compleja 2.

Definición 2.1. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto y $Z \in \mathcal{X}(U)$. Decimos que $z_0 \in U$ es una* singularidad aislada *de Z si y sólo si $z_0 \in Sing(Z)$ y existe $V \subseteq U$ vecindad abierta de z_0 tal que $Sing(Z) \cap (V - \{z_0\}) = \emptyset$.*

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, $Z \in \mathcal{X}(U)$ y $0 \in U$ singularidad aislada de Z, luego existe $V \subseteq U$ vecindad abierta de 0 tal que

$$Z(z) = \left(\sum_{|Q| \geq 1} a_{1,Q} z^Q, \sum_{|Q| \geq 1} a_{2,Q} z^Q \right) \ \forall\ z \in V$$

y

$$Z(z) \neq (0,0), \forall\, z \in V - \{0\}$$

Sabemos que su derivada $DZ(0)$ es una transformación lineal de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}^2$ y que su matriz asociada (en la base canónica de $\mathbb{C}^2$) es dada por

$$\begin{bmatrix} a_{1,(1,0)} & a_{1,(0,1)} \\ \\ a_{2,(1,0)} & a_{2,(0,1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

la cual también la denotaremos por $DZ(0)$. $DZ(0)$ es llamada la *parte lineal* de Z en $0 \in \mathbb{C}^2$ y diremos que Z tiene *parte lineal no nula* en $0 \in \mathbb{C}^2$ si y sólo si $DZ(0) \neq 0$. Si $DZ(0) \neq 0$, por el Teorema de la Forma Canónica de Jordan, basta considerar los casos:

$$DZ(0) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad DZ(0) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

En lo sucesivo sólo estudiaremos campos vectoriales holomorfos con singularidad aislada en $0 \in \mathbb{C}^2$ y con parte lineal no nula del tipo

$$DZ(0) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

donde $|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 \neq 0$, es decir, campos de la forma

$$Z(z) = \left(\lambda_1 z_1 + \sum_{|Q|\geq 2} a_{1,Q} z^Q, \lambda_2 z_2 + \sum_{|Q|\geq 2} a_{2,Q} z^Q\right), \quad \forall\, Z = (z_1, z_2) \in V$$

donde V es una vecindad abierta (polidisco) del $0 \in \mathbb{C}^2$ tal que $Z(z) \neq (0,0)$, $\forall\, z \in V - \{0\}$. Como sabemos, este campo define el PVI

$$\left| \begin{array}{lcl} z_1' & = & \lambda_1 z_1 + \sum\limits_{|Q|\geq 2} a_{1,Q} z^Q, \quad z_1(0) = z_1^0 \\ \\ z_2' & = & \lambda_2 z_2 + \sum\limits_{|Q|\geq 2} a_{2,Q} z^Q, \quad z_2(0) = z_2^0 \end{array} \right.$$

donde $z_0 = (z_1^0, z_2^0) \in V$.

Denotemos por $\varphi_Z : D_\delta(0) \times \Delta(0, r') \to \Delta(0, r)$ el flujo local de Z alrededor del 0. Dado $z = (z_1, z_2) \in \Delta(0, r')$ definimos la *órbita de z bajo Z* como

$$\mathcal{O}_Z(z) = \{\varphi_Z(T, z); T \in \mathbb{C}\}$$

y denotemos por

$$\mathcal{F}_Z = \{\mathcal{O}_Z(z); z \in \Delta(0, r')\}$$

a la *foliación local alrededor del origen* generada por Z. Observe que $\varphi_Z(T, z)$ se reduce a un punto si y sólo si $z = 0$. De esta manera, si $z \neq 0$ entonces $\mathcal{O}_Z(z)$ es una curva.

El comportamiento de las soluciones, en una vecindad del origen, depende de la posición que ocupan los autovalores λ_1 y λ_2 en el plano complejo. Tenemos los siguientes resultados:

Teorema 2.1. ***(Teorema de linealización de Poincaré)*** *Si* $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{R}^- \cup \{2, 3, 4, \ldots\} \cup \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots\right\}$ *entonces Z es localmente analíticamente conjugado a su parte lineal* $W(w_1, w_2) = (\lambda_1 w_1, \lambda_2, w_2)$

Teorema 2.2. ***(Teorema de Dulac)*** *Si* $\lambda_1 = m\lambda_2$ *o* $\lambda_2 = m\lambda_1$, *con* $m \geq 2$ *entonces Z es localmente analíticamente conjugado al campo* $W(w_1, w_2) = (\lambda_1 w_1 + a w_2^m, \lambda_2, z_2)$

Observe que los dos teoremas anteriores establecen formas normales bastante simples (lineal o polinomial) para campos cuya parte lineal, alrededor de una singularidad aislada, tiene autovalores cuyo cociente no es un real negativo. El lector puede encontrar la demostración del Teorema de linealización de Poincaré en [?] o en [?]. La demostración del Teorema de Dulac puede ser encontrada en [?].

Cuando el cociente de los autovalores es un real negativo, no siempre se puede linealizar o simplificar el campo, a menos que se haga una hipótesis adicional sobre los autovalores.

Sean λ_1, λ_2 tales que $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}^-$ y sean $C > 0$, $\nu > 0$. Decimos que λ_1, λ_2 satisface una condición del tipo (C, ν) si y sólo si

$$|\lambda_1 - q_1\lambda_1 - q_2\lambda_2| \geq \frac{C}{(q_1+q_2)^\nu} \quad \text{o} \quad |\lambda_2 - q_1\lambda_1 - q_2\lambda_2| \geq \frac{C}{(q_1+q_2)^\nu}, \ \forall\, q_1, q_2 \in \mathbb{N} \text{ con } q_1 + q_2 \geq 2$$

Teorema 2.3. ***(Teorema de linealización de Siegel)*** *Si $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}^-$ y satisface una condición del tipo (C, ν) entonces Z es localmente analíticamente conjugado a su parte lineal $W(w_1, w_2) = (\lambda_1 w_1, \lambda_2, w_2)$*

La demostración del Teorema de Siegel puede ser encontrada en [?].

Se puede demostrar (ver [?]) que el conjunto de los pares (λ_1, λ_2) cuyo cociente es negativo y que no satisface ninguna condición del tipo (C, ν) tiene medida cero. Por esta razón, los tres teoremas anteriores son suficientes para conocer el comportamiento geométrico de las órbitas de un campo, alrededor de una singularidad aislada, cuya parte lineal es diagonalizable y tiene dos autovalores no nulos.

El resultado principal de este trabajo es obtener una forma más simple de un campo cuando su parte lineal tiene al cero como uno de sus autovalores.

3. Serie de potencias formales y convergente

Con el objetivo de hacer autocontenido el trabajo, introducimos esta sección que contiene algunas notaciones y propiedades de las series de potencias formales de dos variables complejas. El lector interesado en mayores detalles puede consultar la referencia [?] o [?].

Definición 3.1. *Una serie formal de potencias en las indeterminadas x e y con coeficientes en $\mathbb{C}$, es una expresión de la forma*

$$A = \sum_{|Q|\geq 0} a_Q x^{q_1} y^{q_2}$$

donde $a_Q \in \mathbb{C}$, $\forall\ Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2$. El conjunto de tales series formales será denotado por $\mathbb{C}[[x, y]]$.

Observación: Si denotamos por $\mathbb{C}[x, y]$ al conjunto de todos los polinomios con coeficientes complejos e indeterminadas x, y, entonces se cumple

$$\mathbb{C}[x, y] \subseteq \mathbb{C}[[x, y]]$$

Definición 3.2. *Sean A, $B \in \mathbb{C}[[x, y]]$, y $\alpha \in \mathbb{C}$, donde $A = \sum_{|Q|\geq 0} a_Q x^{q_1} y^{q_2}$ y $B = \sum_{|Q|\geq 0} b_Q x^{q_1} y^{q_2}$. Definamos la suma de A y B como*

$$A + B = \sum_{|Q|\geq 0} (a_Q + b_Q) x^{q_1} y^{q_2}$$

y el producto de α por A como

$$\alpha A = \sum_{|Q|\geq 0} \alpha a_Q x^{q_1} y^{q_2}$$

Sea $A = \sum_{|Q|\geq 0} a_Q x^{q_1} y^{q_2} \in \mathbb{C}[[x,y]]$, observe que

$$\begin{aligned} A &= a_{(0,0)} + (a_{(1,0)}x + a_{(0,1)}y) + (a_{(2,0)}x^2 + a_{(1,1)}xy + a_{(0,2)}y^2) + \cdots \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{|Q|=n} a_Q x^{q_1} y^{q_2}\right) = \sum_{n\geq 0} A_n \end{aligned}$$

donde $A_n = \sum_{|Q|=n} a_Q x^{q_1} y^{q_2}$, $\forall\, n \geq 0$. Se sigue que A_n es un polinomio homogéneo en las indeterminadas x e y de grado n, concluimos que toda serie formal puede expresarse como una suma infinita de polinomios homogéneos.

Definición 3.3. *Sean $A,\ B \in \mathbb{C}[[x,y]]$, $A = \sum_{n\geq 0} A_n$, $B = \sum_{n\geq 0} B_n$, el producto de A y B, denotado por AB, es definido como:*

$$AB = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}B_k\right)$$

Definición 3.4. *Sea $A = \sum_{|Q|\geq 0} a_Q x^{q_1} y^{q_2} \in \mathbb{C}[[x,y]]$ definimos $\frac{\partial A}{\partial x}$ y $\frac{\partial A}{\partial y} \in \mathbb{C}[[x,y]]$ como*

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \sum_{|Q|\geq 0} q_1 a_Q x^{q_1-1} y^{q_2} \quad y \quad \frac{\partial B}{\partial x} = \sum_{|Q|\geq 0} q_2 b_Q x^{q_1} y^{q_2-1}$$

De manera análoga se define las derivadas parciales formales de orden superior.

Es posible asociar a una serie formal, una serie convergente. Dado $A = \sum_{|Q|\geq 0} a_Q x^{q_1} y^{q_2} \in \mathbb{C}[[x,y]]$, definamos el conjunto

$$D_A = \left\{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2;\ \sum_{|Q|\geq 0} a_Q z_1^{q_1} z_2^{q_2} \in \mathbb{C}\right\}$$

Observe que $(0,0) \in D_A$, luego $D_A \neq \phi$. A continuación, vamos a estableser condiciones para que $D_A \neq \{(0,0)\}$. Denotemos $\mathbb{R}_0^+ = [0,\infty[$ y consideremos el conjunto

$$\Gamma_A = \left\{(r_1,r_2) \in \mathbb{R}_0^+;\ \sum_{|Q|\geq 0} |a_Q| r_1^{q_1} r_2^{q_2} < \infty\right\}$$

Observe que $\Gamma_A \neq 0$ puesto que $(0,0) \in \Gamma_A$.

Proposición 3.1. *Si $(r_1,r_2) \in \Gamma_A$ entonces $\triangle[(0,0);(r_1,r_2)] \subseteq D_A$.*

Dado $A = \sum_{|Q|\geq 0} a_Q x^{q_1} y^{q_2} \in \mathbb{C}[[x,y]]$, denotemos por $\widehat{A}$ a la serie formal de términos no negativos en las indeterminadas x e y, obtenida de A, mediante

$$\widehat{A} = \sum_{|Q|\geq 0} |a_Q| x^{q_1} y^{q_2}$$

y denotemos por $\widetilde{A}$ a la serie formal de potencias de términos no negativos en la indeterminada x, obtenida de A mediante

$$\widetilde{A} = \sum_{|Q|\geq 0} |a_Q| x^{q_1} x^{q_2} = \sum_{|Q|\geq 0} |a_Q| x^{|Q|} = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{|Q|=n} |a_Q|\right) x^n$$

Proposición 3.2. *Si $\widetilde{A}$ es convergente en $D_R[0]$ entonces $(R, R) \in \Gamma_A$.*

Corolario. Sea $A = \sum_{|Q|\geq 0} |a_Q| x^{q_1} y^{q_2} \in \mathbb{C}[[x, y]]$. Si $\widetilde{A}$ es convergente en $D_R[0]$ entonces A es convergente el en polidisco $\triangle[(0,0); (R, R)]$.

Sea $A = \sum_{|Q|\geq 0} |a_Q| x^{q_1} y^{q_2}$, $B = \sum_{|Q|\geq 0} |b_Q| x^{q_1} y^{q_2} \in \mathbb{C}[[x, y]]$, definimos

$$\widehat{A} \ll \widehat{B} \Longleftrightarrow |a_Q| \leq |b_Q|, \quad \forall |Q| \geq 0 \tag{3}$$

Proposición 3.3. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\widehat{A+B} \ll \widehat{A} + \widehat{B} \ \forall\, A, B \in \mathbb{C}[[x, y]]$
2. $\widehat{\alpha A} \ll |\alpha| \widehat{A}$, $\forall \alpha$, $\forall A \in \mathbb{C}[[x, y]]$
3. $\widehat{AB} \ll \widehat{A}\widehat{B}$, $\forall\, A, B \in \mathbb{C}[[x, y]]$
4. $\widehat{A \circ \Theta} \ll \widehat{A} \circ \widehat{\Theta}$, *donde* $\Theta = (B, C)$ *y* $\widehat{\Theta} = \left(\widehat{B}, \widehat{C}\right)$ $\forall\, A,\, B,\, C \in \mathbb{C}[[x, y]]$.

4. Resultados preliminares

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ un abierto con $0 \in U$ y consideremos $Z \in \mathcal{X}(U)$ definido por

$$Z(z) = (\lambda_1 z_1 + A(z_1, z_2), A_2(z_1, z_2)) = \left(\lambda_1 z_1 + \sum_{|Q|\geq 2} a_{1,Q} z^Q, \sum_{|Q|\geq 2} a_{2,Q} z^Q \right), \qquad \lambda_1 \neq 0$$

Observe que la parte lineal de Z tiene un autovalor cero, en este caso decimos que el origen es una singularidad del tipo *silla-nodo* del campo Z.

Como sabemos, este campo define un sistema de dos ecuaciones diferenciales

$$\left| \begin{array}{rcl} z_1' & = & \lambda_1 z_1 + A_1(z_1, z_2) \\ z_2' & = & A_2(z_1, z_2) \end{array} \right. \tag{4}$$

Lema 4.1. *Con las notaciones anteriores, existe un cambio de coordenadas analiticas, tipo perturbación de la identidad, de modo que la EDO (??) se escribe como*

$$\left| \begin{array}{rcl} u_1' & = & \lambda_1 u_1 + u_2 g(u_1, u_2) \\ u_2' & = & u_2 h(u_1, u_2), \end{array} \right. \tag{5}$$

siendo g y h funciones analíticas en el origen.

Demostración. En primer lugar, consideraremos un cambio de coordenada (formal) del tipo perturbación de la identidad:

$$z = (z_1, z_2) = \xi(u_1, u_2) = (u_1 + \xi_1(u_1, u_2), u_2 + \xi_2(u_1, u_2))$$

donde $\xi_j(u_1, u_2) = \sum_{|Q|\geq 2} \xi_{jQ} u^Q$, $(j = 1, 2)$ que transforme la EDO (??) en

$$\left| \begin{array}{rcl} u_1' & = & \lambda_1 u_1 + B_1(u_1, u_2), \\ u_2' & = & B_2(u_1, u_2), \end{array} \right. \tag{6}$$

siendo $B_j(u_1,u_2)=\sum_{|Q|\geq 2} b_{jQ}u^Q$, $(j=1,2)$.

Como $z_j=u_j+\xi_j(u_1,u_2)$, denotando $\lambda_2=0$, tenemos

$$\lambda_j z_j + A_j(z_1,z_2) = z_j' = u_j' + \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \xi_j}{\partial u_k}u_k' = \lambda_j u_j + B_j(u_1,u_2) + \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \xi_j}{\partial u_k}\left[\lambda_k u_k + B_k(u_1,u_2)\right]$$

luego

$$\lambda_j u_j + \lambda_j\xi_j(u_1,u_2) + A_j(\xi(u_1,u_2)) = \lambda_j u_j + B_j(u_1,u_2) + \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \xi_k}{\partial u_k}\left[\lambda_k u_k + B_k(u_1,u_2)\right]$$

Cancelando y reordenando obtenemos

$$\lambda_j\xi_j(u_1,u_2) - \sum_{k=1}^{2}\lambda_k u_k\frac{\partial \xi_j}{\partial u_k} - B_j(u_1,u_2) = \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \xi_j}{\partial u_k}B_k(u_1,u_2) - A_j(\xi(u_1,u_2)). \tag{7}$$

Como $u_k\dfrac{\partial \xi_j}{\partial u_k}(u_1,u_2)=\sum_{|Q|\geq 2} q_k\xi_{jQ}u^Q$ tenemos

$$\begin{aligned}\lambda_j\xi_j(u_1,u_2) - \sum_{k=1}^{2}\lambda_k u_k\frac{\partial \xi_j}{\partial u_k} - B_j(u_1,u_2) &= \sum_{|Q|\geq 2}\lambda_j\xi_{jQ}u^Q - \sum_{k=1}^{2}\lambda_k\left(\sum_{|Q|\geq 2}q_k\xi_{jQ}u^Q\right) - \sum_{|Q|\geq 2}b_{jQ}u^Q \\ &= \sum_{|Q|\geq 2}\left[\left(\lambda_j - \sum_{k=1}^{2}\lambda_k q_k\right)\xi_{jQ} - b_{jQ}\right]u^Q\end{aligned}$$

luego, haciendo $\delta_{jQ}=\lambda_j-\sum_{k=1}^{2}\lambda_k q_k$ y reemplazando en (??), para $j=1,2$ tenemos

$$\sum_{|Q|\geq 2}\left(\delta_{jQ}\xi_{jQ}-b_{jQ}\right)u^Q = \frac{\partial \xi_j}{\partial u_1}B_1(u_1,u_2) + \frac{\partial \xi_j}{\partial u_2}B_2(u_1,u_2) - A_j(\xi(u_1,u_2)). \tag{8}$$

Por otro lado, denotemos por $\mathcal{I}$ al ideal de $\mathbb{C}[[u_1,u_2]]$ generado por la función proyeción u_2, es decir

$$S\in\mathcal{I} \iff \exists\, R\in\mathbb{C}[[u_1,u_2]] \text{ tal que } S(u_1,u_2)=u_2R(u_1,u_2),$$

vamos a despejar las incongnitas b_{jQ}, ξ_{jQ} de (??) imponiendo la siguiente regla

$$\left|\begin{array}{l}\text{Si } u^Q\notin\mathcal{I}, \text{entonces } b_{jQ}=0,\\ \text{Si } u^Q\in\mathcal{I}, \text{entonces } \xi_{jQ}=0.\end{array}\right.$$

Observe que si $u^Q\notin\mathcal{I}$ entonces el exponente es de la forma $Q=(q_1,0)$, con $q_1\geq 2$.
Lo anterior implica que $B_j(u_1,u_2)\in\mathcal{I}$ y por tanto

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial u_1}(u_1,u_2)B_1(u_1,u_2) + \frac{\partial \xi_j}{\partial u_2}(u_1,u_2)B_2(u_1,u_2)\in\mathcal{I}.$$

Por otro lado observe que

$$\xi_j(u_1,u_2)=\xi_{j(2,0)}u_1^2+\xi_{j(3,0)}u_1^3+\xi_{j(4,0)}u_1^4+\cdots \tag{9}$$

Concluímos que para despejar los coeficientes de ξ_j sólo necesitamos considerar los multi-indices Q tales que $u^Q\notin\mathcal{I}$, pero de (??) y del hecho que $B_j(u_1,u_2)\in\mathcal{I}$ resulta

$$\delta_{j(q_1,0)}\xi_{j(q_1,0)} = c_{j(q_1,0)},\quad q_1\geq 2 \tag{10}$$

donde $c_{j(q_1,0)}$ son los coeficientes de $-A_j(\xi(u_1,u_2)) = \sum_{|Q|\geq 2} c_{jQ}u^Q$.

Si $Q=(2,0)$ entonces $\xi_{jQ} = \frac{c_{jQ}}{\delta_{jQ}} = -\frac{a_{jQ}}{\delta_{jQ}}$

Si $Q=(3,0)$ entonces c_{jQ} sólo dependerá de a_{jQ} (los cuales son conocidos) y de $\xi_{j(2,0)}$, por tanto podemos despejar $\xi_{j(3,0)}$. El procedimiento continúa por inducción y de esta manera hemos construído el cambio formal de coordenadas ξ. A continuación, probaremos su convergencia en una vecindad del origen.

Afirmación 1: Si $u^Q \notin \mathcal{I}$ entonces $\delta_{jQ} \neq 0$.

En efecto por la observacion anterior tenemos $Q_{(q_1,0)}$, con $q_1 \geq 2$, además, recordando que $\lambda_2 = 0$, resulta

$$\left| \begin{array}{lcl} \delta_{1(q_1,0)} & = & \lambda_1 - \lambda_1 q_1 - 0\lambda_2 = \lambda_1(1-q_1) \neq 0, \\ \\ \delta_{2(q_1,0)} & = & \lambda_2 - \lambda_1 q_1 - 0\lambda_2 = -\lambda_1 q_1 \neq 0. \end{array} \right.$$

Por lo tanto $\delta_{jQ} \neq 0 \ \forall \ |Q| \geq 2$ siempre que $u^Q \notin \mathcal{I}$, y por tanto lo Afirmación 1 está probada.

Afirmación 2: $\delta = \text{ínf}\left\{|\delta_{jQ}|,\ |Q|\geq 2,\ u^Q \notin \mathcal{I}\right\} > 0$

En efecto

$$\left|\delta_{1(q_1,0)}\right| = |\lambda_1|\,|(1-q_1)| > |\lambda_1|, \qquad \left|\delta_{2(q_1,0)}\right| = |\lambda_1|\,|q_1| > |\lambda_1|.$$

Así resulta que $\delta > 0$, por lo tanto la afirmación 2 es verdadera.

Finalmente, para demostrar la convergencia de ξ_j, usaremos el método de los mayorantes Poincaré.

Afirmación 3 : $\delta\widehat{\xi_j} \ll \widehat{A_j \circ \xi}$.

En efecto, haciendo uso de la ecuación (??) se deduce lo siguiente:

Si $Q=(q,0)$, por lo anterior tenemos

$$\delta\left|\xi_{j(q,0)}\right| \leq \left|\delta_{j(q,0)}\xi_{j(q,0)}\right| = \left|c_{j(q,0)}\right|. \tag{11}$$

Si $Q \neq (q,0)$, entonces $\xi_{jQ} = 0$, luego

$$\delta\,|\xi_{jQ}| = 0 \leq |c_{jQ}| \quad \forall\, Q \neq (q,0). \tag{12}$$

por lo tanto de (??) y (??) resulta

$$\delta\,|\xi_{jQ}| \leq |c_{jQ}| \quad \forall\ |Q|\geq 2.$$

Por (??) se tiene que la Afirmación 3 es verdadera.

Por otro lado haciendo uso de la Afirmación 3 y del item 4 de la Proposicíon ??, se obtiene

$$\delta\hat{\xi}_j(u_1,u_2) \ll \hat{A}_j(u_1+\hat{\xi}_1(u_1,u_2), u_2+\hat{\xi}_2(u_1,u_2))$$

luego

$$\begin{array}{rcl} \delta\tilde{\xi}_j(u) & = & \delta\hat{\xi}_j(u,u) \ll \hat{A}_j(u+\hat{\xi}_1(u,u), u+\hat{\xi}_2(u,u)) \ll \hat{A}_j(u+\tilde{\xi}_1(u), u+\tilde{\xi}_2(u)) \\ & \ll & \hat{A}_j(u+\tilde{\xi}_1(u)+\tilde{\xi}_2(u), u+\tilde{\xi}_1(u)+\tilde{\xi}_2(u)) \ll \tilde{A}_j(u+\tilde{\xi}_1(u)+\tilde{\xi}_2(u)). \end{array} \tag{13}$$

En consecuencia obtenemos

$$\tilde{\xi}_1(u)+\tilde{\xi}_2(u) \ll \delta^{-1}\left(\sum_{j=1}^{2}\tilde{A}_j(u+\tilde{\xi}_1(u)+\tilde{\xi}_2(u))\right). \tag{14}$$

Por lo visto en el Corolario ?? de la sección anterior, es suficiente probar que exista $R > 0$ tal que $\tilde{\xi}_1(u) + \tilde{\xi}_2(u)$ sea convergente en $D_R(0)$. Si denotamos

$$\begin{aligned} F(u) &= \delta^{-1}\left(\sum_{j=1}^{2}\tilde{A}_j(u)\right) = \sum_{n\geq 2} f_n u^n, \text{ donde } f_n = \delta^{-1}\left(\sum_{|Q|=n}(|a_{1Q}| + |a_{2Q}|\right), \quad n \geq 2, \\ S(u) &= \tilde{\xi}_1(u) + \tilde{\xi}_2(u) = \sum_{n\geq 2} s_n u^n, \text{ donde } s_n = \sum_{|Q|=n}(|\xi_{1Q}| + |\xi_{2Q}|), \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

entonces (??) se expresa como

$$S(u) \ll F(u + S(u)). \tag{15}$$

Observe que F es una función holomorfa en una vecindad del $0 \in \mathbb{C}^2$ mientras que S es una serie formal. En una vecindad del $0 \in \mathbb{C}^2$ definimos la función a valores complejos f como

$$f(w, v) = v - F(w + v).$$

Observe que $f(0,0) = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u, v) = 1 - F'(w + v)$, luego $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = 1 - F'(0) \neq 0$. Por el Teorema de la función implicita (ver [?]), existe una función analitica

$$\varphi : D_R(0) \longrightarrow D_R(0) \text{ tal que } \varphi(0) = 0 \text{ y } f(u, \varphi(u)) = 0, \ \forall\, u \in D_R(0)$$

es decir

$$\varphi(u) = F(u + \varphi(u)) \quad \forall\, u \in D_R(0), \tag{16}$$

derivando

$$\varphi'(u) = F'(u + \varphi(u)).[1 + \varphi'(u)],$$

luego $\varphi'(0) = 0$, por lo tanto

$$\varphi(u) = \sum_{n\geq 2} \varphi_n u^n, \quad \forall u \in D_R(0),$$

donde $\varphi_n \in \mathbb{C}$. De (??) tenemos

$$\sum_{n\geq 2} \varphi_n u^n = \sum_{n\geq 2} f_n (u + \varphi(u))^n,$$

igualando los terminos de orden n, tenemos

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= f_2 \\ \varphi_3 &= 2\varphi_2 f_2 + f_3 \geq f_3 \\ \varphi_4 &= \varphi_2^2 f_2 + 2f_2\varphi_3 + 3f_3\varphi_2 + f_4 \geq f_4 \\ \vdots & \qquad \vdots \end{aligned}$$

Se sigue que $\varphi(u)$ es una serie de terminos no negativos y por inducción, se cumple que $\varphi_n \geq f_n$, para todo $n \geq 2$, luego de (??) se tiene que $s_n \leq \varphi_n$, para todo $n \geq 2$. Así $S(u) \ll \varphi(u)$, como φ es holomorfa resulta que $S(u) = \tilde{\xi}_1(u) + \tilde{\xi}_2(u)$ es convergente en $D_R(0)$, luego en (??) resulta que $\tilde{\xi}_j(u)$ converje y usando el Corolario ?? se obtiene que $\xi_j(u_1, u_2)$ converge en una vecindad del cero. Por ultimo, observamos que por la regla anterior, podemos construir inductivamente los coeficiente de B_j y por ser el cambio de coordenadas un biholomorfismo local se sigue que B_j también es analitica en una vecindad del origen. Además como se probó anteriormente $B_j \in \mathcal{I}$, entonces solo basta considerar

$$g = \frac{B_1}{u_2} \ y \ h = \frac{B_2}{u_2}$$

y el Lema 3.1 queda demostrado. □

Lema 4.2. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, $0 \in U$ y $Z \in \mathcal{X}(U)$, con singularidad aislada en el origen y EDO asociada:*

$$\left| \begin{array}{lcl} u_1' & = & \lambda_1 u_1 + u_2 g(u_1, u_2), \\ \\ u_2' & = & u_2 h(u_1, u_2), \end{array} \right. \tag{17}$$

en donde g y h son funciones holomorfas. Entonces existe un cambio de coordenadas holomorfo en una vecindad del origen, existe $p \in \mathbb{N}$ y existen funciones analiticas $A(x_1, x_2)$ y $f(x_1, x_2)$ definidas en una vecindad de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, con $f(0,0) \neq 0$, tales que (??) se escribe:

$$\left| \begin{array}{lcl} x_1' & = & f(x_1, x_2)(x_1 + A(x_1, x_2)), \\ \\ x_2' & = & f(x_1, x_2) x_2^{p+1}. \end{array} \right. \tag{18}$$

Demostración. Para transformar la ecuación (??) en (??), usaremos un cambio de coordenadas del tipo siguiente

$$(x_1, x_2) = \xi(u_1, u_2) = (u_1, \eta(u_1, u_2))$$

donde $\eta(u_1, u_2) = u_2 \tilde{\eta}(u_1, u_2)$ y $\tilde{\eta}(0,0) \neq 0$.

Consideraremos las funciones holomorfas $C(u_1, u_2)$ y $D(u_1, u_2)$ definidas como

$$\begin{array}{lcl} C(u_1, u_2) & = & \lambda_1 u_1 + u_2 g(u_1, u_2) \\ D(u_1, u_2) & = & u_2 h(u_1, u_2). \end{array}$$

y denotamos por $\mathcal{J}$ al ideal generado por $C(u_1, u_2)$ y $D(u_1, u_2)$. Vamos a demostrar que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $u_2^{p+1} \in \mathcal{J}$.

En efecto, en primer lugar observe que

$$C(u_1, 0) = \lambda_1 u_1, \quad C(0,0) = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial u_1}(0,0) = \lambda_1 \neq 0 \tag{19}$$

En consecuencia $C(u_1, u_2)$ es regular de orden 1 con respecto a la variable u_1 en 0. Luego haciendo uso del Teorema e Preparación de Weierstrass (ver [?]), la función holomorfa $C(u_1, u_2)$ queda expresada como

$$C(u_1, u_2) = \tilde{C}(u_1, u_2)\,(u_1 + a(u_2)) \tag{20}$$

donde a es holomorfa en una vecindad del $0 \in \mathbb{C}$, $a(0) = 0$, $\tilde{C}(u_1, u_2)$ es holomorfa en un polidisco abierto $\Delta \subseteq \mathbb{C}^2$ que contiene al origen y $\tilde{C}(u_1, u_2) \neq 0$, $\forall\ (u_1, u_2) \in \Delta$. Observe también que, de (??) y (??), se obtiene:

$$\tilde{C}(u_1, 0) = \lambda_1$$

Por otro lado aplicando el Teoremas de la División de Weierstrass (ver [?]) a las funciones holomorfas $D(u_1, u_2)$ y $u_1 + a(u_2)$, se deduce que $D(u_1, u_2)$ se puede escribir como

$$D(u_1, u_2) = q(u_1, u_2)\,(u_1 + a(u_2)) + b(u_2) \tag{21}$$

donde $q(u_1, u_2)$ y $b(u_2)$ son, respectivamente, funciones holomorfas en vecindades del $0 \in \mathbb{C}^2$ y $0 \in \mathbb{C}$, además note que de (??) resulta

$$q(u_1, 0) = 0 \ \text{ y } \ b(0) = 0.$$

De (??) y (??) se llega a

$$D(u_1, u_2) = Q(u_1, u_2)C(u_1, u_2) + b(u_2) \tag{22}$$

donde $Q(u_1, u_2) = \dfrac{q(u_1, u_2)}{\tilde{C}(u_1, u_2)}$.

Afirmación 1 : $b \not\equiv 0$.

Procediendo por contradicción, si suponemos que $b \equiv 0$, entonces (??) sería expresado como

$$D(u_1, u_2) = Q(u_1, u_2)C(u_1, u_2),$$

luego el problema (??) quedaría de la forma siguiente

$$\left| \begin{array}{lcl} u_1' & = & C(u_1, u_2) \\ u_2' & = & Q(u_1, u_2)C(u_1, u_2) \end{array} \right.$$

es decir $Z(u_1, u_2) = (C(u_1, u_2), Q(u_1, u_2)C(u_1, u_2))$ y esto contradice la hipótesis de que $(0, 0)$ es una singularidad aislada de Z. La Afirmación 1 está probada.

Como b no es idénticamente nula, entonces deben existir un $p \in \mathbb{N}$ y una $\tilde{b} = \tilde{b}(u_2)$ función analitica en una vecindad del $0 \in \mathbb{C}$, con $\tilde{b}(0) \neq 0$, tal que

$$b(u_2) = u_2^{p+1}\tilde{b}(u_2)$$

luego (??) se expresa como

$$D(u_1, u_2) = Q(u_1, u_2)C(u_1, u_2) + u_2^{p+1}\tilde{b}(u_2). \tag{23}$$

Como $\tilde{b}(0) \neq 0$, entonces, por continuidad, resulta que $\tilde{b}(u_2) \neq 0$ en una vecindad de 0, luego de (??) tenemos

$$u_2^{p+1} = \frac{1}{\tilde{b}(u_2)}D(u_1, u_2) - \frac{Q(u_1, u_2)}{\tilde{b}(u_2)}C(u_1, u_2), \tag{24}$$

y por tanto $u_2^{p+1} \in \mathcal{J}$.

Ahora nuestro objetivo principal se reduce a encontrar $\eta(u_1, u_2)$, $f(x_1, x_2)$ y $A(x_1, x_2)$ que satisfagan las condiciones requeridas.

Para ello, consideremos $\eta(u_1, u_2)$, como solución de la ecuación

$$\left| \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \eta}{\partial u_2} + Q(u_1, u_2)\dfrac{\partial \eta}{\partial u_1} & = & 0 \\ \\ \eta(0, u_2) & = & \rho u_2, \end{array} \right. \tag{25}$$

donde $\rho \in \mathbb{C}$ satisface $\rho^p = \dfrac{\tilde{b}(0)}{\lambda_1}$.

La teoría de EDP garantiza la existencia de la función holomorfa $\eta(u_1, u_2)$ que resuelve (??), además se deduce de (??) que

$$\eta(u_1, u_2) = \rho u_2 + u_1 u_2 \phi(u_1, u_2) \tag{26}$$

donde $\phi(u_1, u_2)$ es una función holomorfa en $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. En consecuencia nuestro cambio de coordenadas $\xi(u_1, u_2)$ se expresa de la forma siguiente

$$(x_1, x_2) = \xi(u_1, u_2) = (u_1, \rho u_2 + u_1 u_2 \phi(u_1, u_2)) = (u_1, \eta(u_1, u_2)) \tag{27}$$

también observe que $\xi'(0,0) \in GL(\mathbb{C}^2)$, luego el Teorema de la función inversa para funciones de varias variables complejas (ver [?]) garantiza la existencia de una función $\varphi(x_1, x_2)$ holomorfa en una vecindad del $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, tal que

$$(\xi \circ \varphi)(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \quad \text{y} \quad (\varphi \circ \xi)(u_1, u_2) = (u_1, u_2) \tag{28}$$

además de (??) y (??) se debe tener

$$\varphi(x_1, x_2) = (x_1, \varphi_2(x_1, x_2)) = (u_1, u_2)$$

Definimos las funciones $\tilde{\eta}(u_1, u_2)$, $f(x_1, x_2)$ y $A(x_1, x_2)$ de la forma siguiente

$$\tilde{\eta}(u_1, u_2) = \rho + u_1 \phi(u_1, u_2) \tag{29}$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial \eta}{\partial u_2}(x_1, \varphi_2(x_1, x_2)) \frac{\tilde{b}(\varphi_2(x_1, x_2))}{[\tilde{\eta}(x_1, \varphi_2(x_1, x_2))]^{p+1}} \tag{30}$$

$$A(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{f(x_1, x_2)} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \lambda_1 x_1 + \frac{1}{f(x_1, x_2)} \varphi_2(x_1, x_2) g(x_1, \varphi_2(x_1, x_2)) \tag{31}$$

Observe que $f(0,0) = \lambda_1 \neq 0$, por lo tanto $A(x_1, x_2)$ esta bien definda. Además también note que $\eta(u_1, u_2) = u_2 \tilde{\eta}(u_1, u_2)$ tal como queríamos.

A continuación probaremos que la funcion holomorfa $\xi(u_1, u_2)$ es el cambio de coordenadas que transforma la ecuación (??) en (??).

En efecto tenemos

$$x_1 = u_1 \tag{32}$$

$$x_2 = \eta(u_1, u_2) = u_2 \tilde{\eta}(u_1, u_2) \tag{33}$$

Derivando (??) respecto de t, resulta

$$\begin{aligned} x_1' &= u_1' = \lambda_1 u_1 + u_2 g(u_1, u_2) = \lambda_1 x_1 + \varphi_2(x_1, x_2) g(x_1, \varphi_2(x_1, x_2)) \\ &= f(x_1, x_2) \frac{1}{f(x_1, x_2)} (\lambda_1 x_1 + \varphi_2(x_1, x_2) g(x_1, \varphi_2(x_1, x_2))) \\ &= f(x_1, x_2) \left[x_1 + \left(\frac{1}{f(x_1, x_2)} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \lambda_1 x_1 + \frac{1}{f(x_1, x_2)} \varphi_2(x_1, x_2) g(x_1, \varphi_2(x_1, x_2)) \right] \\ &= f(x_1, x_2) [x_1 + A(x_1, x_2)] \end{aligned} \tag{34}$$

Ahora derivando (??) respecto a t, resulta

$$x_2' = \frac{\partial \eta}{\partial u_1} u_1' + \frac{\partial \eta}{\partial u_2} u_2' = \frac{\partial \eta}{\partial u_1} C(u_1, u_2) + \frac{\partial \eta}{\partial u_2} D(u_1, u_2). \tag{35}$$

Por otro lado de (??) se tiene lo siguiente

$$\frac{\partial \eta}{\partial u_2}(u_1, u_2) = f(u_1, \eta(u_1, u_2)) [\tilde{\eta}(u_1, u_2)]^{p+1} \frac{1}{\tilde{b}(u_2)} \tag{36}$$

Reemplazando este resultado en la primera ecuación de (??) resulta que

$$\frac{\partial \eta}{\partial u_1}(u_1, u_2) = -f(u_1, \eta(u_1, u_2)) [\tilde{\eta}(u_1, u_2)]^{p+1} \frac{Q(u_1, u_2)}{\tilde{b}(u_2)} \tag{37}$$

observe que de (??) y (??) y (??) se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial u_1} C(u_1, u_2) + \frac{\partial \eta}{\partial u_2} D(u_1, u_2) &= f(u_1, \eta(u_1, u_2)) u_2^{p+1} [\tilde{\eta}(u_1, u_2)]^{p+1} = f(u_1, \eta(u_1, u_2)) [u_2 \tilde{\eta}(u_1, u_2)]^{p+1} \\ &= f(u_1, \eta(u_1, u_2)) [\eta(u_1, u_2)]^{p+1} = f(x_1, x_2) x_2^{p+1} \end{aligned} \tag{38}$$

De (??) y (??) tenemos que

$$x_2' = f(x_1, x_2)x_2^{p+1}$$

De (??) y (??) concluímos que la función holomorfa $\xi(u_1, u_2)$ es el cambio de coordenadas que transforma (??) en (??). □

Lema 4.3. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, $0 \in U$ y $Z \in \mathcal{X}(U)$ con singularidad aislada en el origen y EDO asociada*

$$\left| \begin{array}{lcl} x_1' & = & x_1 + x_2 A(x_1, x_2) \\ \\ x_2' & = & x_2^{p+1}, \end{array} \right. \tag{39}$$

donde $A(x_1, x_2) = \sum_{|Q| \geq 1} a_Q x^Q$. Entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ y un sistema de coordenadas analiticas donde la ecuación anterior se escribe como

$$\left| \begin{array}{lcl} w_1' & = & w_1(1 + \lambda w_2^p) + w_2 R(w_1, w_2) \\ \\ w_2' & = & w_2^{p+1}, \end{array} \right. \tag{40}$$

donde $R(w_1, w_2)$ tiene orden por lo menos $p+1$ en $0 \in \mathbb{C}^2$.

Demostración. En primer lugar, transformaremos la ecuación (??) en la siguiente expresión

$$\left| \begin{array}{lcl} x_1' & = & x_1(1 + \tilde{B}(x_2)) + x_2 S(x_1, x_2) \\ \\ x_2' & = & x_2^{p+1}, \end{array} \right. \tag{41}$$

en donde $\tilde{B}(x_2)$ es un polinomio de grado menor o igual que p y $S(x_1, x_2)$ tiene orden por lo menos $p + 1 \in \mathbb{N}$.

En efecto consideremos los cambios de variables sucesivos de la forma

$$\xi_l(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1 - a_{(0,1)} x_2^2, x_2), & \text{si } l = 1 \\ \\ (x_1 + \xi_{(l,1)} x_1^l x_2 + \cdots + \xi_{(2,l-1)} x_1^2 x_2^{l-1} + \xi_{(0,l+1)} x_2^{l+1}, x_2), & \text{si } l \geq 2, \end{cases}$$

siendo los coeficientes ξ_Q tomados de la siguiente manera

$$\xi_{(l,1)} = \frac{-\tilde{a}_{(l,0)}}{1-l}, \ldots, \xi_{(2,l-1)} = \frac{-\tilde{a}_{(2,l-1)}}{1-2} \quad \text{y} \quad \xi_{(0,l+1)} = -\tilde{a}_{(0,l)}$$

y los $\tilde{a}_Q$ con $|Q| = l$ dependen de los $\tilde{a}_{Q'}$, con $|Q'| \leq l - 1$, hallados en la etapa $l - 1$.

Estos cambios de variables se aplican sucesivamente hasta la etapa $l = p$, transformando la ecuación (??) en la (??). Más aún $\tilde{B}(x_2) = b_i x_2^i + b_{i+1} x_2^{i+1} + \cdots + b_p x_2^p$.

Por otro lado, un fácil cálculo muestra que el cambio de coordenadas holomorfo

$$H_i(w_1, w_2) = \left(w_1, w_2 + \frac{b_i}{p-i} w_2^{i+1} \right),$$

transforma la ecuación (??) en

$$\left| \begin{array}{lcl} w_1' & = & w_1(1 + \tilde{b}_{i+1} w_2^{i+1} + \tilde{b}_{i+2} w_2^{i+2} + \cdots + \tilde{b}_p w_2^p) + w_2 \tilde{R}(w_1, w_2) \\ \\ w_2' & = & w_2^{p+1}, \end{array} \right. \tag{42}$$

Note que hemos eliminado en $\tilde{B}$ el monomio de grado i. Continuando el proceso, consideramos sucesivamente cambios de coordenadas holomorfos $H_{i+1}, \ldots H_{p-1}$ los cuales eliminan los monomios de grado $i+1, \ldots p-1$ y se llega a

$$\left| \begin{array}{lcl} w_1' & = & w_1(1+\lambda w_2^p) + w_2 R(w_1, w_2) \\ & & \\ w_2' & = & w_2^{p+1}, \end{array} \right.$$

donde $R(w_1, w_2)$ es de multiciplidad por lo menos $p+1$ en el origen, por lo tanto el Lema ?? queda probado. $\square$

5. El resultado principal

Aplicando los 3 lemas establecidos en la sección anterior, podemos demostrar que las sillas-nodos complejas tienen una forma específica.

Teorema 5.1. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, $0 \in U$ y $Z \in \mathcal{X}(U)$, con singularidad aislada en el origen y con EDO asociada:*

$$\left| \begin{array}{lcl} z_1' & = & \lambda_1 z_1 + A_1(z_1, z_2) \\ & & \\ \dot{z}_2 & = & A_2(z_1, z_2), \end{array} \right. \tag{43}$$

donde $A_j(z_1, z_2) = \sum\limits_{|Q| \geq 2} a_{jQ} z^Q$, $j = 1, 2$. Entonces existen $p \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y un cambio de coordenadas holomorfo que transforma la EDO anterior en

$$\left| \begin{array}{lcl} w_1' & = & w_1(1+\lambda w_2^p) + w_2 R(w_1, w_2) \\ & & \\ w_2' & = & w_2^{p+1}, \end{array} \right. \tag{44}$$

donde $R(w_1, w_2)$ es de multiciplidad por lo menos $p+1$ en $0 \in \mathbb{C}^2$.

Demostración. En primer lugar, observamos que la hipotesís del Teorema ?? son las mismas que la del Lema ??, entonces existe un cambio de coordenadas holomorfo $\xi(z_1, z_2)$ que transforma la ecuación (??) en

$$\left| \begin{array}{lcl} u_1' & = & \lambda_1 u_1 + u_2 g(u_1, u_2) \\ & & \\ u_2' & = & u_2 h(u_1, u_2), \end{array} \right. \tag{45}$$

donde g y h son funciones holomorfas en $(0,0) \in \mathbb{C}^2$. Por el Lema ??, existe otro cambio de coordenadas $\varphi(u_1, u_2)$ holomorfo en una vecindad del origen de $\mathbb{C}^2$ que transforma la ecuación (??) en

$$\left| \begin{array}{lcl} x_1' & = & f(x_1, x_2)\,(x_1 + A(x_1, x_2)) \\ & & \\ x_2' & = & f(x_1, x_2) x_2^{p+1}, \end{array} \right. \tag{46}$$

donde $f(0,0) \neq 0$ y $A(x_1, x_2)$ son funciones holomorfas en una vecindad del $(0,0) \in \mathbb{C}^2$. Como $f(0,0) \neq 0$, por continuidad f no se anula en una vecindad del origen y esto implica que la ecuación (??) es equivalente a

$$\left| \begin{array}{lcl} x_1' & = & x_1 + A(x_1, x_2) \\ & & \\ x_2' & = & x_2^{p+1}. \end{array} \right. \tag{47}$$

Ahora consideremos una cambio de variable de la forma

$$\xi(x_1, x_2) = (x_1 + \xi_1(x_1, x_2), x_2)$$

y siguiendo la misma idea de la prueba del Lema ??, se llega a verificar que $\xi(x_1, x_2)$ es holomorfa en una vecindad del $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ y transforma la ecuación (??) en

$$\left| \begin{array}{lcl} x_1' & = & x_1 + x_2 A_1(x_1, x_2) \\ \\ x_2' & = & x_2^{p+1}, \end{array} \right. \tag{48}$$

donde $A_1(x_1, x_2)$ es holomorfa en una vecindad del origen. Finalmente, aplicando el Lema ?? a la ecuación (??)tenemos que ella es transformada en

$$\left| \begin{array}{lcl} w_1' & = & w_1(1 + \lambda w_2^p) + w_2 R(w_1, w_2) \\ \\ w_2' & = & w_2^{p+1}, \end{array} \right.$$

donde $R(w_1, w_2)$ es una función holomorfa en una vecindad del $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, de orden mayor o igual que $p+1$ y así queda probado el Teorema. □

Corolario Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ un abierto con $0 \in U$ y consideremos $Z = (\lambda_1 z_1 + A(z_1, z_2), A_2(z_1, z_2)) \in \mathcal{X}(U)$ donde A_1 y A_2 tiene orden mayor o igual que 2 en el origen. Entonces existen constantes $p \geq 1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que Z es localmente analíticamente conjugado al campo

$$W(w_1, w_2) = \Big(w_1(1 + \lambda w_2^p) + w_2 R(w_1, w_2), w_2^{p+1}\Big)$$

donde $R(w_1, w_2)$ es de multiciplidad mayor o igual que $p+1$ en $0 \in \mathbb{C}^2$.

Bibliografía

[1] Benazic, R. (2008) *Tópicos de dinámica compleja*, Notas de clase, Lima.

[2] Benazic, R. (1996) *Singularidades de Campos Vectoriales Holomorfos en el Dominio de Poincaré*, PRO MATHEMATICA, Vol. X Nos. 19-20 , pp. 9 - 33.

[3] Benazic, R., Espinoza, C., Jurado, L. (2009) *El Teorema de Dulac*, PESQUIMAT, Vol. XII, N° 1 pp. 18 - 31.

[4] Cartan H. (1968) *Teoría Elemental de Funciones Analíticas de Una o Varias Variables Complejas*, Selecciones Científicas.

[5] Camacho C., Sad, P. (1987) *Pontos Singulares de Equações Diferenciais Analiticas*, 16° Colóquio Brasileiro de Matemática.

[6] Gunning, R., Rossi, H. (1965) *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Prentice-Hall.

[7] Hille, E. (1976) *Ordinary differential equations in the complex domain*, Dover.

[8] Sotomayor, J. (1979) *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA.