PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XV N°2, pp. 7-14, Lima - Perú, Marzo 2013

FUNCIONES GENERALIZADAS DE FRONTERA

Claudio Fernando Balcazar Huapaya [1] & *Maruja Yolanda Gavilán Gonzales* [2]

Resumen: En este trabajo probaremos, que en general, la restricción de una función del espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ a la frontera del dominio Ω pertenece a $L^2(\partial\Omega)$; para el caso de frontera con la condición de regularidad de ser continua y Lipschitz.

Palabras clave: Funciones generalizadas de frontera, regularidad, condición de Lipschitz.

GENERALIZED FUNCTIONS OF BOUNDARY

Abstract: In this paper we prove that in general, the restriction of a function space of Sobolev $H^1(\Omega)$ the boundary of the domain Ω belongs to $L^2(\partial\Omega)$; for the case of boundary regularly provided to be continuous and Lipschitz.

Key words: Generalized functions of boundary, regularity,condition of Lipschitz.

1. Introducción

Las condiciones de frontera de una ecuación diferencial parcial, en general, no se puede interpretar en sentido puntual y si consideramos un espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω abierto este puede contener funciones no acotadas por ello buscamos una interpretación de la restricción de las funciones en $H^1(\Omega)$ a la frontera de Ω.

La frontera de $\partial\Omega$ de un dominio n-dimensional Ω puede ser interpretado como un objeto $n-1$ dimensional o variedad. Cuando $n = 1$, $\partial\Omega$ puede consistir de puntos distintos en una variedad del caso cero-dimensional; y las desigualdades de Sobolev dan condiciones bajo el cual los valores puntuales son bien definidos para funciones en un espacio de Sobolev y de este modo para valores de frontera en el caso de dimensión uno.

2. Preliminares

Comenzamos con el siguiente ejemplo que después se generalizará. Sea Ω el disco unitario en $\mathbb{R}^2$:

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} = \{(r, \theta) : 0 \leq r < 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

Sea $u \in C^1(\overline{\Omega})$, y se considera su restricción a $\partial\Omega$ como sigue

$$\begin{aligned} u(1,\theta)^2 &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u(r,\theta)^2)dr \\ &= \int_0^1 2(r^2 u u_r + r u^2)(r,\theta)dr \end{aligned} \tag{2.1}$$

Por otro lado tenemos que $u\nabla u = u(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$ entonces

$$u\nabla u \cdot \frac{(x,y)}{r} = \frac{1}{r} u(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}) \tag{2.2}$$

[1] UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: cbalcazarh@unmsm.edu.pe
[2] UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: mgavilan@unmsm.edu.pe

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = u_r\frac{\partial r}{\partial x} = u_r\frac{x}{r}, \tag{2.3}$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = u_r\frac{\partial r}{\partial y} = u_r\frac{y}{r}, \tag{2.4}$$

sustituyendo (2.3) y (2.4) en (2.2)

$$\begin{aligned}
\nabla u \cdot \frac{(x,y)}{r} &= \frac{1}{r}u(xu_r\frac{x}{r} + yu_r\frac{y}{r}) \\
&= \frac{1}{r}u(\frac{u_r}{r}x^2 + \frac{u_r}{r}y^2) \\
&= \frac{1}{r^2}uu_r(x^2+y^2) \\
&= uu_r.
\end{aligned}$$

Luego

$$r^2u\nabla u \cdot \frac{(x,y)}{r} = r^2uu_r, \tag{2.5}$$

sustituyendo (2.5) en (2.1)

$$\begin{aligned}
|u(1,\theta)^2| &= |\int_0^1 2(r^2u\nabla u \cdot \frac{(x,y)}{r} + ru^2)(r,\theta)dr| \\
&\leq \int_0^1 2(|r^2u\nabla u \cdot \frac{(x,y)}{r}| + |r||u^2|)(r,\theta)dr \\
&= \int_0^1 2(r^2|u||\nabla u| + ru^2)(r,\theta)dr \\
&= \int_0^1 2(r|u||\nabla u| + u^2)(r,\theta)rdr
\end{aligned}$$

integrando de 0 a 2π

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |u(1,\theta)|^2 d\theta &\leq 2\int_0^{2\pi}(\int_0^1(|u||\nabla u| + u^2)(r,\theta)rdr)d\theta \\
&= 2\int_\Omega(|u||\nabla u| + u^2)dxdy.
\end{aligned}$$

Como

$$\int_{\partial\Omega}|u|^2d\theta = \int_0^{2\pi}|u(1,\theta)|^2d\theta = \|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)},$$

y usando la desigualdad de Schwarz tenemos

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} &\leq 2\int_\Omega |u||\nabla u|dxdy + 2\int_\Omega u^2dxdy \\
&\leq 2(\int_\Omega |u|^2dxdy)^{1/2}(\int_\Omega |\nabla u|^2dxdy)^{1/2} + 2\int_\Omega u^2dxdy \\
&= 2\|u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + 2\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= 2\|u\|_{L^2(\Omega)}\left[\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right], \quad \text{entonces}
\end{aligned}$$

$$\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \leq 2\|u\|_{L^2(\Omega)}\left[\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right]. \tag{2.6}$$

Como

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} &\le (2\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|u\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2} \\
&= \big(2\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdy + 2\int_\Omega |u|^2 dxdy\big)^{1/2} \\
&= (2\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2) dxdy)^{1/2} \\
&= 2^{1/2}\Big(\int_\Omega ((\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + u^2) dxdy\Big)^{1/2} \\
&= 2^{1/2}\|u\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \le 8^{1/4}\|u\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|u\|^{1/2}_{H^1(\Omega)} \tag{2.7}
$$

Hemos probado esta desigualdad para funciones u regulares. Pero veremos que esta desigualdad tiene sentido para todo $u \in H^1(\Omega)$ y en forma correspondiente para las funciones de este espacio, la restricción $u|_{\partial\Omega}$ tiene sentido como una función de $L^2(\partial\Omega)$.
En el ejemplo anterior podemos identificar $L^2(\partial\Omega)$ con $L^2([0, 2\pi])$ usando la aplicación $\theta \to (cos\theta, sen\theta)$.

Proposición 2.1 *Sea Ω el disco unitario en $\mathbb{R}^2$. Para todo $u \in H^1(\Omega)$, la restricción $u|_{\partial\Omega}$ puede ser interpretado como una función en $L^2(\partial\Omega)$ y satisface la desigualdad* (2.7).

Prueba.
Como $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$, elegimos una sucesión (u_j) en $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$
\|u - u_j\|_{H^1(\Omega)} \le \frac{1}{j}, \quad \forall j \tag{2.8}
$$

Por (2.7) y la desigualdad triangular se tiene

$$
\begin{aligned}
\|u_k - u_j\|_{L^2(\partial\Omega)} &\le \sqrt[4]{8}\|u_k - u_j\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|u_k - u_j\|^{1/2}_{H^1(\Omega)} \\
&\le \sqrt[4]{8}\|u_k - u_j\|_{H^1(\Omega)} \\
&\le \sqrt[4]{8}[\|u_k - u\|_{H^1(\Omega)} + \|u - u_j\|_{H^1(\Omega)}] \\
&\le \sqrt[4]{8}[\frac{1}{j} + \frac{1}{k}] \ \forall j, \ \forall k.
\end{aligned}
$$

Luego (u_j) es una sucesión de Cauchy en $L^2(\partial\Omega)$. Como este espacio es completo, existe $\nu \in L^2(\partial\Omega)$ tal que

$$
\|\nu - u_j\|_{L^2(\partial\Omega)} \to 0 \text{ cuando } j \to \infty. \tag{2.9}
$$

Definimos

$$
u|_{\partial\Omega} = \nu.
$$

Necesitamos verificar que esta definición no depende de la sucesión particular que elegimos. Así que suponemos que (ν_j) es otra sucesión en $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ tal que $\|u - \nu_j\|_{H^1(\Omega)} \to 0$ cuando $j \to \infty$, por la desigualdad triangular y por (2.7)

$$
\begin{aligned}
\|\nu - \nu_j\|_{L^2(\partial\Omega)} &\le \|\nu - u_j\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|u_j - \nu_j\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\le \|\nu - u_j\|_{L^2(\partial\Omega)} + \sqrt[4]{8}\|u_j - \nu_j\|_{H^1(\Omega)} \\
&\le \|\nu - u_j\|_{L^2(\partial\Omega)} + \sqrt[4]{8}(\|u_j - u\|_{H^1(\Omega)} + \|u - \nu_j\|_{H^1(\Omega)})
\end{aligned}
$$

La expresión del lado derecho de la desigualdad tiende a 0 cuando $j \to \infty$. Por lo tanto $u|_{\partial\Omega}$ esta bien definido en $L^2(\partial\Omega)$. Por otro lado se tiene

$$\left| \|\nu\|_{L^2(\partial\Omega)} - \|u_j\|_{L^2(\partial\Omega)} \right| \leq \|\nu - u_j\|_{L^2(\partial\Omega)},$$

y de (2.9) $\|\nu\|_{L^2(\partial\Omega)} = \lim_{j\to\infty} \|u_j\|_{L^2(\partial\Omega)}$. También de (2.7) y de (2.8) se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \|u_j\|_{L^2(\partial\Omega)} &\leq \lim_{j\to\infty} \sqrt[4]{8}\|u_j\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|u_j\|^{1/2}_{H^1(\Omega)} \\ &= \sqrt[4]{8}\|u\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|u\|^{1/2}_{H^1(\Omega)}. \text{ Entonces} \\ \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} &\leq \sqrt[4]{8}\|u\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|u\|^{1/2}_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Observación 2.1 Notemos que la proposición (2.1) no define puntualmente u sobre $\partial\Omega$, pero si afirma que $u|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$. Existe la posibilidad que u podría ser infinito en un subconjunto denso de puntos sobre $\partial\Omega$. En lo que sigue describiremos una generalización de la proposición (2.1) a dominios más complejos.

3. Condición de regularidad en la frontera de un dominio.

Introduciremos una condición de regularidad sobre la frontera $\partial\Omega$ del dominio Ω.

Definición 3.1. *Sea $f \in L^\infty(\Omega)$, definiremos la norma de Lipchitz para f, denotado por $\|f\|_{Lip(\Omega)}$, como*

$$\|f\|_{Lip(\Omega)} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup_{x,y\in\Omega,\, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$$

el correspondiente espacio de funciones de Lipschitz es

$$Lip(\Omega) = \{f \in L^\infty(\Omega) : \|f\|_{Lip(\Omega)} < \infty\}$$

Definición 3.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio, diremos que Ω tiene frontera de Lipchitz si existen, una colección de conjuntos abiertos O_i, un número real $\varepsilon > 0$, un número natural N y un número real $M > 0$ tal que para todo $x \in \partial\Omega$ la bola de radio ε con centro x esta contenido en algún O_i pero no más de N conjuntos O_i que tienen una intersección no vacía con Ω, y para cada uno de estos $O_i \cap \Omega = O_i \cap \Omega_i$, donde Ω_i es un dominio cuya frontera es el gráfico de una función de Lipschitz Φ_i satisfaciendo $\|\Phi_i\|_{Lip(\mathbb{R}^{n-1})} \leq M$.*
El conjunto Ω_i es

$$\Omega_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^{n-1}, y < \Phi_i(x)\}$$

Definición 3.3. *Diremos que $\partial G \in C^{0,1}, G \subset \mathbb{R}^N$ si la frontera ∂G se puede cubrir con un número finito de superficies F_i, $N-1$ dimensionales, las cuales en los sistemas de coordenadas locales adecuadamente elegidos $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ tiene la representación*

$$\xi_N = g_i(\xi_1, \ldots, \xi_{N-1})$$

donde $g_i \in C^{0.1}$ para $\|(\xi_1, \ldots, \xi_{N-1})\| \leq r_i$ con $r_i > 0$. Se describe esto brevemente diciendo que la frontera ∂G es una variedad $C^{0,1}$ de dimensión $N-1$ con G localmente a un lado de ∂G.

Definición 3.4. *Sea $f : G \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, una función definida sobre una región acotada G no vacía. Definimos la siguiente norma*

$$\|f\|_{0,1} = \sup_{p\in G} |f(p)| + \sup_{p,q\in G,\, p\neq q} \frac{|f(p)-f(q)|}{|p-q|},$$

con el cual podemos definir el siguiente conjunto

$$C^{0,1}(\overline{G}) = \{f \in C(\overline{G}) : \|f\|_{0,1} < \infty\}. \text{ ver [2]}$$

Teorema 3.1 *Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ y $\partial\Omega \in C^{0,1}$ entonces existe un operador lineal continuo*

$$B : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$$

con la propiedad de que para cada $u \in C^1(\overline{\Omega})$ la función $Bu : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ es la función de frontera clásica de u, es decir Bu es la restricción de $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ a la frontera $\partial\Omega$.
El caso en el cual $u \in H^1(\Omega)$ y $Bu \in L^2(\partial\Omega)$ se llama función de frontera generalizada en u.
Si $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces $Bu = 0$ en $L^2(\partial\Omega)$ es decir $Bu(x) = 0$ para casi todo $x \in \partial\Omega$.

Observación 3.1 El operador frontera B es importante para la formulación de condiciones de frontera en el sentido generalizado. Por ejemplo, sea $u \in H^1(\Omega)$ y $g \in H^1(\Omega)$. La condición de frontera

$$u = g \text{ en } \partial\Omega$$

se entiende en el sentido

$$Bu = Bg \text{ en } L^2(\partial\Omega). \text{ ver [5]}$$

Es decir $Bu(x) = Bg(x)$ para casi todo $x \in \partial\Omega$. La construcción del operador es como sigue Primero se debe probar la desigualdad

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq const.\|u\|_{H^1(\Omega)} \; \forall u \in C^1(\overline{\Omega}) \tag{3.1}$$

o equivalentemente

$$\int_{\partial\Omega} u^2 ds \leq const. \int_{\Omega} (u^2 + \sum_{i=1}^{N} (D_i u)^2) dx$$

Si Bu denota la restricción de $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ a la frontera $\partial\Omega$ en el caso $u \in C^1(\overline{\Omega})$, entonces (3.1) puede ser escrito como

$$\|Bu\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq const.\|u\|_{H^1(\Omega)}, \; \forall u \in C^1(\overline{\Omega}) \tag{3.2}$$

como $C^1(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$ el operador lineal

$$B : C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$$

se puede extender de manera única a u operador lineal continuo

$$B : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega), \text{ ver [1]}$$

tal que (3.1) se cumple para todo $u \in H^1(\Omega)$. Explícitamente, obtenemos Bu de:
Sea $u \in H^1(\Omega)$, elegimos una sucesión (u_n) en $C^1(\overline{\Omega})$ tal que $\|u_n - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0$, cuando $n \to \infty$. Entonces $\|Bu_n - Bu\|_{L^2(\partial\Omega)} \to 0$, cuando $n \to \infty$ o equivalentemente

$$\int_{\partial\Omega} (u_n - Bu)^2 ds \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Demostración del teorema 3.1 en $\mathbb{R}$.
Sean a y b números reales, $\overline{\Omega} = [a, b]$ y sea $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Por el teorema del valor medio

$$(b-a)^{-1} \int_a^b u(t)dt = u(x_0) \text{ para algún } x_0 \in [a, b]$$

entonces $u(x) = \int_{x_0}^x u'(t)dt + (b-a)^{-1} \int_a^b u(t)dt$
Denotemos $\|u\|_C = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)|$, para todo $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Por la desigualdad del Hölder se tiene

$$\begin{aligned}\|u\|_C &\leq c\Big(\int_a^b u'^2(t)dt\Big)^{1/2} + c\Big(\int_a^b u^2(t)dt\Big)^{1/2} \\ &\leq 2c\|u\|_{H^1(\Omega)}, \text{ para alguna constante } c.\end{aligned}$$

Entonces

$$u(a)^2 + u(b)^2 \leq 2\|u\|_{\mathcal{C}}^2 \leq 8c^2\|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \tag{3.3}$$

Como $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ es denso en $H^1(\Omega)$ existe una única función continua $j : H^1(\Omega) \to \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ con $j(u) = u$, es decir $j(u)(x) = u(x)$ para casi todo $x \in \overline{\Omega}$; los valores de frontera de u son dados por $j(u)(a)$, $j(u)(b)$. Como $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ es denso en $H^1(\Omega)$, el paso al límite prueba que (3.3) se cumple para todo $u \in H^1(\Omega)$; donde después de tomar el límite, $u(a)$ y $u(b)$ se entienden como valores de frontera generalizadas.

Demostración del teorema 3.1 en $\mathbb{R}^n$.
Para $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, demostraremos que

$$\int_{\partial\Omega} u^2 ds \leq c \int_\Omega [u^2 + \sum_{j=1}^N (D_j u)^2] dx \tag{3.4}$$

Para simplificar la notación consideremos el caso $n = 2$. En el caso general se procede análogamente. En una vecindad de un punto $x \in \partial\Omega$ elegimos un sistema de coordenada local (ξ, η) donde la frontera tiene la representación local

$$\eta = \Phi(\xi), \ -a \leq \xi \leq a$$

y Φ es una función de Lipschitz y continua (aplicamos aqui las condiciones de regularidad que se dio en las definiciones (3.1) y (3.2)). Existe $\beta > 0$ tal que el conjunto S de todos los puntos (ξ, η) donde $-a \leq \xi \leq a$, $\Phi(\xi) - \beta \leq t \leq \Phi(\xi)$ esta contenido en $\overline{\Omega}$. Sea $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ entonces

$$u(\xi, \Phi(\xi)) = \int_t^{\Phi(\xi)} u_\eta(\xi, \eta) d\eta + u(\xi, t)$$

donde $\Phi(\xi) - \beta \leq t \leq \Phi(\xi)$. Aplicamos la desigualdad $(A + B)^2 \leq 2A^2 + 2B^2$ y la desigualdad de Hölder:

$$u(\xi, \Phi(\xi))^2 \leq 2\beta \int_{\Phi(\xi)-\beta}^{\Phi(\xi)} u_\eta(\xi, \eta)^2 d\eta + 2u(\xi, t)^2.$$

Integrando con respecto a t tenemos

$$\beta u(\xi, \Phi(\xi))^2 \leq 2 \int_{\Phi(\xi)-\beta}^{\Phi(\xi)} [\beta^2 u_\eta(\xi, \eta)^2 + u(\xi, \eta)^2] d\eta$$

Finalmente, integrando sobre el intervalo $[-a, a]$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} \beta u(\xi, \Phi(\xi))^2 d\xi &\leq 2 \int_S (\beta^2 u_\eta^2 + u^2) dx \\ &\leq c_1 \int_S (u_\xi^2 + u_\eta^2 + u^2) dx. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Primero supongamos que $\xi \in \mathcal{C}^1$, que γ es la curva descrita por Φ, entonces

$$\int_\gamma u^2 ds = \int_{-a}^{a} u(\xi, \Phi(\xi))^2 \sqrt{1 + \Phi'(\xi)^2} d\xi$$

y existe una constante c_2 tal que $\sqrt{1 + \Phi'(\xi)^2} \leq c_2$; luego

$$\int_\gamma u^2 ds \leq c_2 \int_{-a}^{a} u(\xi, \Phi(\xi))^2 d\xi \tag{3.6}$$

Si Φ es una función de Lipschitz continua, entonces $\Phi'(\xi)$ existe para casi todo ξ. Por otro lado

$$Lip(-a, a) \subset W_\infty^1(-a, a) = \{f \in L_{Loc}^1(-a, a) : \max_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(-a,a)} < \infty\}$$

Luego existe una constante c_2 tal que

$$\int_\gamma u^2 ds \leq c_2 \int_{-a}^{a} u(\xi, \Phi(\xi))^2 d\xi \tag{3.7}$$

De (3.5)

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} u(\xi, \Phi(\xi))^2 d\xi &\leq \frac{c_1}{\beta} \int_S (u_\xi^2 + u_\eta^2 + u^2) dx \\ &\leq \frac{c_1}{\beta} \int_\Omega (u_\xi^2 + u_\eta^2 + u^2) dx \end{aligned}$$

De (3.6) y (3.7), para alguna constante c se tiene

$$\int_\gamma u^2 ds \leq c \int_\Omega (u_\xi^2 + u_\eta^2 + u^2) dx = c\|u\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{3.8}$$

Como la frontera $\partial\Omega$ puede ser cubierta por un número finito de vecindades en cada una de las cuales la frontera tiene representación local, sumando las desigualdades correspondientes a (3.8) se obtiene $\int_{\partial\Omega} u^2 ds \leq c\|u\|^2_{H^1(\Omega)}$.

4. Conclusiones

1. Al estudiar las soluciones de las ecuaciones diferenciales se plantea con frecuencia condiciones a las cuales la solución debe satisfacer en cierta superficie fijada $(n-1)-$ dimensional, por ejemplo en $\partial\Omega$. Es por ello que se necesita generalizar la noción del valor que toma una función definida en c.t.p. de una superficie $n-1$- dimensional S, esto es la noción de la traza de una función en S.
2. Hemos demostrado para el caso $S = \partial\Omega$, que se obtiene para una función $f \in H^1(\Omega)$ la correspondiente función $f|_{\partial\Omega}$ en $L^2(\partial\Omega)$, que le llamamos traza de f en la superficie $(n-1)-$ dimensional $\partial\Omega$ (o función generalizada de frontera).
3. Se generaliza la fórmula de integración por partes, para las funciones f, g en $H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega f_{x_i} g dx = \int_{\partial\Omega} f g \eta_i ds - \int_\Omega f g_{x_i} dx$$

donde $\eta_i = cos(\eta, x_i)$ es el coseno del ángulo entre la normal η exterior a la superficie $\partial\Omega$ y el eje x_i mientras que las funciones f y g que se encuentran bajo el signo integral en $\partial\Omega$ son las trazas de estas funciones en $\partial\Omega$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Adams,R.A. **Sobolev Spaces.** Acad. Press, New York, (1975).

[2] Brenner, S.C., Ridgway Scott, L. **The Mathematical Theory of Finite Element Methods.** Springer - Verlag, New York, (1994).

[3] Medeiros, L.A.,Miranda, M. **Espacios de Sobolev.** Instituto de Matemática,UFRJ,(1999).

[4] Teman, Roger. **Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics.** Springer - Verlag, New York, (1997) .

[5] Zeidler,E. **Non Linear Functional Analysis and its applications.** Springer - Verlag, New York, (1990).