PESQUIMAT , Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XV N°1, pp. 7-103, Lima - Perú, Marzo 2013

REPRESENTACIONES EXTREMALES

Tomás Núñez Lay [9] & *Helmuth Villavicencio Fernández* [10]

Resumen: En el presente trabajo se muestra la relación de un conjunto convexo con sus elementos extremos, lo que se conoce como representaciones extremales. Extendemos el teorema de Krein-Milman en dimensión finita, para un convexo cualquiera.

Palabras clave: Caracterización extremal. Extensiones del teorema de Krein-Milman. Coterminalidad. Análisis convexo.

REPRESENTATIONS EXTREMALS

Abstract: In this work, we show the relation about a convex set with their extremes elements. We extended the Kein-Milman theorem in finite dimension for arbitrary convex set.

Key words: Extremal characterization. Extensions of Krein-Milman theorem. Coterminalidad. Convex analysis.

1. Introducción

Dado un conjunto convexo $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Si denotamos por $Co(C)$ al conjunto de sus combinaciones convexas, llamado casco convexo de C, se tiene que $C = Co(C)$. Es decir, podemos obtener el conjunto C a partir de las combinaciones convexas de sus elementos. Luego surge la siguiente pregunta ¿podremos expresar $C = Co(S)$ para algún subconjunto propio S de C? la cual, de ser posible responderla, origina de modo natural la siguiente ¿podríamos tomar S mínimo? donde la minimalidad se entiende en el sentido de inclusión: si existe $B \subseteq C$ tal que $C = Co(B)$ entonces $S \subseteq B$.
Un subconjunto convexo F de C se dice extremal si $C \backslash F$ es aún convexo. Cuando F es unitario, se llama punto extremo y si F es un rayo se dice rayo extremo. En principio, un candidato para S sería la frontera de C, pero como ocurre en el caso compacto los puntos extremos son suficientes.

Teorema 1.1 (Krein-Milman) *Todo conjunto no vacío, convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$, es el casco convexo de sus puntos extremos.*

Prueba. Ver [4].
Luego notamos que para poder responder las interrogantes planteadas en el caso no compacto podemos considerar S en función de los elementos extremales de C (puntos extremos y rayos extremos). Dichas expresiones de S generan para $C = Co(S)$ lo que denominaremos: *representaciones extremales*. Dado que los elementos extremales de C están incluídos en la frontera de C, entonces no podremos obtener representaciones extremales para conjuntos abiertos, hecho por el cual estudiaremos primero el caso en que C es cerrado y luego lo debilitaremos. Notemos que cada representación extremal generaliza, en cierto modo, al

[9] UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: tnunezl@gmail.com
[10] UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: helmuth.villavicencio@gmail.com

teorema de Krein-Milman, más aún obtendremos una prueba de éste como caso particular.

Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y convexo, denotamos por $\Lambda[C]$ a la menor variedad lineal que contiene a C. La dimensión de C, $dim(C)$, será la dimensión de $\Lambda[C]$. El interior relativo de C, denotado por $ri(C)$ es el interior de C relativo a $\Lambda[C]$. La frontera relativa de C, denotada por $cl(C)$ se define como $cl(C) = \overline{C}\backslash ri(C)$. El cono asintótico de C, denotado por $C_\infty(C)$ es el conjunto de las direcciones que constituyen C. Dado $x \in C$ definimos $C_\infty(x) = \{u \in \mathbb{R}^n : x + \lambda u \in C, \ \forall\lambda \geq 0\}$. El espacio de linealidad L, de C es definido por $L = C_\infty(C) \cap -C_\infty(C)$. El lector interesado en mayores detalles puede consultar las referencias [1], [2], [3] y [7].

2. Representaciones extremales

Daremos ahora las fórmulas de descomposición extremal de un conjunto convexo. Empezaremos dando un criterio para obtener $C = Co(cl(C))$.

Proposición 2.1 *Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y convexo. Si $V = cl(B)$ donde B es un conjunto convexo tal que $int(B) \neq \emptyset$, entonces V es un hiperplano en $\mathbb{R}^n$ y $B \cup V$ es un semi-espacio cerrado de $\mathbb{R}^n$.*

Prueba. Ver [5].

Definición 2.2 (Segmento maximal) *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo y no vacío. Dados $a, b \in C$ tales que $\mu = a - b \neq 0$ se dice que $[a, b]$ es un segmento maximal de C en la dirección μ, si el conjunto $S = \{\lambda \in \mathbb{R} : a + \lambda\mu \in C\}$ es acotado y además $Sup(S) = 1$ e $Inf(S) = 0$.*

Proposición 2.3 *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, convexo y cerrado. Entonces son equivalentes:*

i. *existe en C un segmento maximal.*

ii. *C es la unión de sus segmentos maximales.*

iii. *$C \neq \Lambda[C]$ y C no es un semi-espacio en $\Lambda[C]$.*

Prueba. (i) implica (ii) Por la existencia del segmento maximal, existen $w \in C$ y $\mu \neq 0$ tales que $A_w = \{\lambda \in \mathbb{R}^+ : w + \lambda\mu \in C\}$ es acotado. Sea $z \in C$, si el conjunto $A_z = \{\lambda \in \mathbb{R}^+ : z + \lambda\mu \in C\}$ no es acotado, existe un rayo asintótico en C, entonces $\mu \in C_\infty(C) = C_\infty(w)$ luego A_w no es acotado, lo cual es absurdo. Sean $\alpha_1 = Inf A_z$, $\alpha_2 = Sup A_z$ como C es cerrado, $x = z + \alpha_1\mu, \quad y = z + \alpha_2\mu \in C$ y $A_z \subseteq [x, y]$, donde $x, y \in cl(C)$ entonces

$$C = \bigcup_{x,y \ \in \ cl(C)} [x, y]$$

(ii) implica (iii) Por la existencia de segmentos maximales, no hay líneas en dichas direcciones luego $C \neq \Lambda[C]$ entonces C no es un semi-espacio en $\Lambda[C]$.
(iii) implica (i) Sea $K = cl(C)$ y dado que C no es un semi-espacio en $\Lambda[C]$ entonces se tiene que K no es convexo.
Entonces existen $p, q \in K$ tales que $[p, q] \nsubseteq K$ por lo tanto existe $x \in [p, q] \setminus K \subseteq C \setminus K$, luego $x \in ri(C)$. Supongamos que $[p, q]$ no es un segmento maximal en C, luego si $\Psi = \Lambda([p, q])$ entonces existe $w \in (\Psi \setminus [p, q]) \cap C$ y para algún punto, digamos p, se tiene $p \in [x, w)$ entonces $[x, w) \subseteq ri(C)$ y por tanto $p \in ri(C)$ luego $p \notin K$, absurdo.

Lema 2.4 *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, cerrado, convexo no conteniendo líneas y tal que $dim(C) \geq 2$, entonces $C = Co(cl(C))$.*

Prueba. Al no contener líneas, $C \neq \Lambda[C]$ y C no es un semi-espacio en $\Lambda[C]$ pues $dim(C) \geq 2$ y estamos en la condición (iii) de la proposición anterior entonces por (ii), C es la unión de sus segmentos maximales de donde se sigue el resultado.

Teorema 2.5 *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, cerrado, convexo y no contiene líneas. Si $Rxt(C)$ es la unión de los rayos extremos de C, entonces*

$$C = Co(Ext(C) \cup Rxt(C))$$

Prueba. Basta probar que $C \subseteq Co(Ext(C) \cup Rxt(C))$. Haremos la prueba por inducción sobre la dimensión n de $\Lambda[C]$. Para $n \leq 1$ la afirmación es trivialmente cierta. Supongamos que la afirmación fue probada para $n = k$ y consideremos que $\Lambda[C]$ tiene dimensión $(k+1)$. Por el lema anterior, $C = Co(cl(C))$. Sea $x \in cl(C)$ y sea H un hiperplano en $\Lambda[C]$ de soporte para C en x, entonces por la hipótesis inductiva para $H \cap C$ se sigue que

$$x \in H \cap C = Co(Ext(H \cap C) \cup Rxt(H \cap C) \subseteq Co(Ext(C) \cup Rxt(C))$$

Entonces $x \in Co(Ext(C) \cup Rxt(C)$ para todo $x \in cl(C)$ por lo tanto

$$C = Co(cl(C)) \subseteq Co(Ext(C) \cup Rxt(C)).$$

Corolario 2.6 *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, cerrado, convexo y tal que no contiene líneas. Se tiene*

$$C = Co(Ext(C)) + C_\infty(C)$$

Prueba. Dado $x_0 \in Rxt(C)$, existe un rayo extremo ρ de C que contiene a x_0 y es de la forma $\rho = \{z + \lambda y \in C : \lambda \geq 0\}$ donde $z \in Ext(C)$ e $y \neq 0$. Luego $y \in C_\infty(z)$, como C es cerrado se tiene $y \in C_\infty(C)$ y por ser este último conjunto un cono, entonces $x_0 \in \rho \subseteq z + C_\infty(C)$ de donde $Rxt(C) \subseteq Ext(C) + C_\infty(C) \subseteq C$, luego $Ext(C) \cup Rxt(C) \subseteq Ext(C) + C_\infty(C) \subseteq C$ y usando lo obtenido en el teorema anterior

$$C = Co(Ext(C) \cup Rxt(C)) \subseteq Co(Ext(C) + C_\infty(C)) \subseteq C$$

Dado que $C_\infty(C)$ es convexo, se tiene $C = Co(Ext(C)) + C_\infty(C)$.

Corolario 2.7 *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, cerrado, convexo y tal que no contiene líneas. Entonces, $C = Co(Ext(C))$ si y sólo si $Rxt(C) = \emptyset$.*

Prueba. Basta notar que $C_\infty(C) = \{0\}$ si y sólo si $Rxt(C) = \emptyset$.

Para el caso que el conjunto contenga líneas, notemos que dado un punto en la línea existen dos direcciones opuestas, luego $C_\infty \cap -C_\infty \neq \{0\}$, es decir el espacio de linealidad L no es trivial. Esto nos lleva a la siguiente fórmula de representación extrema.

Teorema 2.8 *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, cerrado y convexo. Si L es el espacio de linealidad de C y $C_L = C \cap L^\perp$, entonces*

$$C = L + Co(Ext(C_L)) + C_\infty(C_L)$$

Prueba. Como L es el espacio de linealidad de C se verifica $C = L + C \cap L^{\perp}$, luego basta mostrar que $C_L = C \cap L^{\perp} = Co(Ext(C_L)) + C_{\infty}(C_L)$ y por el corolario ?? es suficiente probar que $C \cap L^{\perp}$ no contiene líneas.
Afirmación. $C_L = C \cap L^{\perp}$ no contiene líneas.
En efecto; supongamos exista una recta $\Gamma \subseteq C_L$ luego existe $x_0 \neq 0$ con $x_0 \in C_{\infty}(C_L)$ y dado $z \in \Gamma$, como C es cerrado entonces $x_0 \in C_{\infty}(z)$ y al ser Γ una recta $-x_0 \in C_{\infty}(z)$, entonces $x_0 \in L$. Luego se tiene $z + x_0 \in L^{\perp}$ (pues $x_0 \in C_{\infty}(z)$), $z \in L^{\perp}$ (pues $z \in \Gamma$) y $0 \neq x_0 \in L$. Entonces
$0 = \langle z + x_0, x_0 \rangle = \langle z, x_0 \rangle + \langle x_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$ de donde $x_0 = 0$, absurdo.

Veamos ahora que en efecto el teorema ?? es una extensión del teorema de Krein-Milman. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, compacto y convexo. Como C es acotado, $C_{\infty}(C) = \{0\}$ entonces $L = \{0\}$. Por el teorema anterior se tiene $C = Co(Ext(C_L))$, donde $C_L = C \cap L^{\perp}$, por lo tanto

$$C = Co(Ext(C_L)) = Co(Ext(C \cap L^{\perp})) = Co(Ext(C \cap \mathbb{R}^n)) = Co(Ext(C)).$$

Por otro lado, notemos que si C contiene un rayo extremo ρ, entonces la representación $C = Co(Ext(C) \cup Rxt(C))$ no satisface la noción de minimalidad puesto que es suficiente considerar cualquier parte no acotada del rayo ρ. Esto motiva a la siguiente definición.

Definición 2.9 (Coterminalidad) *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y convexo. Sea $\rho = \{\rho_r \in C : \rho_r = z + rw,\ r \geq 0\}$ un rayo extremo de C, donde $z \in Ext(C)$ y w es una dirección no nula. Decimos que $X \subseteq C$ es coterminal con el rayo extremo ρ de C, si $Sup\{r : \rho_r \in X\} = +\infty$.*

La noción de coterminalidad permite caracterizar a los subconjuntos $X \subseteq C$ cuyas combinaciones convexas generan C, es decir $Co(X) = C$.

Teorema 2.10 *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, cerrado, convexo y no contiene líneas. Sea $X \subseteq C$ entonces $Co(X) = C$ si y sólo si $Ext(C) \subseteq X$ y X es coterminal con cada rayo extremo de C.*

Prueba. Supongamos $Co(X) = C$ y sea $x \in Ext(C) \subseteq C$ entonces $x \in Co(X)$ luego existen $x_1, \ldots, x_k \in X$ tales que

$$x \in Co\{x_1, \ldots, x_k\} = Co\{x_1, Co\{x_2, \ldots, x_k\}\}$$

Entonces $x \in [x_1, y]$ donde $y \in Co\{x_2, \ldots, x_k\}$, y por ser x punto extremo se tiene que $x = y = x_1 \in X$ de donde $Ext(C) \subseteq X$.
Consideremos el rayo extremo $\rho = \{\rho_r : r \geq 0\}$ de C, donde $\rho_r = z + rw$, $z \in Ext(C)$ y w es una dirección no nula. Dado que $Rxt(C) \subseteq C$ resulta $Rxt(C) \subseteq Co(X)$ entonces $\rho \subseteq Co(X)$. Si $Sup\{r : \rho_r \in X\} < \infty$, llamando a este supremo M, basta tomar $r_0 = M + 1 > 0$, para que $\rho_{r_0} \notin X$ pero como $\rho_{r_0} \subseteq Co(X)$ existen $x_1, \ldots, x_k \in X$ tales que

$$\rho_{r_0} \in Co\{x_1, \ldots, x_k\} = Co\{x_1, Co\{x_2, \ldots, x_k\}\}$$

Entonces $\rho_{r_0} \in [x_1, y]$ donde $y \in Co\{x_2, \ldots, x_k\}$, luego $\rho \cap [x_1, y] \neq \emptyset$ y por ser ρ rayo extremo existen r_1, r_2 tales que $x_1 = \rho_{r_1}, y = \rho_{r_2}$ entonces $r_0 \leq r_3 = máx\{r_1, r_2\}$ luego $\rho_{r_3} \in \rho$ de donde $\rho_{r_0} \in X$, absurdo.
Recíprocamente, supongamos que $Ext(C) \subseteq X$ y X es coterminal con cada rayo extremo de C entonces $Ext(C) \subseteq Co(X)$, veamos que $Rxt(C) \subseteq Co(X)$. Si existe $\rho \subseteq Rxt(C)$ tal que $\rho \nsubseteq Co(X)$, donde $\rho = \{z + rw : r \geq 0\}$ y $z \in Ext(C)$, entonces existe $r_0 \geq 0$ tal que $\rho_{r_0} = z + r_0 w \notin Co(X)$. Si existe $r_1 > r_0$ tal que $\rho_{r_1} \in Co(X)$ dado que

$z \in Co(X)$ entonces $\rho_{r_0} \in [z, \rho_{r_1}] \subseteq Co(X)$, absurdo. Por lo tanto para todo $r \geq r_0$ se cumple que $\rho_r \notin Co(X)$ entonces $Sup\{r : \rho_r \in X\} < r_0 < \infty$ lo cual contradice la hipótesis. Entonces $Ext(C) \cup Rxt(C) \subseteq Co(X)$ y por fórmula de representación extremal $C = Co(Ext(C) \cup Rxt(C)) \subseteq Co(X)$ por tanto $C = Co(X)$.

El teorema anterior muestra que si $Rxt(C) = \emptyset$, entonces $Ext(C)$ es el conjunto más pequeño de C tal que $C = Co(Ext(C))$.

3. Krein-Milman fortalecido

En la sección anterior, los teoremas 2.5 y 2.8 extienden débilmente al teorema de Krein-Milman, ya que en ellos se usa la hipótesis de cerradura para el conjunto convexo. Surge entonces la interrogante de poder extender el teorema cuando el conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, no sea cerrado. Consideremos el conjunto:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \, , z > 0\}$$

claramente B es convexo y no es cerrado. Notemos que todo punto (x, y, z) de la esfera de radio unidad S^2, con $z > 0$ es punto extremo de B, es decir $Ext(B) = S^2 \cap B$. Además se prueba que $B = Co(Ext(B))$, a pesar de que B no es cerrado. Es decir se satisface la conclusión del teorema de Krein-Milman. Pero, ¿qué tiene de particular este conjunto para poder obtener la conclusión del teorema de Krein-Milman? La respuesta la encontramos en las caras de B. Podemos notar que las caras de B son de dimensión cero, es decir puntos. Así, toda cara de B es un punto extremo de B. Sea F una cara de B, entonces $F = \{b\}$ para algún $b \in Ext(B)$ luego se tiene que $Ext(F)$ es denso en $Ext(\overline{F})$. Surge entonces una nueva interrogante: La condición que para cada cara F de B, $Ext(F)$ es denso en $Ext(\overline{F})$ ¿será suficiente para decir que $B = Co(Ext(B))$? La respuesta a esta interrogante es afirmativa en el caso acotado, más aún probaremos que para el caso no acotado, basta que se incluyan los rayos extremos de las caras.

Lema 3.1 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo y compacto tal que $dim(A) = p$. Todo punto del interior relativo de A pertenece al interior relativo del casco convexo de a lo más $2p$ puntos extremos de A.*

Prueba. Por el teorema de Krein-Milman se tiene $A = Co(Ext(A))$. Sea $x \in ri(A)$ sin pérdida de generalidad supongamos que $x = 0$ (basta hacer una traslación). Por tanto $0 \in ri(Co(Ext(A)))$, sea V el conjunto de las combinaciones lineales de a lo más $p-1$ puntos de $Ext(A)$, luego $V \neq \Lambda[C]$. De donde existe una recta L tal que $L \cap V = \{0\}$ y sean w_1, w_2 los puntos de L que son frontera con $Co(Ext(A))$. Para cada $i \in \{1, 2\}$ sea H_i el hiperplano de soporte de $Co(Ext(A))$ en w_i. Claramente $0 \in (w_1, w_2)$ y $w_i \in Co(Ext(A) \cap H_i)$, luego por teorema de Carathedory w_i puede ser escrito como combinación convexa de a lo más p puntos $v_1^i, \ldots, v_p^i$ de $Ext(A) \cap H_i$ luego w_i pertenece al interior relativo de $Co(\{v_1^i, \ldots, v_p^i\})$, pues $w_i \notin V$ donde $i \in \{1, 2\}$. Entonces $x = 0 \in ri(Co(\{v_1^1, \ldots, v_n^1, v_1^2, \ldots, v_p^2\}))$.

Estamos en condiciones de enunciar y probar el resultado principal de esta sección, que caracteriza a los conjuntos convexos que satisfacen la tesis del teorema de Krein-Milman.

Teorema 3.2 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, convexo y acotado. Entonces $A = Co(Ext(A))$ si y sólo si, $Ext(F)$ es denso en $Ext(\overline{F})$, para cada cara F de A.*

Prueba. Primero, supongamos que $Ext(F)$ es denso en $Ext(\overline{F})$, para cada cara F de A. Probaremos que $A = Co(Ext(A))$ y para esto usaremos inducción en la dimensión d de A. Para $d \leq 1$ es trivial pues A sería un punto o un segmento de recta cerrado. Sea $dim(A) = d$ y supongamos que $A = Co(Ext(A))$ sea válido para cualquier conjunto convexo y acotado tal

que $dim(A) < d$ (Hipótesis inductiva).
Sea F una cara de A tal que $F \neq A$. Como $dim(F) < d$ y por la hipótesis inductiva $F = Co(Ext(F))$. Luego $Ext(F) \subseteq Ext(A)$ entonces $F \subseteq Co(Ext(A))$. Por tanto $F \subseteq Co(Ext(A))$, para toda cara F de A tal que $F \neq A$. Probemos ahora que $ri(A) \subseteq Co(Ext(A))$.
Sea $a \in ri(A)$ dado que $ri(A) = ri(\overline{A})$, luego $a \in ri(\overline{A})$ donde $\overline{A}$ es compacto. Por lema ??, existen $v_1, \ldots, v_k \in Ext(\overline{A})$ con $(k \leq 2d)$ tales que $a \in ri(Co(\{v_1, \ldots, v_k\}))$ y como A es cara de A, por hipótesis $Ext(\overline{A}) \subseteq \overline{Ext(A)}$. Luego existen $a_1, \ldots, a_k \in Ext(A)$ tales que a_j esta suficientemente cerca de v_j para $j \in \{1, \ldots, k\}$ y también $a \in ri(Co(\{a_1, \ldots, a_k\}))$. Por tanto $a \in Co(Ext(A))$. Supongamos $A \neq Co(Ext(A))$ luego existe $y \in A$ tal que $y \notin Co(Ext(A))$ y por lo anterior $y \notin ri(A)$ luego $y \in A \backslash ri(A) = cl(A)$ de donde existe un hiperplano de soporte H de A en y. Como $F = A \cap H$ es una cara de A tal que $y \in F$, resulta $y \in F \subseteq Co(Ext(A))$, absurdo. Por lo tanto $A = Co(Ext(A))$.
Recíprocamente, supongamos que $A = Co(Ext(A))$. Sea F una cara de A, luego por definición de cara se tiene que:

$$F = F \cap A = F \cap Co(Ext(A)) = Co(F \cap Ext(A)) = Co(Ext(F))$$

por tanto $F = Co(Ext(F))$. Entonces basta probar el resultado para la cara A de A, pues para el resto de caras se procederá de modo análogo. Por tanto supongamos que $Ext(A)$ no es denso en $Ext(\overline{A})$ y sin pérdida de generalidad supongamos $dim(A) = n$, entonces existen un punto extremo x de $\overline{A}$ y una vecindad abierta V de x en $\mathbb{R}^n$ tal que $V \cap Ext(A) = \emptyset$. Sea $B = Co(\overline{A} \backslash V)$ convexo y compacto, pues $\overline{A} \backslash V$ es compacto. Además $x \notin B$, caso contrario como $x \in Ext(\overline{A})$ entonces $x \in \overline{A} \backslash V$, absurdo. Luego existe un hiperplano H que separa fuertemente a x de B. Supongamos $x \in intH^+$ luego como $Ext(A) \subseteq B$ entonces $A = Co(Ext(A)) \subseteq intH^-$. De donde la vencidad de x dada por $P = intH^+ \cap V$ es tal que $P \cap A = \emptyset$, absurdo.

Teorema 3.3 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, convexo y tal que no contiene líneas. Para cada cara F de A supongamos que $Ext(F) \cup Rxt(F)$ es denso en $Ext(\overline{F}) \cup Rxt(\overline{F})$. Entonces $A = Co(Ext(A) \cup Rxt(A))$.*

Prueba. Usaremos inducción en la dimensión d de A. Para $d \leq 1$ el resultado es trivial pues A sería a lo más una semi recta. Sea $dim(A) = d$ y supongamos que el teorema sea válido para cualquier conjunto convexo que no contiene líneas y tal que $dim(A) < d$.
Sea F una cara de A tal que $F \neq A$. Entonces por hipótesis inductiva $F = Co(Ext(F) \cup Rxt(F))$. Por otro lado, como $Ext(F) \subseteq Ext(A)$ y $Rxt(F) \subseteq Rxt(A)$ entonces $F \subseteq Co(Ext(A) \cup Rxt(A))$, para toda cara F tal que $F \neq A$. Veamos ahora que $ri(A) \subseteq Co(Ext(A) \cup Rxt(A))$. Sea $a \in ri(A)$. Entonces existe un convexo acotado C tal que $a \in C \subseteq ri(A)$ luego aplicando el lema 3.1 al compacto $\overline{C}$, existen $v_1, \ldots, v_k \in Ext(\overline{C})$ $(k \leq 2d)$ tales que $a \in ri(Co(\{v_1, \ldots, v_k\}))$. Por otro lado $\overline{A}$ es cerrado, convexo y no contiene líneas luego admite representación extremal, luego por teorema 2.5 $\overline{A} = Co(Ext(\overline{A}) \cup Rxt(\overline{A}))$ de donde $v_j \in Ext(\overline{C}) \subseteq Co(Ext(\overline{A}) \cup Rxt(\overline{A}))$, luego para $j \in \{1, \ldots, k\}$ fijo existen $v_1^j, \ldots, v_{p(j)}^j \in Ext(\overline{A})$ y $w_1^j, \ldots, w_{q(j)}^j \in Rxt(\overline{A})$ que verifican $v_j \in Co(\{v_1^j, \ldots, v_{p(j)}^j, w_1^j, \ldots, w_{q(j)}^j\})$ así entonces se tendrá:

$$a \in ri(Co(\{v_1^1, \ldots, v_{p(1)}^1, w_1^1, \ldots, w_{q(1)}^1, \ldots, v_1^k, \ldots, v_{p(k)}^k, w_1^k, \ldots, w_{q(k)}^k\}))$$

también dado que $Ext(A) \cup Rxt(A)$ es denso en $Ext(\overline{A}) \cup Rxt(\overline{A})$ podemos suponer que $v_1^j, \ldots, v_{p(j)}^j \in Ext(A)$ y $w_1^j, \ldots, w_{q(j)}^j \in Rxt(A)$ basta aproximarnos lo suficiente, luego $a \in Co(Ext(A) \cup Rxt(A))$.
Supongamos exista $y \in A$ tal que $y \notin Co(Ext(A) \cup Rxt(A))$, por lo anterior $y \notin ri(A)$ luego $y \in cl(A)$ de donde existe una cara F de A tal que $y \in F$, luego $y \in Co(Ext(A) \cup Rxt(A))$, absurdo. Entonces $A = Co(Ext(A) \cup Rxt(A))$.

Nuevamente para mostrar el resultado de modo general necesitamos la noción de espacio de linealidad.

Teorema 3.4 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y convexo. Si L es el espacio de linealidad de A y $A_L = A \cap L^{\perp}$. Para cada cara F de A_L supongamos que $Ext(F) \cup Rxt(F)$ es denso en $Ext(\overline{F}) \cup Rxt(\overline{F})$. Entonces*

$$A = L + Co(Ext(A_L) \cup Rxt(A_L))$$

Prueba. Basta usar la relación $A = L + A \cap L^{\perp}$ y notar que $A_L = A \cap L^{\perp}$ satisface las hipótesis del teorema 3.3.

4. Conclusiones

4.1 Todo conjunto cerrado y convexo, admite representación extremal.

4.2 En todo conjunto cerrado y convexo que no admite rayos extremos la representación extremal(formada unicamente por puntos extremos) verifica la noción de minimalidad.

4.3 El trabajo caracteriza los conjuntos convexos y acotados para los cuales la tesis del teorema de Krein-Milman es válida.

4.4 Se muestra una condición necesaria para que un conjunto convexo arbitrario, admita representación extremal.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Auslender, A. y Teboulle. **Asymptotic cones and functions in optimization and variational inequalities**. Springer-Velag, New York, 2003.

[2] Florenzano, M. **Finite Dimensional Convexity and Optimization**. Springer-Velag, Berlin, 2001.

[3] Hiriart-Urruty, J. B. L. **Convex Analysis and Minimization Algorithms**, Springer-Velag, Berlin-New York, 1993.

[4] Kelley, J. L. **Note on a theorem of Krein and Milman**. J. Osaka Inst. Sci. Technol. Part I, 3, 1951, pp. 1–2.

[5] Klee, V. L. **Convex sets in linear spaces II**. Duke math., 18, 1951, pp. 875–883.

[6] Klee V. L. **Extremal structure of convex sets**. Arch. Math., 8, 1957, pp. 234–240.

[7] Rockafellar. R. T. **Convex Analysis**. Princeton University Press, Princenton, NJ, 1970.