PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XV N°1, pp. 7-16, Lima - Perú, Marzo 2013

ECUACIÓN VISCOELÁSTICA CON AMORTIGUAMIENTO LOCALMENTE DISTRIBUIDO

Alfonso Pérez Salvatierra[1], *Victoriano Yauri Luque*[2],
Andrés Guardia Cayo[3], *Elvis Bustamante*[4]

Resumen: En el presente trabajo estudiamos la ecuación viscoelastica unidimensional definida sobre el intervalo $[0, L]$. Dividimos el estudio en dos partes:
En la primera analizamos la existencia y unicidad de soluciones usando la teoría de los semigrupos lineales, aplicando en el problema de Cauchy Abstracto y en la segunda parte vemos la estabilidad exponencial del C_0- semigrupo de contracciones asociado al sistema viscoelástica lineal.
Palabras clave: Ecuación viscoelástica, semigrupo, generador infinitesimal .

VISCOELASTIC EQUATION WITH LOCALLY DISTRIBUTED DAMPING

Abstract: In this present work we study the one-dimensional viscoelastic equation defined on the interval $[0, L]$. We divided the study into two parts:
In the first we analyze the existence and uniqueness of solutions using the theory of the linear semigroups, applying in the Abstract Cauchy problem and in the second part we see the exponential stability of the C_0-semigroup of contractions associated with linear viscoelastic system.
Key words: Viscoelastic equation, semigroup, infinitesimal generator.

1. Introducción

Consideraremos el movimiento de una barra elástica, $u(x, t)$, en la dirección x y en el instante t, con la configuración referencial de longitud L. Supongamos que el material es de tipo viscoso por lo tanto la ley constitutiva que relaciona tensión y deformación es

$$\theta = \alpha u_x + \gamma u_{xt}.$$

de donde deducimos que su ecuación momento viene dado por,

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \gamma u_{xxt} = 0, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty).$$

con α, γ constantes reales positivas.
Si la barra se sujeta en ambos extremos, $x = 0$ y $x = L$, entonces las condiciones de frontera son expresadas por,

$$u(0, t) = 0, \; u(L, t) = 0,$$

Observemos que si en vez de γ, pusiéramos $-a(x)$, con $a \in L^{\infty}_{+}(0, L)$ y $a(x) \geq a_0 > 0$, en la ecuación anterior, entonces el amortiguamiento es distribuido sobre toda la barra.
En la práctica, es suficiente considerar el amortiguamiento localmente distribuido, ver [7]. Nosotros trabajamos considerando $\gamma = \gamma(x) \in W^{2,\infty}$.
Por lo que plantearemos el problema viscoelástica con condiciones iniciales y de frontera siguiente:

$$\left| \begin{array}{l} u_{tt} - \alpha u_{xx} - \gamma(x) u_{xxt} = 0, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \text{en } (0, L) \\ u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \text{en } (0, L) \end{array} \right. \tag{1}$$

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: apersal@hotmail.com
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: victoriano_ yauri@hotmail.com
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: e-mail: agcbayo@yahoo.es
[4]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: ebrunmsm@hotmail.com

donde $\gamma \in W^{2,\infty}$ cumple con las siguientes condiciones:

C1) Existe $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(x) \geq \gamma_0 > 0$ en $[0, L]$,

C2) $\gamma''(x) \leq 0$ en $[0, L]$.

El estudio con disipación de tipo γ como constante, fue realizado por Zheng-Liu en 1999, ver [17] y $\gamma(x)$ como una función lineal, fue estudiado por Cunha -Diniz, ver [3]. Ellos demostraron la estabilidad exponencial del semigrupo asociado a una ecuación lineal viscoelástica. Nosotros aportaremos, mejorando el estudio realizado por Zheng-Liu, con $\gamma = \gamma(x) \in W^{2,\infty}$.

2. Notaciones y Resultados Previos

Sea A un operador definido sobre un espacio de Banach X. El conjunto resolvente de A es el conjunto de los $\lambda \in \mathbb{C}$, para los cuales el operador lineal $\lambda I - A$ es inversible, con inverso acotado y tiene dominio denso en X, se denota por $\rho(A)$.
Damos algunos teoremas que serán usados en la siguientes secciones

Teorema 1 (Hille -Yosida) *Un operador lineal A, no acotado es un generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones si, y sólo si,*

i) *A es cerrado y $\overline{D(A)} = X$.*

ii) El conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contiene al conjunto $\mathbb{R}^+$ y para todo $\lambda > 0$, es válido

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Demostración. Ver [9], pág. 63 ∎

Teorema 2 *Sea A un operador lineal (no acotado), disipativo y con dominio denso en X. Si $0 \in \rho(A)$, entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones.*

Demostración. Ver [9], pág. 88 ∎
Sea A un operador lineal de $D(A) \subset E$ en E . Dado $x_0 \in E$ el problema de Cauchy para A con valor inicial x_0 consiste en encontrar una solución $u(t)$ para el problema de valor inicial

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad t > 0 \\ u(0) = x_0 \end{array} \right. \tag{2}$$

Notar que como $u(t) \in D(A)$ para $t > 0$ y u es continua en $t = 0$, el sistema no puede tener una solución para $x \notin \overline{D(A)}$.

Teorema 3 *Sea $S(t)$ un C_0 semigrupo y sea A su generador infinitesimal . Entonces*
a) Para $x \in E$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)x ds = S(t)x.$$

b) Para $x \in E$, $\int_0^t S(s)x ds \in D(A)$ y

$$A\left(\int_0^t S(s)x ds\right) = S(t)x - x.$$

c) Para $x \in D(A)$, $S(t)x \in D(A)$ y

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

d) Para $x \in D(A)$,

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(\tau)Axd\tau = \int_s^t AS(\tau)xd\tau$$

Demostración. Ver [14], pág. 44 ■

Por el teorema anterior tenemos que el operador A, es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo S, el problema de Cauchy para A tiene una solución denotada por $u(t,x) = S(t)x$ para todo $x \in D(A)$. Ahora para mostrar que $x \in D(A)$, $u(t,x) = S(t)x$ es la única solución del problema de valor inicial dado en (2), se usará el siguiente teorema.

Teorema 4 *Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo diferenciable para todo $x \in E$ el problema de valor inicial (2) tiene una única solución, cuando $x_0 \in D(A)$.*

Demostración. Ver [14], pág. 104 ■

Teorema 5 Sean A el generador infinitesimal de un semigrupo diferenciable y $S(t) = e^{At}$ un semigrupo C_0 de contracciones definido en un espacio de Hilbert. Entonces $S(t)$ es exponencialmente estable si, y sólo si,

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R} \tag{3}$$

$$\overline{\text{lím}}_{|\beta|\to\infty} \left\|(i\beta I - A)^{-1}\right\| < \infty \tag{4}$$

Demostración. Ver [17], pág.4 ■

3. Existencia, Unicidad y Estabilidad Exponencial

Para transformar el problema (1) en una ecuación autónoma introduciremos la notación $v = u_t$, $\Delta u = u_{xx}$ y consideraremos el espacio de Hilbert

$$H = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)$$

con $H_0^1(0,L)$ provisto de la norma $\|u\|_{H_0^1}^2 = \int_0^L \alpha\,|u_x|^2\,dx$ y H provisto del producto interno

$$(U_1, U_2)_H = \int_0^L \alpha u_x.y_x dx + \int_0^L v.z dx,$$

con $U_1 = (u,v)^T$, $U_2 = (y,z)^T \in H$.

El problema (1) puede ser reducido a un problema de Cauchy con condición inicial en el espacio de Hilbert H. Así obtenemos un operador autónomo para poder aplicar la teoría de semigrupos al P.V.I. siguiente

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{dU}{dt} = AU, \quad t > 0 \\ U|_{t=0} = U_0 \end{array}\right. \tag{5}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \alpha\Delta & \gamma(x)\Delta \end{pmatrix}, \; U = (u,v)^T \tag{6}$$

$$U|_{t=0} = (u_0, u_1)^T.$$

con

$$D(A) = \left\{y = (u,v)^T \in H / v \in H_0^1(0,L),\; \alpha u_x + \gamma(x)v_x \in H^1(0,L)\right\}.$$

Proposición 1 *El operador A es disipativo.*

Demostración. Sea $U = (u, v)^T \in D(A)$.

$$(AU, U)_H = \int_0^L \alpha v_x u_x dx + \int_0^L (\alpha u_{xx} + \gamma(x) v_{xx}) v dx. \tag{7}$$

Haciendo integración por partes para $\alpha u_x + \gamma(x) v_x$ y $v \in H^1(0, L)$, tenemos

$$\int_0^L (\alpha u_x + \gamma(x) v_x)_x v dx = -\int_0^L (\alpha u_x + \gamma(x) v_x) v_x dx$$

$$(AU, U)_H = -\int_0^L \gamma(x) v_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \gamma''(x) v^2 \, dx \tag{8}$$

y usando $(C1)$ y $(C2)$ en el lado derecho de (8) tenemos

$$(AU, U)_H \leq 0. \quad \blacksquare$$

Teorema 6 *El operador A definido en (6) es un generador infinitesimal de un C_0- semigrupo de contracción en H.*

Demostración. Como $H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$ es denso en $H_0^1(0, L)$ y $L^2(0, L)$ con sus correspondientes normas y

$$\left(H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)\right) \times \left(H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)\right) \subset D(A) \subset H,$$

entonces

$$D(A) \text{ es denso en } H.$$

Luego, sea $F = (f, g)^T \in H$, consideremos la ecuación $AU = F$, es decir,

$$\begin{aligned} v &= f \in H_0^1(0, L) \\ \alpha u_{xx} + \gamma(x) v_{xx} &= g \in L^2(0, L) \hookrightarrow H^{-1}(0, L). \end{aligned}$$

Tomamos $v = f$, obtenemos

$$\alpha u_{xx} + \gamma(x) f_{xx} = g \in H^{-1}(0, L).$$

Evaluando

$$\int_0^L (\alpha u_{xx} + \gamma(x) f_{xx}) w dx = \int_0^L g w dx, \forall w \in H_0^1(0, L).$$

Efectuando integración por partes

$$\int_0^L (\alpha u_x + \gamma(x) f_x)_x w dx = -\int_0^L (\alpha u_x + \gamma(x) f_x) w_x dx$$

$$\int_0^L (\underbrace{\alpha u_{xx} + \gamma(x) f_{xx}}_{g} + \gamma'(x) f_x) w dx = -\int_0^L (\alpha u_x + \gamma(x) f_x) w_x dx. \tag{9}$$

Sea $G = g + af_x \in L^2(0, L), F = \gamma(x) f_x \in L^2(0, L)$ y reemplazando en (9) tenemos

$$\int_0^L \alpha u_x w_x dx = -\int_0^L G w dx - \int_0^L F w_x dx \;\; ; \;\; \forall w \in H_0^1(0, L). \tag{10}$$

Definimos

$$\begin{array}{rccl} a(.,.): & H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) & \to & \mathbb{R} \\ & (u, w) & \mapsto & a(u, w) = \alpha \int_0^L u_x w_x dx \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & H_0^1(0, L) & \to & \mathbb{R} \\ & w & \mapsto & \langle \varphi, w \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} = -\int_0^L G w dx - \int_0^L F w_x dx \end{array}$$

Así en (10) tenemos

$$a(u,v) = \langle \varphi, w \rangle \quad ; \quad \forall w \in H_0^1(0,L).$$

Por el teorema de Lax-Milgran tenemos que existe un único $u \in H_0^1(0,L)$ tal que

$$a(u,w) = \langle \varphi, w \rangle \quad \forall w \in H_0^1(0,L).$$

Entonces existe un único $(u,v)^T \in H_0^1(0,L)$ tal que

$$\alpha u_{xx} + \gamma(x) v_{xx} = g \ \wedge \ v = f.$$

Entonces A es inversible.
Sea $U = (u,v)^T \in D(A)$

$$\|U\|_H^2 = \|u\|_{H_0^1}^2 + \|v\|_{L^2}^2$$

$$\|U\|_H^2 = \frac{1}{\alpha}\|\alpha u_x\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2$$

$$\|U\|_H^2 = \frac{1}{\alpha}\|\alpha u_x + \gamma(x) v_x - \gamma(x) v_x\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2$$

$$\|U\|_H^2 \leq \frac{1}{\alpha}\left(\|\alpha u_x + \gamma(x) v_x\|_{L^2} + \|\gamma(x) v_x\|_{L^2}\right)^2 + \|v\|_{L^2}^2.$$

Desde que $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ y $\|\gamma(x)v_x\|_{L^2}^2 \leq \|\gamma\|_{L^\infty}^2 \|v_x\|_{L^2}^2$,
se tiene

$$\|U\|_H^2 \leq \frac{2}{\alpha}\|\alpha u_x + \gamma(x) v_x\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\alpha}\|\gamma\|_{L^\infty}^2 \|v_x\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2.$$

Aplicando la desigualdad de Poincaré y $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ tenemos

$$\|U\|_H^2 \leq \frac{4K^2}{\alpha^2}\|\alpha u_{xx} + \gamma(x) v_{xx}\|_{L^2}^2 + \left(\frac{4K^2}{\alpha^2}\|\gamma'\|_{L^\infty}^2 + \frac{2}{\alpha}\|\gamma\|_{L^\infty}^2 + \frac{1}{\alpha}K^2\right)\|v_x\|_{L^2}^2.$$

Tomamos $M^2 = \text{máx}\{\frac{9K^2}{\alpha^2}, \frac{4K^2}{\alpha^2}\|\gamma'\|_{L^\infty}^2 + \frac{2}{\alpha}\|\gamma\|_{L^\infty}^2 + \frac{1}{\alpha}K^2\}$ tenemos

$$\|U\|_H^2 \leq M^2\left(\|\alpha u_{xx} + \gamma(x) v_{xx}\|_{L^2}^2 + \|v_k\|_{H_0^1}^2\right),$$

es decir,

$$\|U\|_H^2 \leq M^2 \|AU\|_H^2 \, ; \forall U \in D(A)$$

y como A es inversible tenemos

$$\left\|A^{-1}F\right\|_H \leq M \|F\|_H \, ; \forall F \in H.$$

Entonces A^{-1} es acotado.
Como A es inversible y A^{-1} es acotado, entonces

$$0 \in \rho(A).$$

Como A^{-1} es inversible y acotado entonces A es acotado.

En resumen:
Hemos verificado que $D(A)$ es denso en H, $0 \in \rho(A)$ y por la proposición 1, A es disipativo; luego, por el teorema 3, concluimos que el operador A es un generador infinitesimal de un C_0- semigrupo $S(t)$ de contracciones en H, que se denota $S(t)$ por $e^{At}, t \geq 0$. ■
Como A es un operador cerrado, entonces $\left(D(A), \|.\|_{D(A)}\right)$ es un Espacio de Banach con la norma del gráfico, esto es ,

$$\|w\|_{D(A)}^2 = \|w\|_H^2 + \|Aw\|_H^2.$$

Si tomamos $w = U_0 \in D(A)$ y usando el teorema 5 tenemos

$$\exists ! U \in C^1(0,\infty,H) \cap C(0,\infty,D(A))$$

lo cual resuelve el problema de Cauchy (5). Con los resultados obtenidos veremos la estabilidad exponencial del C_0 - semigrupo de contracción $(S(t))_{t>0}$ generado por A, asociado a la ecuación viscoelástica lineal con amortiguamiento localmente distribuido.

Proposición 2

$$\left\{ i\beta \in i\mathbb{R} \ / \ |\beta| < \left\|A^{-1}\right\|^{-1} \right\} \subset \rho(A).$$

Demostración. Sea $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $|\beta| < \left\|A^{-1}\right\|^{-1}$, entonces

$$\left\|i\beta A^{-1}\right\| < 1. \tag{11}$$

De (11) tenemos $i\beta A^{-1} - I$ es inversible y continua . Como A es inversible y continua entonces

$$i\beta I - A = \left(i\beta A^{-1} - I\right) A$$

es inversible y continua , luego

$$i\beta \in \rho(A). \quad \blacksquare$$

Proposición 3 *Sea $w \in \mathbb{R}^+$. Si*

$$\{i\beta \in i\mathbb{R} \ / \ |\beta| < w\} \subset \rho(A)$$

y

$$\sup\left\{\left\|(i\beta I - A)^{-1}\right\| / |\beta| < w\right\} = M < \infty,$$

entonces

$$iw \in \rho(A).$$

Demostración. Sea $\beta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|\beta_0| < w$, entonces

$$i\beta_0 \in \rho(A). \tag{12}$$

Si $\left\|i(\beta - \beta_0)(i\beta_0 I - A)^{-1}\right\| < 1$, entonces

$$I + i(\beta - \beta_0)(i\beta_0 I - A)^{-1} \text{ es inversible y continua.} \tag{13}$$

Por (12), (13) y como

$$i\beta I - A = (i\beta_0 I - A)(I + i(\beta - \beta_0)(i\beta I - A)^{-1})$$

entonces

$$i\beta I - A \quad \text{es inversible.} \tag{14}$$

Tenemos que $\left\|(i\beta_0 I - A)^{-1}\right\| \leq M$ y usando (14) obtenemos

$$\text{si } |\beta_0| < w \text{ y } |\beta - \beta_0| < M^{-1} \text{ se tiene } i\beta I - A \text{ es inversible .} \tag{15}$$

Tomemos $\beta_0 = w - \epsilon$ donde $\epsilon = \frac{1}{2}\min\{w, M^{-1}\}$, entonces

$$0 < \beta_0 < w \ \wedge \ |w - \beta_0| < M^{-1}$$

y aplicando (15), se obtiene

$$iw \in \rho(A). \quad \blacksquare$$

Teorema 7 *El C_0 - semigrupo de contracciones $(S(t))_{t>0}$ generado por A es exponencialmente estable; es decir, existen constantes positivas M y w tal que $\|S(t)\| \leq Me^{-wt}$.*

Demostración. Aplicaremos el teorema 5, a fin de verificar que:

a) $\rho(\ A) \supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}$

b) $\overline{\lim}_{|\beta|\to\infty} ||(i\beta I - \ A)^{-1}|| < \infty$

a) Demostraremos por reducción al absurdo.
Supongamos que $i\mathbb{R} \not\subseteq \rho(A)$, entonces existe $\beta' \in \mathbb{R}$ tal que

$$i\beta' \notin \rho(A).$$

Sea

$$C = \{|\beta| / \beta \in \mathbb{R} \wedge i\beta \notin \rho(A)\}$$

donde $C \neq \phi$, pues $|\beta'| \in C$.
Sea $|\beta| \in C$, entonces

$$i\beta \notin \rho(A). \tag{16}$$

Tenemos dos opciones

$$|\beta| < \left\|A^{-1}\right\|^{-1} \vee |\beta| \geq \left\|A^{-1}\right\|^{-1}.$$

Si $|\beta| < \left\|A^{-1}\right\|^{-1}$ y por la proposición 3 tendríamos que $i\beta \in \rho(A)$ pero eso no puede suceder por (16). Si $|\beta| \geq \left\|A^{-1}\right\|^{-1}$, entonces el conjunto C está acotado inferiormente, entonces existe un ínfimo del conjunto C y lo denotamos por w, aún más $w \in C$.
Como $w = \min C$, entonces

$$\{i\beta \in i\mathbb{R} / |\beta| < w\} \subset \rho(A). \tag{17}$$

Sea

$$D = \left\{\left\|(i\beta I - A)^{-1}\right\| / \ |\beta| < w\right\}.$$

Por la proposición 2 tenemos que

$$\sup_{\substack{\beta \in \mathbb{R} \\ |\beta| < w}} D = \infty$$

pues caso contrario tendríamos que $iw \in \rho(A)$ de la proposición 3; pero $w \in C$, es decir, $iw \notin \rho(A)$.
Tomemos $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\beta_n \to w \wedge |\beta_n| < w.$$

Como $|\beta_n| < w$ y por (14) tenemos

$$\{i\beta_n\} \subset \rho(A).$$

Entonces con esta sucesión $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ podemos encontrar una sucesión

$$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{(u_n, v_n)^T\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$$

tal que

$$\|U_n\| = 1 \quad \wedge \quad \|(i\beta_n I - A)U_n\|_H \to 0 \text{ cuando } n \to \infty. \tag{18}$$

Por (18) tenemos

$$i\beta_n u_n - v_n \to 0 \,\text{en}\, H_0^1(0, L) \tag{19}$$

$$i\beta_n v_n - \alpha u_{nxx} - \gamma(x) v_{nxx} \to 0 \text{en} L^2(0, L). \tag{20}$$

Por otro lado tomamos la parte real del producto interno de $(i\beta_n I - A)U_n$ con U_n en H

$$\mathrm{Re}(((i\beta_n I - A)U_n, U_n)_H) = -\mathrm{Re}((AU_n, U_n)_H)$$

$$\mathrm{Re}(((i\beta_n I - A)U_n, U_n)_H) = \int_0^L \gamma(x) v_{nx}^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^L \gamma''(x) v_n^2\, dx.$$

Como $(i\beta_n I - A)U_n \to 0$ en H y $\|U_n\|_H = 1$ entonces

$$\int_0^L \gamma(x) v_{nx}^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^L \gamma''(x) v_n^2\, dx \to 0 \tag{21}$$

Por (C1) y (C2) tenemos

$$0 < \int_0^L \gamma_0 v_{nx}^2 \leq \int_0^L \gamma(x) v_{nx}^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^L \gamma''(x) v_n^2\, dx. \tag{22}$$

De (21) y (22) tenemos

$$v_n \to 0 \text{ en } H_0^1(0,L). \tag{23}$$

De (18) y (23) tenemos

$$\beta_n u_n \to 0 \text{ en } H_0^1(0,L)$$

y como $\beta_n \to w$, entonces

$$u_n \to 0 \text{ en } H_0^1(0,L). \tag{24}$$

De (23) y (24) tenemos

$$\|U_n\|_H^2 = \|u_n\|_{H_0^1}^2 + \|v_n\|_{L^2}^2 \to 0$$

pero $\|U_n\|_H^2 = 1$ entonces llegamos a una contradicción.
Por lo tanto

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta / \beta \in \mathbb{R}\}.$$

b) Demostraremos por reducción al absurdo.
Supongamos que,

$$\lim_{|\beta|\to\infty} \sup \left\|(i\beta I - A)^{-1}\right\| = \infty. \tag{25}$$

Tomemos $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $|\beta_n| \to \infty$ y por (25) tenemos una sucesión

$$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$$

tal que

$$\|U_n\| = 1 \wedge \left\|(i\beta_n I - A)^{-1} U_n\right\|_H \to 0. \tag{26}$$

Tomamos la parte real del producto interno de $(i\beta_n I - A)U_n$ con U_n en H y obtenemos

$$\mathrm{Re}(((i\beta_n I - A)U_n, U_n)_H) = \int_0^L \gamma(x) v_{nx}^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^L \gamma''(x) v_n^2\, dx.$$

Como $(i\beta_n I - A)U_n \to 0$ en H y $\|U_n\|_H = 1$, entonces

$$\int_0^L \gamma(x) v_{nx}^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^L \gamma''(x) v_n^2\, dx \to 0 \tag{27}$$

Por (C1) y (C2) tenemos

$$0 < \int_0^L \gamma_0 v_{nx}^2 \leq \int_0^L \gamma(x) v_{nx}^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^L \gamma''(x) v_n^2\, dx. \tag{28}$$

De (27) y (28) tenemos

$$v_n \to 0 \text{ en } H_0^1(0,L) \tag{29}$$

y como $\beta_n \to \infty$, entonces

$$u_n \to 0 \text{ en } H_0^1(0,L). \tag{30}$$

De (29) y (30) tenemos

$$U_n \to 0 \text{ en } H$$

pero $\|U_n\|_H^2 = 1$ entonces llegamos a una contradicción.
Por lo tanto

$$\lim_{|\beta|\to\infty} \sup \left\|(i\beta I - A)^{-1}\right\| < \infty$$

Así hemos verificado (a) y (b) que son las condiciones para usar el teorema 5 entonces el C_0 - semigrupo de contracción $(S(t))_{t>0}$ generado por A es exponencialmente estable, con lo cual queda demostrado el teorema 7. ■

4. Conclusiones

1. Se ha demostrado que al trabajo realizado por Zheng-Liu en 1999, cambiando la constante real positiva γ en el término disipativo u_{xxt} por una función que depende de la variable espacial "x", esto es, considerar $\gamma(x)\, u_{xxt}$, como disipación interna; también se puede obtener el mismo resultado obtenido por Zheng-Liu, con la única condición de que $\gamma(x) \in W^{2,\infty}$.

2. Se puede observar en el trabajo que, para el estudio de la existencia, unicidad y la estabilidad exponencial del sistema planteado podemos trabajar solamente con la teoría de semigrupos lineales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ADAMS, R. A. (1975). **Sobolev Spaces.** Academic Press, New York.

[2] BREZIS, H. (1984). **Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones.** Alianza Editorial, S.A. Madrid.

[3] CARLOS R. ; ADELIA D. (2006). **Exponential Stability for Semigroup Associated with a Linear Viscoelastic Equation by a Locally Distributed Damping.** Rev. Mat.Estal., Sao Paulo.

[4] DUNFORD, N.; SCHWARTZ, J. T. (1958). **Linear Operators.** Interscience Publishers Inc., New York.

[5] DAUTRAY, R.; LIONS, J. (1988). **Mathematical Analysis and Numerical Methode for Science and Technology.** Springer - Verlag Berlin Heiderlberg.

[6] EBERHARD Z. (1990). **Nonlinear Functional Analysis and its Applications.** Springer - Verlag New York Inc.

[7] ENRIQUE Z. (1990). **Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping.** Commun. PDE, London.

[8] JAIME MUÑOZ. (2004). **Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais.** Textos Avanzados-LNCC. Petrópolis-Rio de Janeiro.

[9] JAIME MUÑOZ. (2008). **Estabilização de Semigrupos e Aplicações.** Edit. Academia das Contas, Rio de Janeiro.

[10] LIU, K.; RAO B.; ZHANG, X. (2002). **Stabilization of the wave equations with potential and indefinite damping.** J. Math. Anal. Appl.

[11] LUIZ A. MEDEIROS. (1968). **Tópicos de Análise Funcional.** Instituto de Matemática, Univ. Federal de Pernambuco.

[12] LUIZ A. MEDEIROS (1989). **A Integral de Lebesgue.** Universidade Federal do Rio de Janeiro, Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza, Instituto de Matemática.

[13] MORRIS, W. H.; STEPHENS, S. (1974). **Differential Equations, Dynamical Systems , and Linear Algebra.** Academic Press, Inc.

[14] PAZY, A. (1983). **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.** Applied Mathematical Sciences 44. Springer.

[15] WALTER R. (1973). **Functional Analysis.** McGraw-Hill, Inc.

[16] YOSIDA, K. (1980). **Functional Analysis.** 6th Ed., Springer-Verlag.

[17] ZHENG, S.; LIU, Z. (1999). **Semigroups associated with dissipative systems.** Chapman & Hall CRC Research Notes in Mathematics. 398. Boca Raton. Fl.