PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XV N°2, pp. 61-69, Lima - Perú, Marzo 2013

EL ESPECTRO DE FUCIK PARA UN SISTEMA ACOPLADO CON SOLUCIONES QUE NO CAMBIAN DE SIGNO

Santiago César Rojas Romero [1]

Resumen: En este trabajo se estudia el espectro de Fucik para el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{en } \langle 0,1\rangle, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{en } \langle 0,1\rangle, \\ Bu = Bv = 0 & \text{en } \{0,1\}, \end{cases}$$

donde $Bu = 0$ representa las condiciones de frontera tipo Dirichlet o tipo Newmann.
Se estudia el caso en que las soluciones no triviales (u, v) del problema, conservan su signo en todo el intervalo $\langle 0,1\rangle$ y se obtiene como resultado que para el problema tipo Dirichlet, el espectro de Fucik está formado por la unión de un plano y un cilindro hiperbólico, mientras que para el problema tipo Newmann el espectro está formado por los planos cartesianos.

Palabras clave: Espectro de Fucik, sistema acoplado, superficies de Fucik.

THE FUCIK SPECTRUM FOR A COUPLED SYSTEM WITH NO CHANGING SIGN SOLUTIONS

Abstract: In this work we study the Fucik spectrum for the following system of second order ordinary differential equations

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{in } \langle 0,1\rangle, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{in } \langle 0,1\rangle, \\ Bu = Bv = 0 & \text{on } \{0,1\}, \end{cases}$$

where $Bu = 0$ represents the Dirichlet or Newmann type boundary conditions.
We study the case in which the nontrivial solutions (u, v) of the problem, keep their sign in the whole interval $\langle 0,1\rangle$ and we prove: the Fucik spectrum for the Dirichlet problem is the union of a plane with an hyperbolic cylinder, while for the Newmann problem, the Fucik spectrum is formed by the cartesian planes.

Key Words: Fucik spectrum, coupled system, Fucik surfaces.

1. Introducción

El Espectro de Fucik para el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{en } \langle 0,1\rangle, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{en } \langle 0,1\rangle, \\ Bu = Bv = 0 & \text{en } \{0,1\}, \end{cases} \tag{1}$$

[1] UNMSM. Fac. de Ciencias Matemáticas, e-mail: srojasr@unmsm.edu.pe

donde $Bu = 0$ representa las condiciones de frontera tipo Dirichlet o tipo Neumann, es el conjunto

$$\widehat{\Sigma} = \{\, (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad \lambda^{\pm}, \mu^- \geq 0 \text{ y (1) tiene soluciones no triviales} \,\} .$$

El estudio de este espectro fue motivado por uno de los problemas formulados por Fucik [4] el cual plantea describir el conjunto de todos los pares (a, b) tales que el problema de valor frontera de cuarto orden

$$\begin{cases} u^{(iv)} = a\,u^+ - b\,u^- & \text{en } \langle 0, \pi\rangle , \\ u(0) = u''(0) = u(\pi) = \ u''(\pi) = 0 \end{cases}$$

tiene una solución no trivial. El problema resulta equivalente a (1) con $\lambda^+ = \mu^-$.
La noción de espectro de Fucik fue introducida en los trabajos de Fucik [3] y Dancer [2] para el operador $-\dfrac{d^2}{dx^2}$, es decir el espectro del caso escalar de (1)

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ u^+ - \lambda^- u^- & \text{en } \langle 0, 1\rangle , \\ Bu == 0 & \text{en } \{0, 1\} , \end{cases} \tag{2}$$

el cual en la actualidad está completamente descrito y se conoce explícitamente sus elementos. Inclusive para condiciones de frontera más generales (ver por ejemplo Rojas [7]), se conoce el espectro de Fucik de (2).
Ahora, nuestro objetivo es estudiar el espectro de Fucik de (1) y conocer alguna parte de él.
Escribimos $\widehat{\Sigma} = \widehat{\Sigma}_t \cup \widehat{\Sigma}_{nt}$, donde $\widehat{\Sigma}_t$ denota la parte trivial

$$\widehat{\Sigma}_t = \{\, (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad \lambda^{\pm}, \mu^- \geq 0 \text{ y (1) tiene soluciones no triviales que no cambian de signo} \,\} \tag{3}$$

y $\widehat{\Sigma}_{nt}$ denota la parte no trivial

$$\widehat{\Sigma}_{nt} = \{\, (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad \lambda^{\pm}, \mu^- > 0 \text{ y (1) tiene soluciones no triviales que cambian de signo} \,\} . \tag{4}$$

En este trabajo damos una descripción completa de $\widehat{\Sigma}_t$. En la sección 2, demostramos que el Espectro de Fucik $\widehat{\Sigma}$ para el sistema acoplado (1.1) es no vacío y tiene algunas propiedades de simetría. En la sección 3, a partir de (1.1) deducimos algunas identidades que utilizaremos en la demostración de nuestro resultado principal. Finalmente, en la sección 4, demostramos el resultado que permite describir $\widehat{\Sigma}_t$ tanto para el caso Dirichlet como para el caso Newmann.

2. Propiedades básicas del Espectro $\widehat{\Sigma}$

Aquí vemos que se verifican las siguientes propiedades:

Lema 2.1. *El espectro de Fucik $\widehat{\Sigma}$; es no vacío.*

Demostración.
Sea λ_k un autovalor de $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ ($\lambda_k = k^2\pi^2$ para el caso Dirichlet, $\lambda_k = (k-1)^2\pi^2$ para el caso Newmann) y ϕ_k su respectiva autofunción. Es decir, se verifica

$$\begin{cases} -\phi_k'' = \lambda_k\,\phi_k & \text{en } \langle 0, 1\rangle , \\ B\phi_k = 0 & \text{en } \{0, 1\} , \end{cases}$$

donde $B = 0$ representa las condiciones de frontera tipo Dirichlet o Newmann. Entonces $(u, v) = (\phi_k, \phi_k)$ es solución del problema

$$\begin{cases} -u'' = \lambda_k\, v & \text{en } \langle 0, 1\rangle , \\ -v'' = \lambda_k\, u & \text{en } \langle 0, 1\rangle , \\ Bu = Bv = 0 & \text{en } \{0, 1\} . \end{cases}$$

Y como $\phi_k = \phi_k^+ - \phi_k^-$, concluimos que $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k) \in \widehat{\Sigma}$, $\forall\, k \geq 1$. ■

Ahora vemos que $\widehat{\Sigma}_{nt}$ tiene las siguientes simetrías.

Lema 2.2. *Si* $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$ *con las correspondientes soluciones no triviales* (u, v) *de (1), entonces*

1. $(\lambda^+, \mu^-, \lambda^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$ *con correspondientes soluciones no triviales* (v, u)

2. $\left(\sqrt{\lambda^-\mu^-}\,,\ \lambda^+\sqrt{\dfrac{\mu^-}{\lambda^-}}\,,\ \lambda^+\sqrt{\dfrac{\lambda^-}{\mu^-}}\ \right) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$ *con correspondientes soluciones no triviales* $\left(-u, -\sqrt{\dfrac{\lambda^-}{\mu^-}}v\ \right)$.

Demostración.

1. Es inmediato de (1) .

2. Por hipótesis se tiene que

$$
\begin{aligned}
-u'' &= \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- && \text{en } \langle 0, 1\rangle\,,\\
-v'' &= \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- && \text{en } \langle 0, 1\rangle\,,\\
Bu &= Bv = 0 && \text{en } \{0, 1\}\ .
\end{aligned}
$$

Como $u^+ = (-u)^-$ y $u^- = (-u)^+$, entonces $\forall\, \delta > 0$ se cumple

$$
\begin{aligned}
u'' &= \left(\frac{\lambda^-}{\delta}\right)(-\delta v)^+ - \left(\frac{\lambda^+}{\delta}\right)(-\delta v)^- && \text{en } \langle 0, 1\rangle\,,\\
(\delta v)'' &= (\delta\mu^-)(-u)^+ - (\delta\lambda^+)(-u)^- && \text{en } \langle 0, 1\rangle\,,\\
B(-u) &= B(-\delta v) = 0 && \text{en } \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

y tomando δ tal que $\dfrac{\lambda^-}{\delta} = \delta\mu^-$ tenemos el resultado. ■

3. Algunas identidades importantes

Aquí obtenemos algunas identidades que usaremos en la siguiente sección para la construcción de $\widehat{\Sigma}_t$. Empezamos multiplicando la primera ecuación de (1.1) por v , la segunda por u e integrando de 0 a 1 , para obtener

$$\int_0^1 u'v'dt = \lambda^+ \int_0^1 (v^+)^2 - (\lambda^+ + \lambda^-)\int_0^1 (v^+)(v^-)dt + \lambda^- \int_0^1 (v^-)^2 dt$$

y

$$\int_0^1 u'v'dt = \mu^+ \int_0^1 (u^+)^2 - (\lambda^+ + \mu^-)\int_0^1 (u^+)(u^-)dt + \mu^- \int_0^1 (u^-)^2 dt\,,$$

pero como $w^+w^- = 0\,, \forall\, w$, entonces

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 u'v'dt &= \lambda^+ \int_0^1 (v^+)^2 + \lambda^- \int_0^1 (v^-)^2 dt\\
&= \lambda^+ \int_0^1 (u^+)^2 + \mu^- \int_0^1 (u^-)^2 dt\,. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Ahora, multiplicando la primera ecuación de (1.1) por u, la segunda por v e integrando de 0 a 1, tenemos

$$\int_0^1 (u')^2\,dt = \lambda^+ \int_0^1 (v^+)u\,dt - \lambda^- \int_0^1 (v^-)u\,dt \quad \text{y} \tag{6}$$

$$\int_0^1 (v')^2\,dt = \lambda^+ \int_0^1 (u^+)v\,dt - \mu^- \int_0^1 (u^-)\,vdt\,. \tag{7}$$

Mientras que usando solo la parte positiva de u, obtenemos

$$\int_0^1 (u')(u^+)'\,dt = \lambda^+ \int_0^1 (v^+)(u^+)\,dt - \lambda^- \int_0^1 (v^-)(u^+)\,dt\,,$$

de donde

$$\int_0^1 |(u^+)'|^2\,dt = \lambda^+ \int_0^1 (v^+)(u^+)\,dt - \lambda^- \int_0^1 (v^-)(u^+)\,dt\,. \tag{8}$$

Pero usando solo la parte negativa de u, obtenemos

$$\int_0^1 (u')(u^-)'\,dt = \lambda^+ \int_0^1 (v^+)(u^-)\,dt - \lambda^- \int_0^1 (v^-)(u^-)\,dt\,,$$

y de ahí que

$$\int_0^1 |(u^-)'|^2\,dt = -\lambda^+ \int_0^1 (v^+)(u^-)\,dt + \lambda^- \int_0^1 (v^-)(u^-)\,dt\,. \tag{9}$$

Procediendo análogamente, con las partes positiva y negativa de v, obtenemos

$$\int_0^1 |(v^+)'|^2\,dt = \lambda^+ \int_0^1 (u^+)(v^+)\,dt - \mu^- \int_0^1 (u^-)(v^+)\,dt \quad \text{y} \tag{10}$$

$$\int_0^1 |(v^-)'|^2\,dt = -\lambda^+ \int_0^1 (u^+)(v^-)\,dt + \mu^- \int_0^1 (u^-)(v^-)\,dt\,. \tag{11}$$

De otro lado, para el problema tipo Newmann, se sabe que la primera autofunción es $\phi_1 = k \neq 0$. Multiplicando las dos ecuaciones de (1.1) por $\phi_1 = k$ e integrando de 0 a 1 , obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^1 |\phi_1'|^2\,dt &= \lambda^+ \int_0^1 (v^+)\phi_1\,dt - \lambda^- \int_0^1 (v^-)\phi_1\,dt \quad \text{y} \\ &= \lambda^+ \int_0^1 (u^+)\phi_1\,dt - \mu^- \int_0^1 (u^-)\phi_1\,dt\,, \end{aligned}$$

de donde

$$\lambda^+ \int_0^1 v^+\,dt = \lambda^- \int_0^1 v^-\,dt \quad \text{y} \quad \lambda^+ \int_0^1 u^+\,dt = \mu^- \int_0^1 u^-\,dt\,. \tag{12}$$

Sin embargo, para el problema tipo Dirichlet no llegamos a ecuaciones análogas. Más bien, obtenemos otras identidades también muy útiles. Multiplicando ambas ecuaciones en (1.1) por ϕ_1 e integrando de 0 a 1 , obtenemos

$$\lambda^+ \int_0^1 v^+\phi_1\,dt - \lambda^- \int_0^1 v^-\phi_1\,dt = \int_0^1 u'\phi_1'\,dt = -\int_0^1 u\phi_1''\,dt = \lambda_1 \int_0^1 (u^+ - u^-)\phi_1\,dt$$

$$\lambda^+ \int_0^1 u^+\phi_1\,dt - \mu^- \int_0^1 u^-\phi_1\,dt = \int_0^1 v'\phi_1'\,dt = -\int_0^1 v\phi_1''\,dt = \lambda_1 \int_0^1 (v^+ - v^-)\phi_1\,dt\,.$$

Sumando y luego restando estas dos últimas ecuaciones, llegamos a

$$(\lambda^+ - \lambda_1)\int_0^1 v^+\phi_1\,dt + (\lambda^+ - \lambda_1)\int_0^1 u^+\phi_1\,dt$$

$$= (\lambda^- - \lambda_1)\int_0^1 v^-\phi_1\,dt + (\mu^- - \lambda_1)\int_0^1 u^-\phi_1\,dt \tag{13}$$

y

$$(\lambda^+ + \lambda_1)\int_0^1 v^+\phi_1\,dt - (\lambda^+ + \lambda_1)\int_0^1 u^+\phi_1\,dt$$

$$= (\lambda^- + \lambda_1)\int_0^1 v^-\phi_1\,dt - (\mu^- + \lambda_1)\int_0^1 u^-\phi_1\,dt \quad . \tag{14}$$

4. Soluciones que no cambian de signo

Aquí se deducen las propiedades de las soluciones no triviales de (1.1) correspondientes a los puntos en $\widehat{\Sigma}_t$. Primero consideramos el caso Dirichlet.

Proposición 4.1. *Sea (u,v) una solución de (1) con condiciones de frontera tipo Dirichlet y coeficientes $\lambda^\pm$ y μ^- , entonces*

1. *Ambas u y v cambian de signo o ninguna de ellas.*

2. *Si u y v no cambian de signo, entonces ambas son múltiplos no nulos de ϕ_1 y uno de los coeficientes es igual a λ_1 mientras que los otros dos pueden ser cualquier número real. En particular, si normalizamos las autofunciones, tenemos los casos*

$$\begin{aligned} u = v = \phi_1 \quad &y \quad \lambda^+ = \lambda_1\,, \\ u = v = -\phi_1 \quad &y \quad \lambda^- = \mu^- = \lambda_1\,, \end{aligned} \tag{15}$$

Demostración.

1. Supongamos que u no cambia de signo. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $u \geq 0$ y $\lambda^+ \geq 0$. De (11) tenemos que $\int_0^1 |(v^-)'|^2 \leq 0$. De ahí que $(v^-)' = 0$, luego $v^- = k\,(\text{constante})$. De esto se deduce que $v^- = 0$ y por tanto $v \geq 0$ en $[0,1]$. Entonces v no cambia de signo. Análogamente se demuestra que si $u < 0$ también $v < 0$ en $[0,1]$.
   Ahora supongamos que u cambia de signo, entonces $u^+ \neq 0$ y $u^- \neq 0$.
   Si $v \geq 0$, entonces $v^- = 0$ y de (8) y (9) tendríamos $\lambda^+ = 0$, $u^+ = k_1$ y $u^- = k_2$, con lo cual $u = k\,(\text{constante})$, lo cual es una contradicción pues $u^+ \neq 0$. Lo mismo ocurre si $v \leq 0$. Por tanto, v cambia de signo.

2. Sean u y v que no cambian de signo. Por la parte 1, solo debemos considerar los casos en que u y v tienen el mismo signo.

   - Caso $u, v \geq 0$:
     Por (6), tenemos que $\lambda^+ > 0$.
     Afirmación: $\lambda^+ = \lambda_1$.
     En efecto, de (13) tenemos

$$(\lambda^+ - \lambda_1)\underbrace{\left[\int_0^1 v\,\phi_1\,dt + \int_0^1 u\,\phi_1\,dt\right]}_{>0} = 0\,,$$

y de ahí que $\lambda^+ = \lambda_1$. Luego, el sistema (1) queda como

$$\begin{cases} -u'' = \lambda_1 v & \text{en } \langle 0,1\rangle, \\ -v'' = \lambda_1 u & \text{en } \langle 0,1\rangle, \\ u(0) = u(1) = 0 \quad , & v(0) = v(1) = 0, \end{cases}$$

el cual es equivalente a

$$\begin{cases} u^{(iv)} = \lambda_1^2 u & \text{en } \langle 0,1\rangle, \\ v^{(iv)} = \lambda_1^2 v & \text{en } \langle 0,1\rangle, \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0, \\ v(0) = v(1) = v''(0) = v''(1) = 0, \end{cases}$$

cuya solución general es

$$u(t) = A\,e^{\sqrt{\lambda_1}\,t} + B\,e^{-\sqrt{\lambda_1}\,t} + C\cos(\sqrt{\lambda_1}\,t) + D\,sen(\sqrt{\lambda_1}\,t),$$

$$v(t) = -A\,e^{\sqrt{\lambda_1}\,t} - B\,e^{-\sqrt{\lambda_1}\,t} + C\,\cos(\sqrt{\lambda_1}\,t) + D\,sen(\sqrt{\lambda_1}\,t).$$

De ahí por las condiciones de frontera resulta

$$u(t) = v(t) = D\,sen(\sqrt{\lambda_1}\,t),$$

es decir u y v son múltiplos de ϕ_1 . Más aún, normalizando, tenemos que $\lambda^+ = \lambda_1$ y $u = v = \phi_1$.

- Caso $u, v < 0$:
Por (6) y (7), tenemos que $\lambda^- > 0$ y $\mu^- > 0$.
Afirmación: $\lambda^- = \delta\lambda_1$ y $\mu^- = \frac{1}{\delta}\lambda_1$, para algún $\delta > 0$.
En efecto, como $u = -A_1\phi_1$, $v = -A_2\phi_1$, A_1 , $A_2 > 0$, de (13) y (14) tenemos

$$A_1(\lambda^- - \lambda_1) + A_2(\mu^- - \lambda_1) = 0,$$

$$A_1(\lambda^- + \lambda_1) - A_2(\mu^- + \lambda_1) = 0.$$

De ahí, sumando y restando estas dos ecuaciones, llegamos a

$$\lambda^- = \frac{A_2}{A_1}\lambda_1 \qquad \text{y} \qquad \mu^- = \frac{A_1}{A_2}\lambda_1$$

con lo cual se tiene la afirmación.

Así resulta $\lambda^-\mu^- = \lambda_1^2$, $\delta = \sqrt{\frac{\lambda^-}{\mu^-}}$, y el sistema (1) queda como

$$\begin{cases} -u'' = \delta\,\lambda_1 v & \text{en } \langle 0,1\rangle, \\ -v'' = \dfrac{\lambda_1}{\delta} u & \text{en } \langle 0,1\rangle, \\ u(0) = u(1) = 0 \quad , & v(0) = v(1) = 0. \end{cases}$$

Resolviendo como se hizo en el item anterior, obtenemos

$$u = -k\,\phi_1 \quad \text{y} \quad v = -\frac{k}{\delta}\,\phi_1 \quad , \; k > 0.$$

Luego $u = \delta\,v$, es decir $u = \sqrt{\frac{\lambda^-}{\mu^-}}\,v = -k\,\phi_1$, $k > 0$. Y normalizando, concluimos que $\lambda^- = \mu^- = \lambda_1$ y $u = v = -\phi_1$. ■

Ahora veremos el resultado correspondiente al caso Newmann.

Proposición 4.2. *Sea (u,v) una solución de (1) con condiciones de frontera tipo Neumann y coeficientes $\lambda^{\pm}$ y μ^{-}, entonces*

1. *Ambas u y v cambian de signo o ninguna de ellas.*

2. *Si u y v no cambian de signo, entonces ambas son múltiplos de ϕ_1 (una de ellas puede ser cero) y uno de los coeficientes es $\lambda_1 = 0$, mientras que los otros pueden ser cualquier número real. Si ambas u y v no son cero, entonces dos de los coeficientes deben ser $\lambda_1 = 0$. En particular, si normalizamos las autofunciones tenemos los siguientes casos*

$$\begin{aligned} u = v = \phi_1 \quad &y \quad \lambda^+ = 0\,, \\ u = v = -\phi_1 \quad &y \quad \lambda^- = \mu^- = 0\,, \\ u = \phi_1 \; (resp.\; u = -\phi_1), v = 0 \quad &y \quad \lambda^+ = 0 \; (resp.\; \mu^- = 0)\,, \\ u = 0, v = \phi_1 \; (resp.\; v = -\phi_1) \quad &y \quad \lambda^+ = 0 \; (resp.\; \lambda^- = 0)\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Demostración. Aquí (12) es de gran utilidad, en particular porque de ahí se deduce que λ^+, λ^- y μ^- tienen el mismo signo.

1. Sea u que no cambia de signo. Supongamos $u \geq 0$, esto es $u^+ = u$ y $u^- = 0$. De (12) tenemos que $\lambda^+ = 0$. Luego, la segunda ecuación de (1) queda $v'' = 0$ y por las condiciones de frontera resulta que v es constante, es decir v no cambia de signo.

2. Sean u y v que no cambian de signo. Consideremos el caso $u, v \geq 0$, esto es $u^+ = u$, $u^- = 0$, $v^+ = v$, $v^- = 0$. De (12) resulta $\lambda^+ = \mu^+ = 0$, con lo cual el sistema (1) queda como

$$\begin{cases} u'' = 0 & \text{en } \langle 0,1 \rangle\,, \\ v'' = 0 & \text{en } \langle 0,1 \rangle\,, \\ u'(0) = u'(1) = 0\,,\; v'(0) = v'(1) = 0 \end{cases}$$

y de ahí que u y v son constantes. Luego, $u = k_1\phi_1$ y $v = k_2\phi_1$ ($\phi_1 = k$ para el caso Neumann). En particular $u = \phi_1$ y $v = \phi_1$.
El caso $u = 0$ nos da $\lambda^+ = 0$ y $v = k_2\phi_1$. En particular, cuando $\lambda^+ = 0$ tenemos $u = 0$ y $v = \phi_1$. Los demás casos se prueban análogamente. ■

Así, hemos demostrado que la parte trivial $\widehat{\Sigma}_t$ tiene la siguiente forma:

- Para el caso Dirichlet

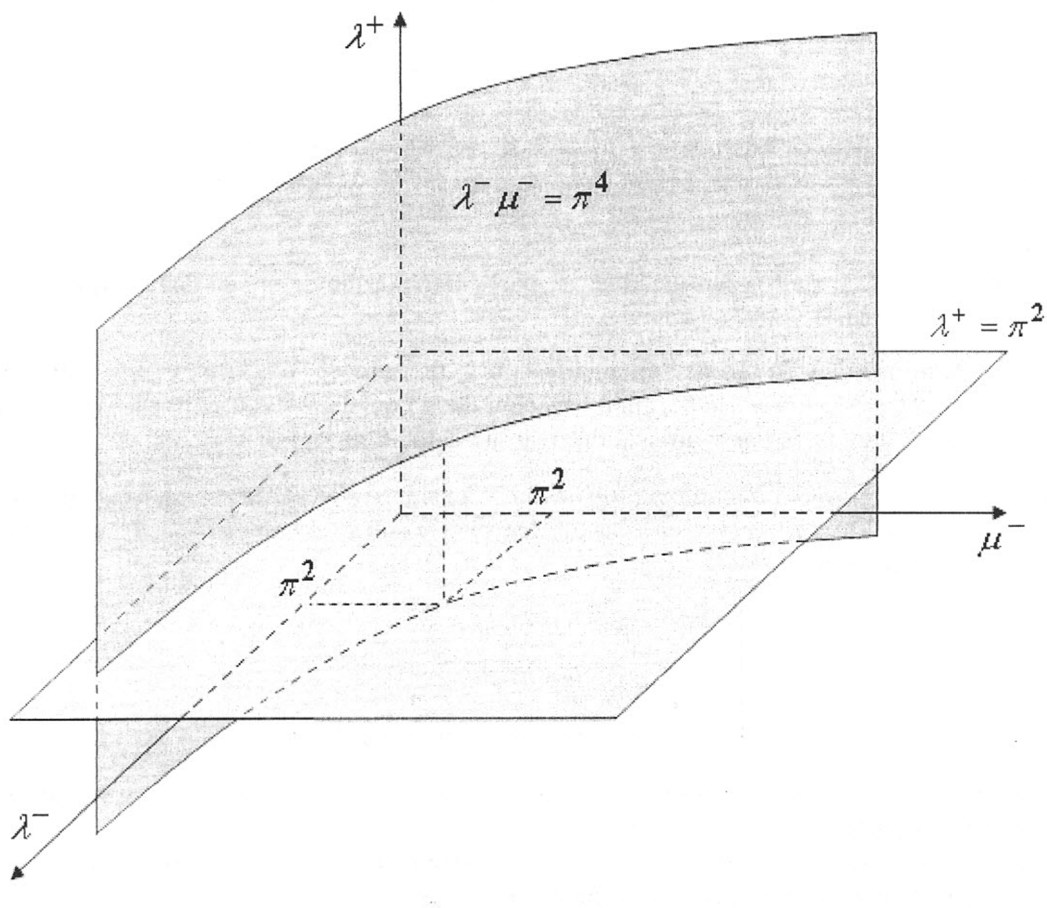
$$\widehat{\Sigma}_t = \{\, \lambda^+ = \lambda_1 \,\} \cup \{\, \lambda^-, \mu^- > 0,\; \lambda^-\mu^- = \lambda_1^2 \,\}$$

  donde el plano $\{\, \lambda^+ = \lambda_1 \,\}$ corresponde a la familia de soluciones $u = v = k\,\phi_1$, $k > 0$, mientras que la superficie $\{\, \lambda^-, \mu^- > 0,\; \lambda^-\mu^- = \lambda_1^2 \,\}$ corresponde a la familia $u = \sqrt{\dfrac{\lambda^-}{\mu^-}}\, v = -k\,\phi_1$, $k > 0$.

- Para el caso Neumann

$$\widehat{\Sigma}_t = \{\, \lambda^+ = 0 \,\} \cup \{\, \lambda^- = 0 \,\} \cup \{\, \mu^- = 0 \,\}$$

  donde el plano $\{\, \lambda^+ = 0 \,\}$ corresponde a las soluciones $\{\, u = k_1\,\phi_1\,,\; v = k_2\,\phi_1\,,\; k_1, k_2 \geq 0 \,\}$, el plano $\{\, \lambda^- = 0 \,\}$ corresponde a las soluciones $\{\, u = 0\,,\; v = -\phi_1 \,\}$ y el plano $\{\, \mu^- = 0 \,\}$ corresponde a las soluciones $\{\, u = -\phi_1\,,\; v = 0 \,\}$.



Espectro de Fucik $\widehat{\Sigma}_t$: Caso Dirichlet

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Campos J. y Dancer E. N. **On the resonance set in a fourth-order equation with jumping nonlinearity**. Differential Integral Equations 14(3) (2001), 257-272.

[2] Dancer E. N. **On the Dirichlet problem for weakly nonlinear elliptic partial differental equations**. Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect A(4) (1976/1977), 283-300.

[3] Fucik S. **Boundary value problem with jumping nonlinearities**. Casopis Pest. Mat 101 (1) (1976), 69-87.

[4] Fucik S. **Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems**. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1980.

[5] Massa E. **On a variational characterization of the Fucik Spectrum of the Laplacian and a superlinear Sturm-Liouville equation**. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A 134(3) (2004), 557-577.

[6] Massa E. **On the Fucik Spectrum and superlinear elliptic equations**. PhD. Thesis, Universitá degli Studi di Milano, Italy) (2003).

[7] Rojas S. **Espectro de Fucik para el problema de valor frontera Sturm-Liouville**. Pesquimat, revista de investigación de la Fac. Ciencias Mat. UNMSM Vol IX, no. 2 , 31-49, 2006.

[8] Ruf B. **On nonlinear elliptic problems with jumping nonliearities.** Ann. Mat. Pure Appl. (4) 128 (1981) 133-151.

[9] Rynne. P. **The Fucik Spectrum of general Sturm-Liouville problems**. Journal of Differential Equations 161 (2000), 87-109.

[10] Schechter M. **The Fucik Spectrum**. Indiana University Mathematics Journal, Vol. 43 No. 4 (1994), 1139-1157.