

VARIANTE DE UN SISTEMA NO HIPERBÓLICO

*Teodoro Sulca Paredes*¹

Resumen: En el artículo [5] se consideró el sistema no hiperbólico

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + P_2(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + Q_2(x, y) \end{cases}$$

el cual se transforma en

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = a_k x^k [1 + h(x)] + b_n x^n y [1 + g(x)] + y^2 f(x, y), \end{cases}$$

y se analizó el caso para cuando k es impar. En el presente artículo analizaremos el comportamiento de las trayectorias en la vecindad de un punto singular aislado cuando k es par.

Palabras Claves: Trayectorias, explosiones, estructuras topológicas, sistemas analíticos.

Variant of a not Hiperbolic Systems

Abstract: Already in the article [5] we consider the not hiperbolic system

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + P_2(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + Q_2(x, y) \end{cases}$$

which is transformed in

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = a_k x^k [1 + h(x)] + b_n x^n y [1 + g(x)] + y^2 f(x, y), \end{cases}$$

and analyze the case when k is an odd number. In the present article will analyze the behaviour of the trajectories in the vicinity of a isolated singular point, when k is a number pair.

Keywords: Trajectories, explosions, topological structures, analytical systems.

Preliminares

Ya en el artículo [5] se consideró el sistema analítico

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + P_2(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + Q_2(x, y) \end{cases} \quad (34)$$

¹UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: teosulcap@hotmail.com

bajo las condiciones

$$|a| + |b| + |c| + |d| \neq 0$$

$$\sigma = a + d = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0,$$

esto es, los dos autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ son iguales a cero, siendo $O(0,0)$ un punto singular aislado, $P_2(x,y)$, $Q_2(x,y)$ analíticos en una vecindad de $O(0,0)$.

Además la ecuación (34) se transforma en

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = a_k x^k [1 + h(x)] + b_n x^n y [1 + g(x)] + y^2 f(x,y), \end{cases} \dots (A_0)$$

donde $h(x)$, $g(x)$ y $f(x,y)$ son analíticas en la vecindad $O(0,0)$, $h(0) = g(0)$; $k \geq 2$, $a_k \neq 0$. Aplicando la transformación

$$x = x, \quad y = \eta_1 x \quad \dots (F_0)$$

el cual transforma (A_0) en

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \eta_1 x, \\ \frac{d\eta_1}{dt} = -\eta_1^2 + a_k x^{k-1} [1 + h(x)] + b_n x^n \eta_1 [1 + g(x)] + \eta_1^2 x f(x, \eta_1 x), \end{cases} \dots (A_1)$$

luego aplicamos la transformación

$$x = x, \quad \eta_1 = \eta_2 x, \quad ; d\tau = x dt \quad \dots (F_1)$$

(por simplicidad notacional usaremos t para denotar τ) el cual transforma (A_1) en

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \eta_2 x, \\ \frac{d\eta_2}{dt} = -2\eta_2^2 + a_k x^{k-3} [1 + h(x)] + b_n x^{n-1} \eta_2 [1 + g(x)] + \eta_2^2 x f(x, \eta_2 x^2), \end{cases} \dots (A_2)$$

continuando de la misma forma aplicamos las transformaciones (F_0) , (F_1) , \dots , (F_{r-1}) donde

$$x = x, \quad \eta_{r-1} = \eta_r x, \quad d\tau_{r-1} = x dt$$

y con lo cual (A_0) se transforma en

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \eta_r x, \\ \frac{d\eta_r}{dt} = -r\eta_r^2 + a_k x^{k-2r+1} [1 + h(x)] + b_n x^{n-r+1} \eta_r [1 + g(x)] + \eta_r^2 x f(x, \eta_r x^r). \end{cases} \dots (A_r)$$

Las transformaciones (F_1) , \dots , (F_{r-1}) son distintas de (F_0) en el sentido de que también hacemos una transformación en la variable temporal, tales transformaciones F_i , se conocen como explosiones. La propiedad de la transformación (F_{r-1}) es que descompone estructuras topológicas complicadas de los sistemas (A_{k-1}) en estructuras topológicas más simples de puntos singulares de los sistemas (A_k) , $k = 0, 1, 2, \dots$. Se continúa de la misma forma hasta el r -ésimo paso, cuando todos los puntos singulares de (A_k) son simples y luego de las propiedades de la transformación inversa F_k^{-1} , $k = 0, 1, 2, \dots, r-1$ hallamos la estructura topológica del punto singular O para el sistema (A) .

Nos referiremos a los siguientes lemas, cuyas pruebas se pueden encontrar en [1], [3].

Lema 1. Se tiene que

- i) Si \tilde{v}_1 y \tilde{v}_2 son sectores parabólicos del punto singular \tilde{O} , entonces w^* es la unión de una región elíptica y dos sectores parabólicos.
- ii) Si \tilde{v}_1 y \tilde{v}_2 son regiones hiperbólicas, entonces w^* es una región hiperbólica.
- iii) Si una de las regiones \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 es hiperbólica y la otra parabólica, entonces w^* es una región parabólica.

Lema 2. Sea $\tilde{O}_1(0, k_1)$ un punto silla simple del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, \eta x) \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{g(x, \eta x)}{x^2} - \eta \frac{f(x, \eta x)}{x} \end{cases}, \quad (35)$$

entonces

- i) Si el punto singular $\tilde{O}_2(0, k_2)$ es un nodo, la vecindad del punto singular $O(0, 0)$ es la unión de dos sectores hiperbólicos y dos sectores parabólicos.
- ii) Si $\tilde{O}_2(0, k_2)$ es un punto silla, dos de cuyas separatrices se encuentran a ambos lados del eje η , entonces la vecindad de O es la unión de seis sectores hiperbólicos.
- iii) Si $\tilde{O}_2(0, k_2)$ es una silla nodo, y dos de sus regiones sillas se encuentran sobre un lado del eje η , la vecindad de O es la unión de cuatro sectores hiperbólicos y un sector parabólico.

Lema 3. El sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy \\ \frac{dy}{dt} = -ky^2 + x^2 f(x, y) + xy f_1(x, y) \end{cases}, \quad (36)$$

donde $f(x, y)$ y $f_1(x, y)$ son analíticas en la vecindad del origen, $k > 0$ y $f(x, 0) \neq 0$, tiene exactamente dos semitrayectorias tendiendo al punto $O(0, 0)$ en las direcciones $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$, las cuales son el eje y positivo y el eje negativo y .

Lema 4. Sean $f(x, y)$ y $\varphi(x)$ analíticas en la vecindad del $O(0, 0)$, $a \neq 0, b < 0$ y $\varphi(0) = 0$. Entonces el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy, \\ \frac{dy}{dt} = ax[1 + \varphi(x)] + by^2 + xy f(x, y) \end{cases} \quad (37)$$

tiene un punto silla en $O(0, 0)$, cuyas separatrices son el positivo y negativo eje y , así como dos semitrayectorias las cuales también tienden a $O(0, 0)$ en las direcciones $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$; estos últimos se encuentran respectivamente en el primer y cuarto cuadrante si $a > 0$, en el segundo y tercer cuadrante si $a < 0$.

Definición 1. Un punto singular cuya vecindad es la unión de dos sectores parabólicos se llama punto singular degenerado. Si la vecindad del punto singular O consiste de un sector hiperbólico y un sector elíptico, se dirá que O es un punto singular con región elíptica.

Parte Central

Los siguientes diagramas son consecuencias del siguiente teorema, el cual es el resultado principal del presente artículo

Teorema 1. Para el sistema (A_0) consideremos k un número par, $k = 2m$ ($m \geq 1$). Entonces el punto singular $O(0, 0)$ es

1. Un punto singular degenerado si $b_n = 0, b_n \neq 0$ y $n \neq m$ (fig 1a);
2. Una silla-nodo si $b_n \neq 0$ y $n < m$ (fig 1b).

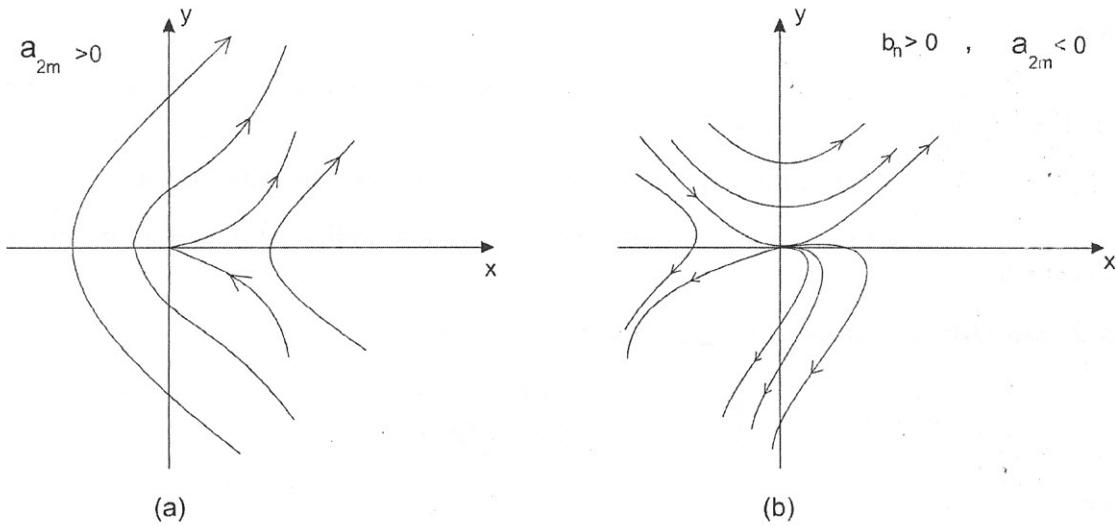


Figura 2:

Prueba

Si en la ecuación (A_r) consideramos $k = 2m$ resulta

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \eta_r x, \\ \frac{d\eta_r}{dt} = -r\eta_r^2 + a_{2m}x^{2m-2r+1}[1 + h(x)] + b_nx^{n-r+1}\eta_r[1 + g(x)] + \eta_r^2x f(x, \eta_r x^r). \end{cases} \dots (A_r)$$

Veamos el caso en que $b_n = 0$ ó $b_n \neq 0$ y $n > m$.

Para todo r tal que $1 \leq r \leq m - 1$ se tiene que como $r < m$ entonces

$$\begin{aligned} r + 1 \leq m &\Rightarrow 2r + 2 \leq 2m \\ &\Rightarrow 2m - 2r \geq 2 \\ &\Rightarrow 2m - 2r + 1 \geq 3 \end{aligned}$$

también se deduce que $r + 1 \leq m < n \Rightarrow n - r + 1 > 2$, luego las direcciones en las cuales las trayectorias de (A_r) pueden acercarse a $O_r(0, 0)$ son $0, \pi, \frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$, pero por el lema hay dos trayectorias que tienden a $O_r(0, 0)$ en las direcciones $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$.

Para analizar las trayectorias que tienden a $O_r(0, 0)$ en otras direcciones aplicamos una nueva explosión $x = x, \eta_{m-1} = \eta_m x, d\tau = x dt$ de donde obtenemos :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \eta_m x, \\ \frac{d\eta_m}{d\tau} = -m\eta_m^2 + a_{2m}x[1 + h(x)] + b_nx^{n-m+1}\eta_m[1 + g(x)] + \eta_m^2x f(x, \eta_m x^m). \end{cases} \dots (A_m)$$

pero este sistema por lema lema 4 tiene un punto silla en $O_m(0, 0)$.

Ahora, a cada trayectoria L de (A_0) la cual tiende a $O(0, 0)$ en la dirección 0 ó π le corresponde una trayectoria L_r ($r = 0, 1, 2, 3, \dots, m$) en el plano cortado el cual tiende a $O_r(0, 0)$, pero como la dirección de aproximación a $O_m(0, 0)$ es únicamente $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$ esto indica que en el sistema (A) hay solo dos trayectorias que tienden a O en la dirección 0 y π .

Por tanto el punto singular $O(0, 0)$ es un punto singular degenerado (ver figura 1)

Ahora veamos el caso $r = n = m$ y $b_n \neq 0$.

En este caso el sistema (A_r) es

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \eta_m x, \\ \frac{d\eta_m}{dt} = -m\eta_m^2 + a_{2m}x[1 + h(x)] + b_nx\eta_m[1 + g(x)] + \eta_m^2x f(x, \eta_m x^m). \end{cases} \dots (A_m)$$

Las direcciones en las cuales las trayectorias de (A_r) se acercan a $O_m(0,0)$ son $\pi/2$ y $3\pi/2$, luego por el lema el punto $O_m(0,0)$ es punto silla y por tanto como el caso anterior $O(0,0)$ es punto silla degenerado.

Caso $b_n \neq 0$ y $n < m$.

Para $r = n$ se tiene el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \eta_n x, \\ \frac{d\eta_n}{dt} = -n\eta_n^2 + a_{2m}x^{2m-2n+1}[1+h(x)] + b_n x \eta_n [1+g(x)] + \eta_n^2 x f(x, \eta_n x^n). \end{cases} \dots (A_n)$$

y como $n < m$ entonces $2m - 2n \geq 2 \Rightarrow 2m - 2n + 1 \geq 3$.

Luego las direcciones de aproximación de las trayectorias del sistema (A_n) son :

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 0, \pi, \arctan\left(\frac{b_n}{n+1}\right), \pi + \arctan\left(\frac{b_n}{n+1}\right).$$

Por el lema 3 hay sólo 2 trayectorias que tienden a $O_n(0,0)$ en las direcciones $\pi/2$ y $3\pi/2$.

Analizaremos cuántas trayectorias existen acercándose a $O_n(0,0)$ en las otras direcciones, para lo cual al hacer una nueva explosión obtenemos el siguiente sistema al cual llamamos (A_{n+1}) .

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \eta_{n+1} x, \\ \frac{d\eta_{n+1}}{dt} = -(n+1)\eta_{n+1}^2 + a_{2m}x^{2m-2n+1}[1+h(x)] + b_n \eta_{n+1} [1+g(x)] + \eta_{n+1}^2 x f(x, \eta_{n+1} x^{n+1}). \end{cases}$$

Este sistema tiene singularidades $\tilde{O}(0,0)$ y $\tilde{O}_1(0, \frac{b_n}{n+1})$.

Vemos que $2m - 2n - 1 \geq 1$ y entonces $\Delta(0, \frac{b_n}{n+1}) < 0$ lo cual nos dice que \tilde{O}_1 es un punto silla.

Para $O(0,0)$ tenemos que

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{2m} & b_n \end{vmatrix} = 0$$

de donde tenemos un $\lambda = b_n$, ahora haciendo el cambio $b_n dt = d\tau$ en (A_{n+1}) se obtiene

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \frac{\eta_{n+1} x}{b_n}, \\ \frac{d\eta_{n+1}}{d\tau} = -(n+1)\eta_{n+1}^2 + \frac{a_{2m}}{b_n} x^{2m-2n+1}[1+h(x)] + \eta_{n+1}[1+g(x)] + \frac{\eta_{n+1}^2}{b_n} x f(x, \eta_{n+1} x^{n+1}). \end{cases}$$

ahora hacemos $\eta_{n+1} = y$, y , $d\tau = dt$ y obtenemos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{xy}{b_n}, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{(n+1)}{b_n} y^2 + \frac{a_{2m}}{b_n} x^{2m-2n+1}[1+h(x)] + y[1+g(x)] + \frac{y^2}{b_n} x f(x, yx^{n+1}). \end{cases} \dots (A'_{n+1})$$

Sea

$$Q(x, y) = -\frac{(n+1)}{b_n} y^2 + \frac{a_{2m}}{b_n} x^{2m-2n+1}[1+h(x)] + \frac{y^2}{b_n} x f(x, yx^{n+1})$$

Ahora si consideramos una polinomial general

$$y = \phi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

podemos hallar los a_j al reemplazar en $y + Q(x, y) \equiv 0$, es decir

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) + \frac{a_{2m}}{b_n} x^{2m-2n-1} + x \frac{\phi^2(x)}{b_n} f(x, x^{n+1} \phi(x)) - \frac{(n+1)}{b_n} (a_0 + a_1 x + \dots)^2 \equiv 0$$

resultando que $a_0 = 0$. Como $2m - 2n - 1 \geq 1$ entonces

$$(a_1 + \frac{a_{2m}}{b_n} - \frac{(n+1)}{b_n} (2a_0 a_1)) x \equiv 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{a_{2m}}{b_n}$$

por tanto

$$y = \phi(x) = -\frac{a_{2m}}{b_n}x + \dots$$

si lo reemplazamos en la primera ecuación de (A'_{n+1}) se tiene

$$\Psi(x) = \left(-\frac{a_{2m}}{b_n}x + \dots\right) \frac{x}{b_n} = -\frac{a_{2m}}{b_n}x^2 + \dots$$

es decir

$$\Psi(x) = A_m x^m + \dots$$

donde $m = 2$, $A_m > 0$ siempre y cuando $a_{2m} < 0$.

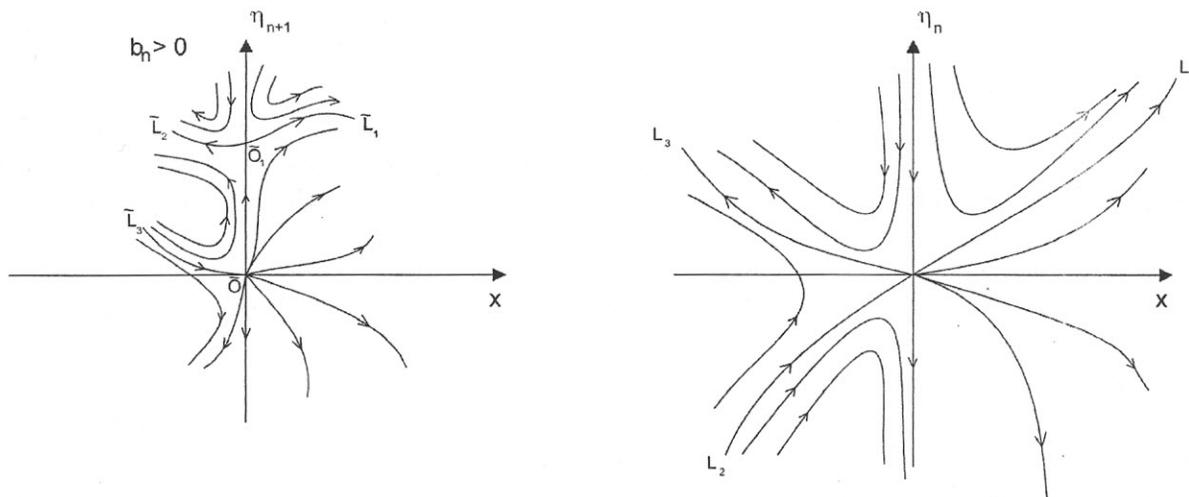


Figura 3:

Esto indica que $\tilde{O}(0,0)$ es una silla-nodo.

Luego el sistema (A_{n+1}) tiene la configuración dada en la figura 2.

La última configuración la tienen los (A_r) , $r = 1, 2, \dots, n$; finalmente para obtener el plano de fase de (A_0) usamos la transformación

$$T(x, \eta) = (x, \eta x)$$

con lo cual la configuración resultante es una silla-nodo, con lo cual se concluye el teorema.

Conclusiones El resultado probado completa el estudio del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = a_k x^k [1 + h(x)] + b_n x^n y [1 + g(x)] + y^2 f(x, y), \end{cases}$$

y su comportamiento alrededor de un punto singular aislado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Andronov, A. A. and Leontovich (1973). **Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems**. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, Wiley , New York.
- [2] Perko, L. (1991). **Differential Equations and Dynamical Systems**. Springer-Verlag.
- [3] Sotomayor, J. (1979). **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Projeto Euclides, IMPA.
- [4] Sulca, T. (1997). **Tesis de Licenciatura**. UNMSM Lima-Perú.
- [5] Sulca, T. (2007). **Caso de un sistema no hiperbólico**. PESQUIMAT Vol.X , N° 1: 45-54.
- [6] Zhang zhi-Fen (1992). **Qualitative theory of differential equations**. Translations of Mathematical Monographs, Vol 101. Printed by The American Mathematical Society.