

## MODELOS DE ESTADO NO ESTACIONARIO Y SEUDOESTACIONARIO EN EL CÁLCULO DE TIEMPO DE ESCURRIMIENTO

Javier Armijo C.

Departamento Académico de Operaciones Unitarias, Facultad de Química e Ingeniería Química, UNMSM, Av. Venezuela s/n., Ciudad Universitaria, Lima - Perú.

**Abstract:** Experimental data of efflux time for tank with exit pipe are compared with values calculated by unsteady-state model(NoE) and quasi-steady-state model(SE). The time required to drain the tank calculated by boths model give the same results when the step size is 0.1 seconds in the numerical solution of model NoE. In some instances the calculations with the NoE model give a deviation of  $\pm 1\%$  respect to the experimental value.

**Key words:** Drainage, models, simulation.

**Resumen:** Datos experimentales del tiempo de drenado de un líquido desde un tanque a través de un tubo, se comparan con los valores calculados por los modelos de estado no estacionario(NoE) y el de seudo estacionario(SE). El tiempo final de drenado calculado por ambos modelos dan el mismo resultado cuando se utiliza un tamaño de paso igual a 0.1 segundos en la solución numérica del modelo NoE. En algunos casos los cálculos con el modelo NoE dan una desviación de  $\pm 1\%$  respecto al valor experimental.

**Palabras claves:** Drenado, modelos, simulación.

### INTRODUCCIÓN

El drenado de un líquido desde un tanque a través de un tubo constituye un problema interesante de ingeniería química que permite analizar y comparar el comportamiento de un sistema bajo diferentes situaciones de complejidad. El problema es un ejemplo típico de una operación en estado no estacionario, donde la altura del líquido en el tanque y la velocidad del líquido en el tubo cambian con el tiempo.

Las operaciones en estado no estacionario se simulan a través de un sistema de ecuaciones diferenciales que a veces no pueden resolverse analíticamente. En contraste, si suponemos una operación seudoestacionario se simplifican alguna de las ecuaciones diferenciales y es posible arribar a una solución analítica.

La suposición de estado seudoestacionario nos permite un manejo matemático de las ecuaciones relativamente fácil; pero se pierde rigurosidad en el comportamiento real del sistema, y los resultados pueden diferir sustancialmente de una situación a otra.

En el presente trabajo se deducen los modelos de estado no estacionario y seudoestacionario. El modelo de estado no estacionario está conformado por dos ecuaciones diferenciales ordinarias que se resuelven numéricamente con el método de Runge-Kutta-Fehlberg. Los resultados de ambos modelos se comparan con datos experimentales.

### FUNDAMENTOS

La figura 1 muestra un esquema del sistema de drenado de un líquido contenido en un tanque de base plana conectado a un tubo de diámetro y longitud conocida. Inicialmente, el líquido llena el tubo y el tanque; luego el líquido se deja caer libremente sin desalojar el tubo.

#### Balance de materia en el tanque

Del balance de materia en el tanque, obtenemos la variación del nivel del líquido en función del tiempo:

$$\frac{dH}{dt} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \quad (1)$$

Separando variables, integramos la ecuación(1); obtenemos:

$$t = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \int_{H_f}^{H_0} \frac{dH}{v} \quad (2)$$

El término del lado derecho se integra por partes y se obtiene:

$$t = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \left[ \frac{H_0}{v_0} - \frac{H_f}{v_f} + \int_{v_f}^{v_0} \frac{H}{v^2} dv \right] \quad (3)$$

En esta última ecuación, se supone que el líquido es instantáneamente acelerado hasta

alcanzar la velocidad  $v_0$  el cual es diferente de cero.

### Balance de energía mecánica en estado pseudoestacionario

Aplicando la ecuación de la energía mecánica entre la superficie libre del líquido y el extremo de salida en el tubo, obtenemos la ecuación (4):

$$\alpha \frac{v^2}{2g_c} + Lw_f = \frac{g}{g_c}(H + L) \quad (4)$$

La energía perdida por efectos de fricción se estiman a partir de la ecuación (5), donde se incluye el factor de contracción:

$$Lw_f = f_D \frac{Lv^2}{2g_c d} + K_c \frac{v^2}{2g_c} \quad (5)$$

La combinación de las ecuaciones (4) y (5) da como resultado la ecuación (6):

$$F(v) = (\alpha + f_D \frac{L}{d} + K_c)v^2 - 2g(H + L) = 0 \quad (6)$$

A partir de la ecuación (5), se determina la velocidad del líquido en el tubo para cualquier altura de nivel del líquido en el tanque. Como el factor de fricción depende de la velocidad, la solución de la ecuación (5) se debe realizar a través de un procedimiento iterativo.

El factor  $\alpha$  toma el valor de 1 en régimen turbulento y 0,5 para régimen laminar. El factor de fricción  $f_D$  en régimen turbulento se calcula de la ecuación de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f_D}} = 1.14 - 2 \text{Log} \left( \frac{9.34}{\text{Re} \sqrt{f_D}} + \frac{\epsilon}{d} \right) \quad (7)$$

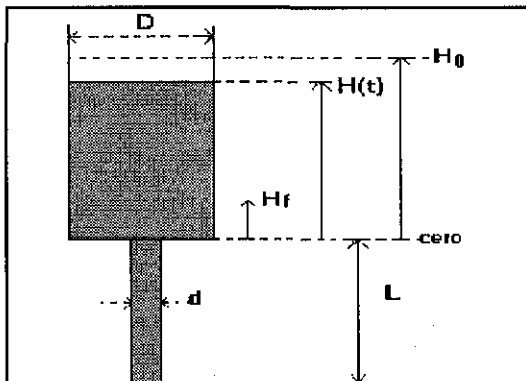


Figura N°1: Esquema del sistema de drenado de un líquido desde el tanque de base plana

### Ecuación de la cantidad de movimiento en estado no estacionario

Haciendo un balance de cantidad de movimiento entre los extremos del tubo, obtenemos:

$$\frac{d(vm)}{dt} = \rho_1 v_1^2 - \rho_2 v_2^2 + P_1 S_1 - P_2 S_2 - F + mg \quad (8)$$

Donde:  $v_1 = v_2$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

$S_1 = S_2 = (\pi/4)d^2$ .

$P_1 =$  Presión atmosférica +  $\rho gH$ .

$P_2 =$  Presión atmosférica.

$m = \rho(\pi/4)d^2 L =$  masa de líquido.

$F =$  Fuerzas de fricción sobre las paredes del tubo + Fuerzas de fricción en la contracción + Fuerzas de fricción en la expansión.

$$F = (\pi d L) \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{f_D}{4} + K_c \left( \frac{\pi}{4} d^2 \right) \frac{1}{2} \rho v^2 + K_e \left( \frac{\pi}{4} d^2 \right) \frac{1}{2} \rho v^2$$

Reemplazando todas estas relaciones en la ecuación (8), obtenemos después de acomodar:

$$\frac{dv}{dt} = g \frac{(H+L)}{L} - \frac{v^2}{2} \left( \frac{f_D L}{d} + K_c + K_e \right) \quad (9)$$

Los factores de contracción y de expansión dependen de la geometría del sistema. Se calculan como sigue:

$$K_c = 0,45 \left( 1 - \frac{d^2}{D^2} \right) \quad K_e = \left( 1 - \frac{d^2}{D^2} \right)^2 \quad (10)$$

En nuestro caso normalmente la relación  $d/D$  es  $\ll 1$ , luego  $K_c = 0.45$  y  $K_e = 1$ .

### Solución de las ecuaciones de balance

#### Modelo pseudoestacionario

El término  $(H/v^2)$  de la ecuación (3) se obtiene de la ecuación (6); reemplazando obtenemos finalmente:

$$t = \left( \frac{D}{d} \right)^2 \left[ \frac{H_0 + L}{v_0} - \frac{H_f + L}{v_f} + \frac{\alpha + K_c}{2g} (v_0 - v_f) \right] + \left( \frac{D}{d} \right)^2 \left[ \frac{L \mu}{2g d^2 \rho} \int_{\text{Re}_f}^{\text{Re}_0} f_D d \text{Re} \right] \quad (11)$$

La integral del lado derecho de la ecuación (11) se calcula con el método de la cuadratura de Gauss de 15 puntos. Las velocidades requeridas en la ecuación (11) se calculan de la ecuación (6) con el método de Newton-Raphson.

### Modelo de estado no estacionario

El modelo de estado no estacionario está constituido por las ecuaciones diferenciales ordinarias (1) y (9). Estas ecuaciones se resuelven con la condición inicial de  $t=0$   $v=0$  y  $H=H_0$ .

Dado que es muy difícil obtener una solución analítica del modelo de estado no estacionario, es que se adopta un método numérico para integrar las ecuaciones diferenciales. En este trabajo se utiliza el método de Runge-Kutta-Fehlberg(RKF). Utilizando diferencias finitas, las ecuaciones (1) y (9) se expresan como sigue:

$$H_{i+1} = H_i + g(v)\Delta t \quad (12)$$

$$v_{i+1} = v_i + \phi(v, H)\Delta t \quad (13)$$

La función  $g(v)$  está dada por el lado derecho de la ecuación(1). La función  $\phi(v,H)$  se calcula como sigue:

$$\phi(v, H) = mk_1 + nk_3 + pk_4 + qk_5 + rk_6 \quad (14)$$

Donde las constantes  $m, n, p, q, r$  están dados por el método de RKF, y las funciones  $k_1, k_3, k_4, k_5$  y  $k_6$  corresponden al lado derecho de la ecuación (9).

### DATOS EXPERIMENTALES

El equipo experimental consiste en un cilindro de base plana que reposa sobre una estructura metálica; un tubo de vidrio se encuentra acoplado al lado del cilindro, el cual permite controlar el nivel del líquido en el tanque; en la base del tanque se encuentra una conexión roscada para unir tubos de vidrio de diferentes diámetros y longitudes.

El tubo que controla el nivel del líquido es marcado en intervalos de 2 centímetros. Inicialmente, el líquido llena el tanque y el tubo hasta una altura ( $H_0$ ) medida desde la base del tanque. El líquido se deja caer libremente y se lee el tiempo cada 2 centímetros, con un cronómetro digital de precisión de 1 centésimo de segundo. El tiempo final de drenado corresponde a

una altura final( $H_f$ ), medido a partir de la base del tanque, y por encima del punto donde está conectado el tubo que controla el nivel del líquido en el tanque.

Se realizaron 13 pruebas experimentales. La temperatura del agua fue de 21°C. Para los cálculos, la densidad y la viscosidad se tomó como 0,998 g/cm<sup>3</sup> y 0,01002 g/cm s, respectivamente.

La Tabla 1 muestra el tiempo final de drenado según las características de los tubos. Nótese que si bien la prueba 6 y 9 corresponden al mismo tubo, el tiempo final de drenado es ligeramente diferente debido a que la altura inicial y final del nivel de líquido en el tanque son diferentes en ambas pruebas. Se puede observar de la Tabla 1 que el tiempo de drenado varía inversamente proporcional al diámetro del tubo. Por otro lado, no se observa relación entre la longitud del tubo y el tiempo final de drenado.

### RESULTADOS DE LOS CÁLCULOS

Los cálculos se realizaron considerando  $K_0=0$ ,  $K_0=1$  y  $\alpha = 1$ .

Tabla 1: Tiempo experimental de drenado.

Prueba exp.	Características del tubo		Altura de líquido		Tiempo promedio, s
	Longitud cm	Diámetro, cm	H <sub>0</sub> , cm	H <sub>f</sub> , cm	
1	30,1	0,69	32,7	6,7	64,89
2	38,8	0,69	32,7	6,7	64,11
3	45,4	0,69	32,7	6,7	62,07
4	22,7	0,79	32,7	6,7	47,95
5	22,5	0,53	32,7	6,7	105,19
6	22,5	0,70	32,7	6,7	60,45
7	22,5	0,79	33,5	7,5	46,37
8	22,5	0,52	33,5	7,5	102,28
9	22,5	0,70	33,5	7,5	57,81
10	34,2	0,55	33,5	7,5	91,7
11	33,5	0,70	33,5	7,5	78,58
12	30,1	0,70	33,5	7,5	62,76
13	30,1	0,79	33,5	7,5	44,54

La Tabla 2 muestra el tiempo final de drenado calculado con el modelo pseudoestacionario(SE) y el modelo de estado no estacionario(NoE). En el caso del modelo NoE, la integración se realizó para un tamaño de paso  $\Delta t=0.1$  y para  $\Delta t$  variable pero menor que 0,1.

De la Tabla 2 se observa que el tiempo final de drenado calculado con el modelo SE y el modelo NoE( $\Delta t=0.1$ ) dan los mismos resultados. Si el tamaño de paso en la integración numérica se reduce( $<0,1$ ), el tiempo final de drenado calculado por el modelo NoE coincide con el valor experimental, como puede observarse en las pruebas 1, 2, 3, 4, 7 y 12.

**Tabla 2:** Tiempo de drenado según Modelos SE y NoE

Prueba	Modelo SE		Modelo NoE( $\Delta=0.1$ )		Modelo NoE	
	seg	Hf(cms)	seg	Hf(cms)	$\Delta$	seg
1	62,42	6,71	62,7	6,71	0,025	64,57
2	61,81	6,7	62,2	6,7	0,025	64,42
3	61,46	6,71	61,9	6,7	0,05	62,7
4	46,23	6,73	46,4	6,71	0,025	48,02
5	117,6	6,72	117,7	6,7	0,015	120,3
6	61,11	6,71	61,3	6,7	0,025	62,8
7	45,78	7,55	45,9	7,52	0,05	46,45
8	121,748	7,51	121,9	7,5	0,01	126,1
9	60,48	7,53	60,6	7,5	0,01	65,49
10	106,73	7,5	107	7,5	0,01	112,7
11	59,56	7,5	59,9	7,5	0,01	66,36
12	59,79	7,5	60,1	7,5	0,025	61,97
13	44,98	7,5	45,3	7,5	0,01	51,75

**Tabla 3:** Tiempo de drenado según diámetro del tubo.

Prueba	Longitud	Diámetro	Experim.	Modelo SE		M.NoE(0.1)		M.NoE(<0.1)	
				seg	seg	seg	seg	seg	seg
8	22,5	0,52	102,28	121,748	121,9	126,07			
5	22,5	0,53	105,19	117,6	117,7	120,33			
10	34,2	0,55	91,7	106,73	107	112,73			
1	30,1	0,69	64,89	62,42	62,7	64,57			
2	38,8	0,69	64,11	61,81	62,2	64,42			
3	45,4	0,69	62,07	61,46	61,9	62,7			
6	22,5	0,70	60,45	61,11	61,3	62,8			
9	22,5	0,70	57,81	60,48	60,6	65,49			
11	33,5	0,70	78,58	59,56	59,9	66,36			
12	30,1	0,70	62,76	59,79	60,1	61,97			
4	22,7	0,79	47,95	46,23	46,4	48,02			
7	22,5	0,79	46,37	45,78	45,9	46,45			
13	30,1	0,79	44,54	44,98	45,3	51,75			

La Tabla 3 presenta el tiempo final de drenado experimental y los calculados por los modelos SE y NoE, ordenados según el diámetro de los tubos. La tabla muestra que ambos modelos, SE y NoE, fallan para cuando el diámetro del tubo es alrededor de 0,5 cms, como es el caso de las pruebas 5,8 y 10. La misma Tabla 3 indica que el modelo NoE predice un tiempo final de drenado mayor cuando se reduce el tamaño del paso(<0,1) en la integración numérica del método de RKF.

**Tabla 4:** Desviación porcentual entre el valor experimental y los calculados de modelos NoE y SE

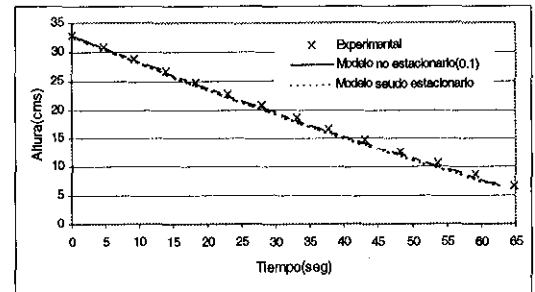
Prueba	Diámetro	Experim.	Modelo SE		
			seg	%	M.NoE(<0.1)
N°	cms	seg	%	%	%
8	0,52	102,28	-19,0	-19,2	-23,3
5	0,53	105,19	-11,8	-11,9	-14,4
10	0,55	91,7	-16,4	-16,7	-22,9
1	0,69	64,89	3,8	3,4	0,5
2	0,69	64,11	3,6	3,0	-0,5
3	0,69	62,07	1,0	0,3	-1,0
6	0,70	60,45	-1,1	-1,4	-3,9
9	0,70	57,81	-4,6	-4,8	-13,3
11	0,70	78,58	24,2	23,8	15,6
12	0,70	62,76	4,7	4,2	1,3
4	0,79	47,95	3,6	3,2	-0,1
7	0,79	46,37	1,3	1,0	-0,2
13	0,79	44,54	-1,0	-1,7	-16,2

La Tabla 4 muestra la desviación porcentual entre el valor experimental y los valores calculados.

La desviación porcentual se calcula como sigue:

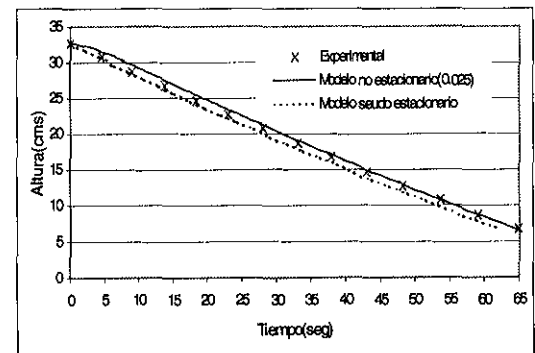
$$\% \text{desviación} = 100 \left( \frac{t_{\text{exp}} - t_{\text{calc}}}{t_{\text{exp}}} \right)$$

Se nota de la tabla 4 que las desviaciones son grandes para tubos de diámetros de 0,5 cms con cualquiera de los modelos. Para diámetros mayores a 0,5 cms y sin considerar las pruebas 9, 11 y 13, las desviaciones porcentuales son del orden de  $\pm 1\%$  según el modelo NoE cuando  $\Delta t = < 0.1$ . El análisis acerca del tiempo final de drenado, es solo un análisis puntual. En realidad debe examinarse el perfil de drenado para observar el comportamiento de los modelos, SE y NoE. El perfil de drenado es una gráfica de altura de líquido(H) frente al tiempo.



**Figura 2:** Perfil de drenado para la Prueba 1( $\Delta t=0.1$ )

Para la Prueba 1, las figuras 2 y 3 muestran el perfil de drenado experimental y los calculados por los modelos SE y NoE. Para un tamaño de paso  $\Delta t=0.1$ , el modelo NoE predice los mismos valores que el modelo SE, al punto de que ambas líneas que representan a cada modelo se confunden en una sola; como se ve en



**Figura 3:** Perfil de drenado para la Prueba 1( $\Delta t=0.025$ )

la figura 2. Por otro lado, en la figura 3 para un tamaño de paso  $\Delta t = 0.025$ , el modelo NoE predice un perfil que en los primeros instantes varía lentamente, y luego disminuye en forma progresiva. Nótese que hacia el final, la línea de valores calculados ajusta bien a los datos experimentales, característica que se observa en la mayoría de la pruebas experimentales, excepto la prueba 11.

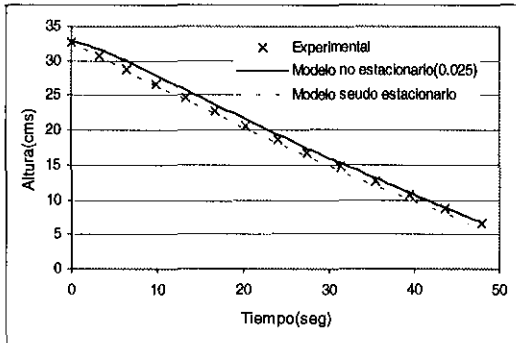


Figura 4: Perfil de drenado para la Prueba 4 ( $\Delta t = 0,025$ )

La figura 4 corresponde a los resultados de la Prueba 4 cuando el tamaño de paso es de 0,025 segundos en los cálculos con el modelo NoE. Nótese que para cumplir la condición en  $t=0$  la derivada  $dH/dt = 0$ , el perfil de drenado se curva en los primeros instantes. La pendiente del perfil de drenado varía al inicio; posteriormente la forma casi lineal del perfil indica una pendiente menos variable.

Las figuras 5 y 6 corresponden a los resultados de las pruebas 5 y 11 respectivamente. Para ambas pruebas, ninguno de los modelos predice satisfactoriamente el perfil de drenado.

Una diferencia a resaltar entre los modelos, SE y NoE, lo constituye la predicción de la velocidad del líquido en el tubo. El modelo SE predice que el líquido es acelerado instantáneamente en un intervalo  $\Delta H$  bastante corto, de tal manera que se puede considerar que para la altura inicial  $H_0$ , la velocidad del líquido es diferente de cero. Para todas las pruebas ex-

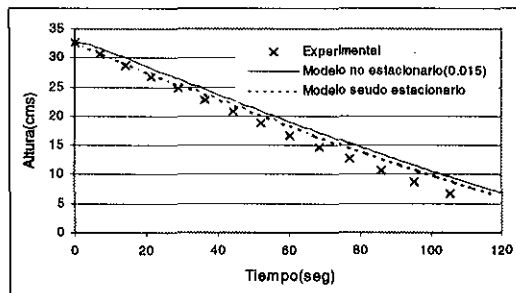


Figura 5: Perfil de drenado para la Prueba 5 ( $\Delta t = 0,015$ )

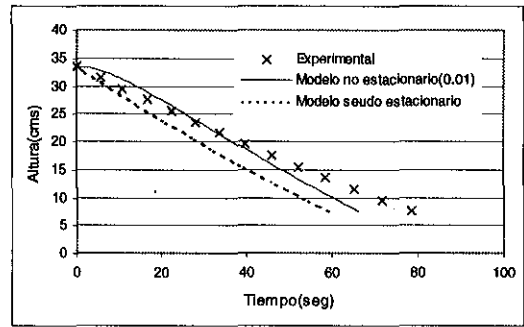


Figura 6: Perfil de drenado para la Prueba 11 ( $\Delta t = 0,01$ )

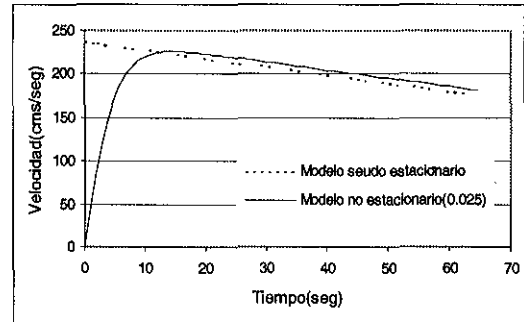


Figura 7: Velocidad calculada con los modelos SE y NOE ( $\Delta t = 0,025$ ), Prueba 1

perimentales, el modelo SE predice un régimen de flujo turbulento. En cambio, el modelo NoE da como resultado una velocidad que se incrementa desde cero hasta un valor máximo, y luego disminuye lentamente. Así se observa en las figuras 7 y 8, correspondiente a las pruebas 1 y 7 respectivamente.

En todas las pruebas el tiempo a la cual la velocidad es máxima aumenta cuando el tamaño de paso utilizado en el método de RKF disminuye. Así, cuando el tamaño de paso es alrededor de 0,1 segundos, se halla que la máxima velocidad ocurre en los primeros 6 segundos. Si el tamaño de paso es menor a 0,1, la velocidad máxima ocurre alrededor o más allá de los 10 segundos. El modelo NoE predice un cambio de régimen laminar a tur-

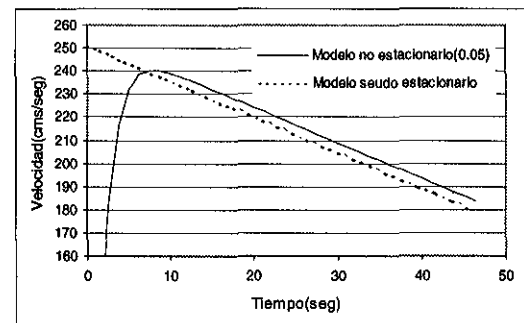


Figura 8: Velocidad calculada con los modelos SE y NOE ( $\Delta t = 0,05$ ), Prueba 7

bulento en los primeros instantes. Para régimen laminar, el factor de fricción se calcula como  $f_D = 64/Re$ .

### CONCLUSIONES

La solución numérica del modelo de estado no estacionario (NoE) con un tamaño de paso igual a 0,1 segundos produce los mismos resultados que el modelo pseudoestacionario (SE). Para un tamaño de paso menor a 0,05 segundos, el modelo NoE predice, en algunos casos, un tiempo final de drenado con una desviación de  $\pm 1\%$  respecto del valor experimental.

La comparación con los resultados experimentales muestra que ambos modelos, NoE y SE, fallan para cuando el diámetro del tubo es alrededor de 0,5 cms.

Para estimaciones rápidas, el tiempo final de drenado puede calcularse con el modelo pseudoestacionario (SE).

### NOMENCLATURA

- D = Diámetro del tanque.  
d = Diámetro del tubo.  
 $f_D$  = Factor de fricción de Darcy.  
g = Aceleración de la gravedad, 981 cm/s<sup>2</sup>.  
 $g_0$  = Factor de conversión de unidades de fuerza a unidades de masa, 1 N m/Kg s<sup>2</sup>.  
H = altura de la superficie libre del líquido medido desde la base del tanque.  
 $H_0, H_i$  = Alturas inicial y final respectivamente.  
 $K_c$  = factor de pérdida de energía por contracción.  
 $K_e$  = factor de pérdida de energía por expansión.  
 $k_1, k_3, k_4, k_5, k_6$  = funciones en la ecuación 14.  
L = longitud del tubo.  
m = 825/27648 constante de RKF en la ecuación 14.

- n = 18575/48384 constante de RKF en la ecuación 14.  
p = 13525/55296 constante de RKF en la ecuación 14.  
q = 277/14336 constante de RKF en la ecuación 14.  
r = 1/4 constante de RKF en la ecuación 14.  
Re = número de Reynolds.  
S = sección transversal del tubo.  
t = tiempo de drenado.  
v = velocidad promedio del líquido en el tubo.  
 $v_0$  = velocidades calculada para  $H=H_0$ .  
 $v_i$  = velocidades calculada para  $H=H_i$ .  
 $\alpha$  = factor de corrección.  
 $\phi$  = función de Runge-Kutta- Fehlberg.  
 $\mu$  = viscosidad del líquido.  
 $\rho$  = densidad del líquido.  
 $\epsilon$  = rugosidad absoluta del tubo.

### BIBLIOGRAFÍA

- [1] Armijo J., "Tiempo de escurrimiento de un tanque con un tubo de salida: Nuevo método de cálculo", p 57; *Rev. Per. Quim. Ing. Quim*, 2 1 (1999).
- [2] Chapra S., Raymond Canale, *Métodos Numéricos para Ingenieros*, p. 714-756, McGraw Hill Interamericana Editores S.A., 1999.
- [3] Crosby J.E., Experimentos sobre Fenómenos de Transporte en las Operaciones Unitarias de la Industria Química; Edit Hispano Americana, 1968, p 55.
- [4] Fox R., A. McDonald, *Introduction to Fluid Mechanics*; J.Wiley & Sons 1978, p 364.
- [5] Shames H.I., *Mecánica de Fluidos*; McGraw Hill Interamericana S.A. 1995, p332.