

LAS ESPIRALES, FUNCIONES BESSEL Y SISTEMAS OSCILANTES

W. Gil-Benitez*

Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Química e Ingeniería Química
Departamento de Analisis y Diseño de Procesos
Av. Venezuela s/n - Ciudad Universitaria UNMSM - Lima - Peru

Abstract-It is shown a mathematics analysis that link spirals, differential equations of second order of the Bessel function type and the oscillant systems with constant and variable frequency. It is found that the oscillant systems are consequents to a spiral mathematical functions and Bessel is only some of its varieties. Consequently is shown an exact solution of the Bessel equations which does not require tables. The math model it is a tool which will be used to simulate oscillant phenomena with variable frequency that is show up in solid-liquid interface, adsorption, crystallization, condensation and solidification.

Key words: model, mathematics, spirals, Bessel, phenomena, oscillant, interphase, cristallization

Resumen-Se realiza un análisis matemático que demuestra la relación existente entre las espirales, las ecuaciones diferenciales de segundo orden del tipo de las funciones Bessel y de los sistemas oscilantes con frecuencia constante y variable. Se encuentra que los sistemas oscilantes son consecuentes a funciones matemáticas de forma de espiral y que una de sus variedades son las funciones Bessel. Por consiguiente se presenta en este trabajo una solución exacta a las ecuaciones Bessel cual no requiere de las clásicas tablas. El modelo matemático obtenido es una herramienta que podrá emplearse en la simulación de los fenómenos oscilantes con frecuencia variable cuales se presentan en las interfases sólido-líquido, adsorción, cristalización, condensación y solidificación.

Palabras clave: modelo, matemática, espirales, Bessel, fenómenos, oscilantes, interfase, cristalización

INTRODUCCION

La Ingeniería Química desde sus inicios ha hecho uso intensivo de las herramientas matemáticas para solucionar los complejos problemas de transferencia de momentos, calor y masa.

Un sector de estas herramientas son las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes variables tales como las ecuaciones de Euler y Cauchy y las funciones Bessel, cuales se solucionan empleando el método de las aproximaciones numéricas.

El propósito del presente trabajo es presentar una nueva perspectiva para la

enseñanza de estas interesantes funciones matemáticas así como la de lograr un mejor entendimiento de los fenómenos oscilantes ocurientes en los fenómenos físicos y químicos.

LAS ESPIRALES CILÍNDRICAS

Son las espirales de mayor simplicidad, en la **Fig. 1** se muestra un ploteo tridimensional en coordenadas rectangulares, donde:

$$x = r \cdot \cos(\varnothing) \quad (1-a)$$

$$y = r \cdot \sen(\varnothing) \quad (1-b)$$

$$z = z \quad (1-c)$$

* E-mail : decanoqui@unmsm.edu.pe

Fig. N°1 Ploteo Superficial de una Espiral Cilíndrica.

Las ecuaciones paramétricas serán : $N = 60$; $i = 0 \dots N-1$

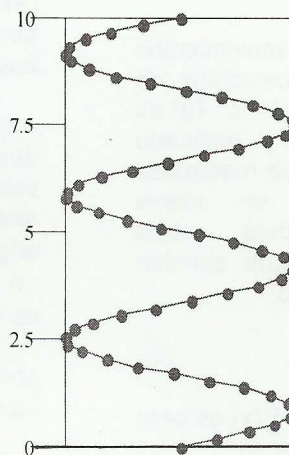
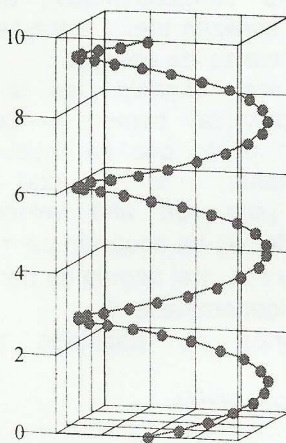
$z = i \cdot [6\pi / (N-1)]$

$R := 1$; $X_i := R \cdot \cos(\theta_i)$; $Y_i := R \cdot \sin(\theta_i)$; $Z_i := \frac{i}{N-1} \cdot 10$

Las Proyecciones axonométricas, lateral y de fondo serán :

ESPIRAL CILINDRICA

PROYECCION LATERAL

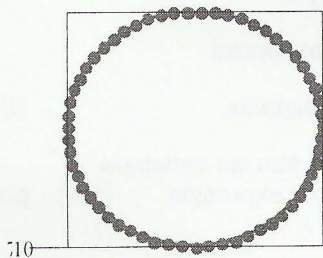


X , Y , Z

X , Z

Proyección en el Plano x-z

VISTA DE PLANTA



X , Y

Debe observarse que las funciones sinusoidales son proyecciones o vistas laterales de una función espiral principal en este caso de una espiral cilíndrica(r, \emptyset, z) en los planos x-z e y-z, y la vista de planta de la

misma espiral es una circunferencia que para propósitos didácticos sirve de base para explicar la repitencia de las funciones trigonométricas con ángulos mayores de 360° . Así por ejemplo, $\text{sen}(420^\circ) = \text{sen}(60^\circ)$.

LAS ESPIRALES CILÍNDRICAS AMORTIGUADAS CON FRECUENCIA CONSTANTE

En la Fig. 2 se presenta un ploteo tridimensional de una función espiral amortiguada. Nuevamente se observa que las proyecciones a los planos x-z e y-z son funciones sinusoidales amortiguadas que aparecen frecuentemente en los primeros textos de física para explicar los movimientos oscilatorios [1].

Por su naturaleza los movimientos oscilatorios son cambios secuenciales de energía potencial y energía cinética. Tal es el caso del sistema oscilatorio unificado Masa - Resorte o vibraciones de materiales rígidos o de líquidos en vasos comunicantes entre muchos otros fenómenos. Las ecuaciones que simulan dichos movimientos son del tipo:

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = P(x) \quad (2)$$

donde: a y b son constantes y P(x) es cero o una función dependiente de x.

La solución general de esta ecuación diferencial considerando P(x)=0, es:

$$y = C_1 \cdot \exp(r_1 \cdot x) + C_2 \cdot \exp(r_2 \cdot x) \quad (3-a)$$

si se diese el caso de que r_1 y r_2 fuesen imaginarias, la solución tendría la forma:

$$y = \exp(-\alpha \cdot x) [A \cdot \cos(\beta \cdot x) + B \cdot \sin(\beta \cdot x)] \quad (3-b)$$

Para los estudiantes debe ser mas comprensible la razón por la que la funciones sinusoidales (coseno o seno) que se obtienen de las proyecciones de la espiral sobre los planos x-z e y-z modelan ambos e independientemente los movimientos oscilantes.

En el gráfico mostrado debe también observarse que aunque la función es exponencialmente amortiguada, la frecuencia de oscilación es constante y puede evaluarse de la ecuación (2)

$$f = \sqrt{b - (a/2)^2} \quad (4)$$

a vista de planta de esta función es una espiral plana Fig. 2.

LAS ESPIRALES CON FRECUENCIA VARIABLE

Las espirales son funciones que han sido renuentes al tratamiento matemático, sin embargo se presentan en la naturaleza con bastante periodicidad sea en los fenómenos cósmicos, físicos, biológicos y químicos. Se puede considerar que ello se debe la estrecha relación con los cambios alternados de energía potencial y cinética (Primer Principio Termodinámico), estos fenómenos se analizan mejor a través de balances diferenciales de energía.

La espiral mas conocida es la de Arquímedes, definida como la curva descrita por un punto que se mueve a velocidad constante v y que gira alrededor del polo con una velocidad angular constante ω . La ecuación es $r = a \cdot \theta$ donde $a = v / \omega$ y el ángulo de barrido es en este caso denominado θ .

Las ecuaciones de espirales más conocidas son:

La espiral de Arquímedes

$$r \cdot \theta^{-1} = \text{constante} \quad (5-1)$$

La espiral Hiperbólica tiene la forma

$$r \cdot \theta = \text{constante} \quad (5-2)$$

La espiral Logarítmica

$$r \cdot e^{-k \theta} = \text{constante} \quad (5-3)$$

donde $k = \text{ctg } a$

La espiral exponencial

$$r \cdot \theta^n = \text{constante} \quad (5-4)$$

donde r y θ son las variables.

La última expresión (5-4) puede escribirse así:

$$r = \text{constante} \cdot \theta^{-n}$$

Si consideramos que el exponente n sea una raíz imaginaria de la forma $-\alpha \pm i \cdot \beta$; la expresión se transformaría en la forma:

$$y = \text{const.} \exp [(-\alpha \pm i \cdot \beta) \cdot x] \quad (6-1)$$

$$y = \text{const.} \exp(-\alpha \cdot x) \cdot \exp(\pm i \cdot \beta \cdot x) \quad (6-2)$$

$$y_1 = \text{const.} \exp(-\alpha \cdot x) \cdot (\cos(\beta \cdot x) - i \sin(\beta \cdot x)) \quad (6-3)$$

$$y_2 = \text{const.} \exp(-\alpha \cdot x) \cdot (\cos(\beta \cdot x) + i \sin(\beta \cdot x)) \quad (6-4)$$

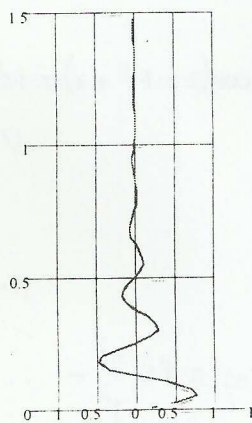
Fig N°2 Ploteo de una Espiral con Tres Vectores x- y- z

Número de puntos a plotear : $N = 60$
 Definiciones de los vectores x, y, z

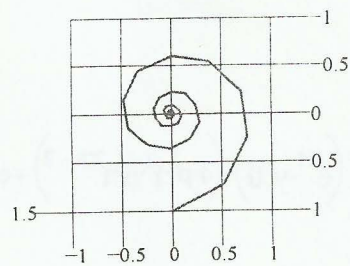
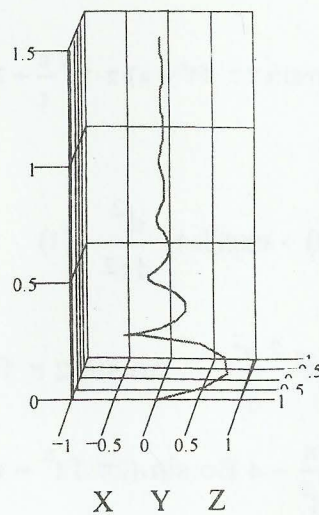
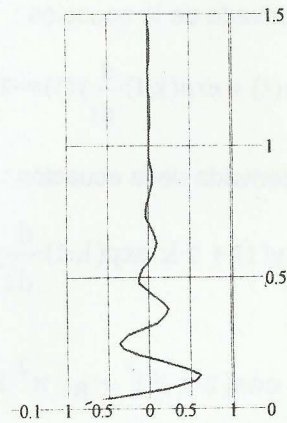
$$i := 0..N - 1$$

$$X_i := \cos\left(\frac{i}{N} \cdot 12 \cdot \pi\right) \cdot e^{-0.1 \cdot i} \quad Y_i := \sin\left(\frac{i}{N} \cdot 12 \cdot \pi\right) \cdot e^{-0.1 \cdot i} \quad Z_i = \frac{i}{N} \cdot 1.5$$

PROY. EN PLANO Y-Z



PROY. EN PLANO X-Z



PROYECCION SOBRE X-Y

INDUCCION A LA ECUACION GENERAL A PARTIR DE UNA SOLUCION

La ecuación diferencial que simula los fenómenos oscilantes amortiguados con frecuencia variable es la siguiente :

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + \left[2k - \frac{(n-1)}{t} \right] \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + \left[\frac{4\pi^2 \cdot f^2 \cdot n^2 \cdot t^{(2n-1)} + k^2 \cdot t - k \cdot (n-1)}{t} \right] \cdot y(t) = 0 \quad (7-1)$$

Donde :

t es variable dependiente de y
k, n, f y π son constantes.

La solución de la ecuación tiene la forma :

$$y(t) = e^{-kt} [A_0 \cos(2\pi f t^n + a) + B_0 \sin(2\pi f t^n + a)] \quad (7-2)$$

Demostración :

La primera derivada de la ecuación :

$$k \cdot \exp(k \cdot t) \cdot y(t) + \exp(k \cdot t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) = -2 \cdot A_0 \cdot \sin(2\pi f t^n + a) \cdot \pi \cdot f t^n \cdot \frac{n}{t} + 2 \cdot B_0 \cdot \cos(2\pi f t^n + a) \cdot \pi \cdot f t^n \cdot \frac{n}{t} \quad (7-3)$$

La segunda derivada de la ecuación :

$$\begin{aligned} k^2 \cdot \exp(k \cdot t) \cdot y(t) + 2 \cdot k \cdot \exp(k \cdot t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) + \exp(k \cdot t) \cdot \frac{d^2}{dt^2} y(t) \\ = -4 A_0 \cos(2\pi f t^n + a) \pi^2 f^2 t^{2n-2} \frac{n^2}{t^2} - 2 A_0 \sin(2\pi f t^n + a) \pi f t^n \frac{n^2}{t^2} + \dots \\ + 2 A_0 \sin(2\pi f t^n + a) \pi f t^n \frac{n}{t^2} - 4 B_0 \sin(2\pi f t^n + a) \pi^2 f^2 t^{2n-2} \frac{n^2}{t^2} + \dots \\ + 2 B_0 \cos(2\pi f t^n + a) \pi f t^n \frac{n}{t^2} - 2 B_0 \cos(2\pi f t^n + a) \pi f t^n \frac{n}{t^2} \end{aligned} \quad (7-4)$$

Reemplazando (7-3) y (7-4) en (7-1) :

$$\begin{aligned} \exp(k \cdot t) \cdot \left(k^2 \cdot y(t) + 2 \cdot k \cdot \frac{d}{dt} y(t) + \frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + \left(e^{kt} \cdot y(t) \right) \cdot \left(4\pi^2 \cdot f^2 \cdot n^2 \cdot t^{2n-2} \right) + \exp(k \cdot t) \cdot \left(\frac{k y(t) + \frac{d}{dt} y(t)}{t} \right) \\ = \exp(k \cdot t) \cdot \left(k \cdot y(t) + \frac{d}{dt} y(t) \right) \cdot \frac{n}{t} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Simplificando:

$$\left(k^2 \cdot y(t) + 2 \cdot k \cdot \frac{d}{dt} y(t) + \frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + y(t) \cdot \left(4 \pi^2 \cdot f^2 \cdot n^2 \cdot t^{2 \cdot n - 2} \right) + \left(\frac{k \cdot y(t) + \frac{d}{dt} y(t)}{t} \right) = \left(k \cdot y(t) + \frac{d}{dt} y(t) \right) \cdot \frac{n}{t} \quad (7.6)$$

Simplificando

$$\left(k^2 \cdot y(t) + 2 \cdot k \cdot \frac{d}{dt} y(t) + \frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + y(t) \cdot \left(4 \pi^2 \cdot f^2 \cdot n^2 \cdot t^{2 \cdot n - 2} \right) + \left(\frac{k \cdot y(t) + \frac{d}{dt} y(t)}{t} \right) - \left(k \cdot y(t) + \frac{d}{dt} y(t) \right) \cdot \frac{n}{t} = 0 \quad (7.7)$$

La ecuación final será entonces de la forma :

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + \left[2 \cdot k - \frac{(n-1)}{t} \right] \cdot \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + \left[\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot n^2 \cdot t^{(2 \cdot n - 1)} + k^2 \cdot t - k \cdot (n-1)}{t} \right] \cdot y(t) = 0 \quad (7.8)$$

DISCUSION

CASO 1 .- Cuando $n = 1$, la ecuación se transforma en segundo orden con coeficientes constantes (espiral amortiguada con frecuencia constante : Espiral de Arquímedes)

CASO 2 .- Cuando $n = 2$, la ecuación se transforma en una ecuación Bessel, siendo el valor del discriminante " p " = $k^2 t - k(n-1)$, el cual puede ser positivo, cero, negativo, entero (espiral amortiguada con frecuencia variable).

CASO 3 .- Cuando $n=1$ y $k = 0$, la ecuación se transforma en segundo orden no amortiguada (espiral cilíndrica de frecuencia constante)

CASO 4 .- Cuando $k = 0$ y $n \neq 1$, la ecuación se transforma en segundo orden no amortiguada (espiral cilíndrica de frecuencia variable) Cuando $n=0.5$ y $k \neq 0$ se tiene la espiral de Fermat.

REPRESENTACIONES FISICAS DEL FENOMENO OSCILATORIO

Del **CASO 1** . Casos típicos son los fenómenos oscilantes en circuitos eléctricos del sistema Resistencia, Inductancia y Capacitancia (R-L-C) [1,2].

En el campo químico puede representar la formación de microcristales en soluciones electrolíticas [6]. Ver **Fig. 2** y **gráfico N° 1**.

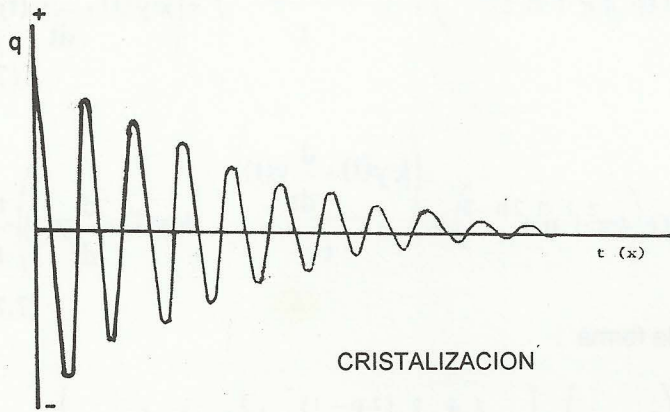
Del **CASO 2** . Se presentan en los problemas de transmisión de calor [5] en coordenadas cilíndricas, en Sistemas de Control Automatizado. Se presenta un ploteo tridimensional de la función en la **Fig. 3**. Obsérvese la variación de la frecuencia.

En Química se presenta en los fenómenos de adsorción de moléculas no polares y polares; en la superficie de electrodos metálicos en soluciones iónicas, Doble Capa Difusa de Gouy. El espaciamiento entre las capas moleculares adheridas se va incrementando debido a la disminución de la polarización inducida por la superficie sólida, por consiguiente el periodo (1/frecuencia) respecto a la perpendicular a la superficie sólida aumenta [6].

Del **CASO 3**. La Ecuación [1] de Schrödinger : $\psi''(x) + 8\pi m E / h \psi(x) = 0$. Proceso de cristalización de sales electrolíticas por inducción [6]

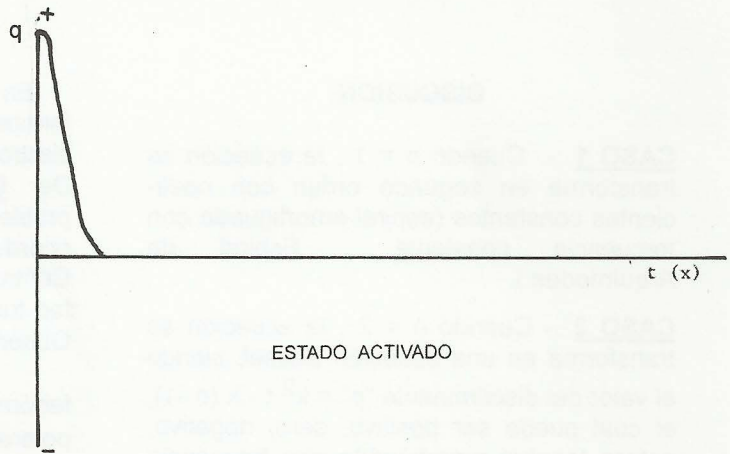
Del **CASO 4** . Las funciones son análogas al caso 2, las curvas son sinusoidales con frecuencia variable y amortiguadas. Se presenta un ploteo de la espiral con $n = 0.5$ y $k = -0.1$

Gráfico 1.



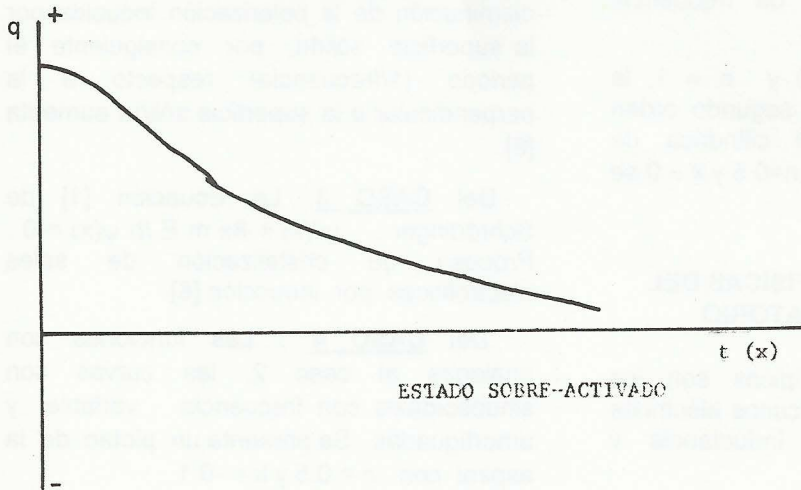
CRISTALIZACION

Gráfico 2.



ESTADO ACTIVADO

Gráfico 3. q carga eléctrica en cada capa iónica
 x alejamiento del electrodo



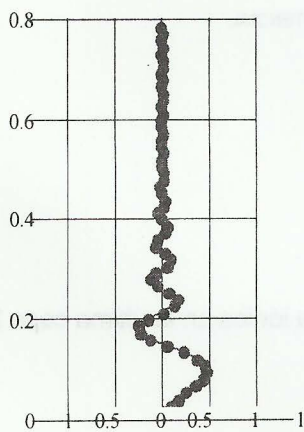
ESTADO SOBRE-ACTIVADO

Fig N°3 Ploteo de Espiral con $n = 2$

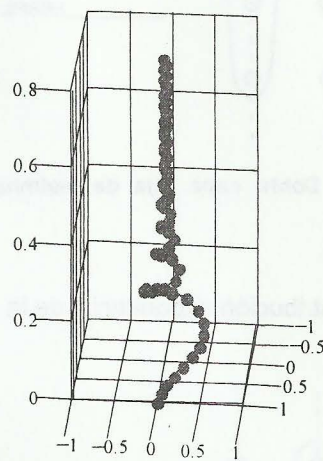
Entrar el número de puntos a plotear : $N = 60$
 Entrar las definiciones de los vectores x, y, z

$i := 0..N - 1$

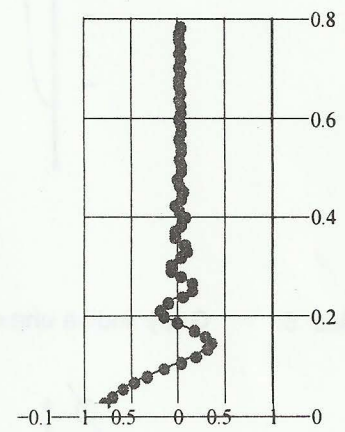
$$X_i := e^{-0.1 \cdot i} \cdot \cos\left[\left(\frac{i}{N} \cdot 3 \cdot \pi\right)^2\right] \quad Y_i := e^{-0.1 \cdot i} \cdot \sin\left[\left(\frac{i}{N} \cdot 3 \cdot \pi\right)^2\right] \quad Z_i := \frac{i}{N} \cdot 8$$



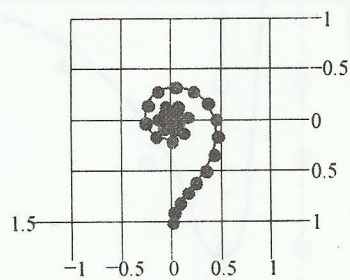
X Z



X Y Z



Y Z



X Y

Gráfico 4. Las cargas eléctricas se distribuyen alternada y sinusoidalmente

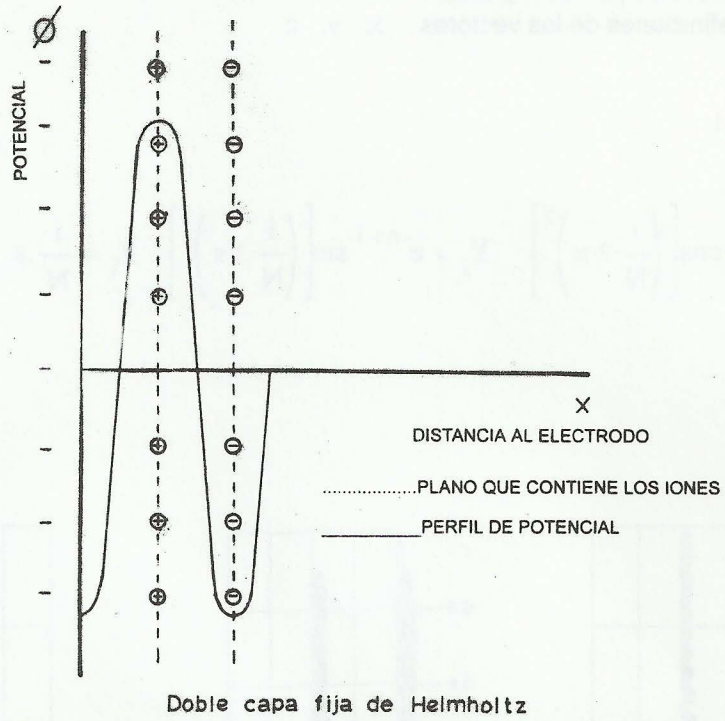


Gráfico 5. Gouy indica una distribución exponencial de la carga iónica en la última capa [7]

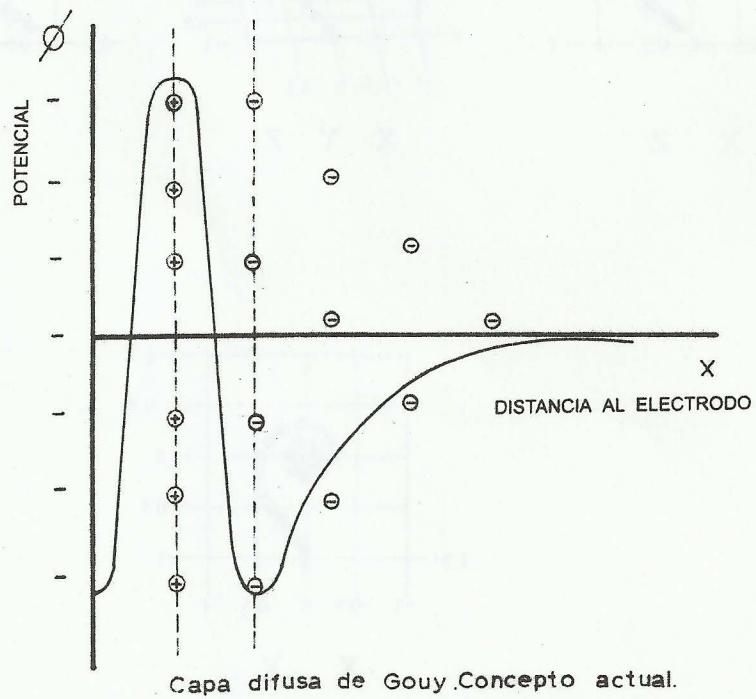


Gráfico 6.

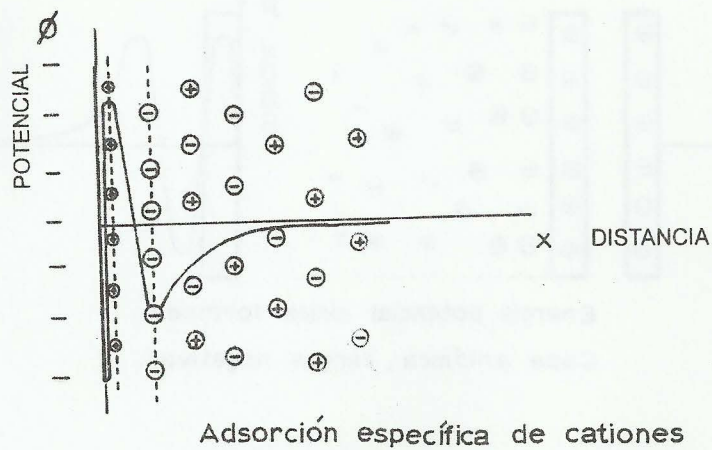
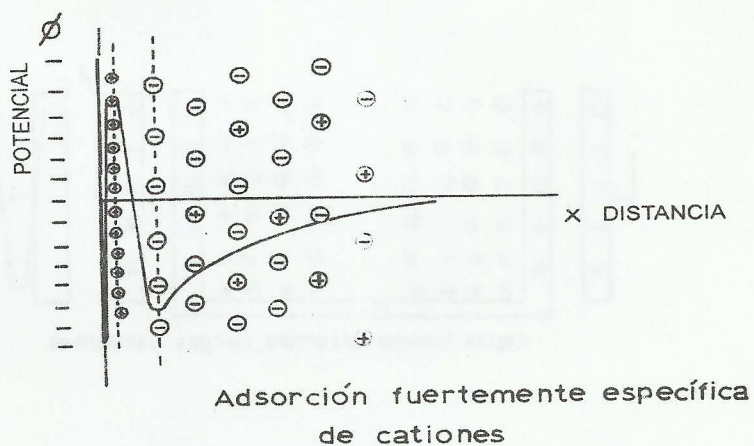


Gráfico 7.

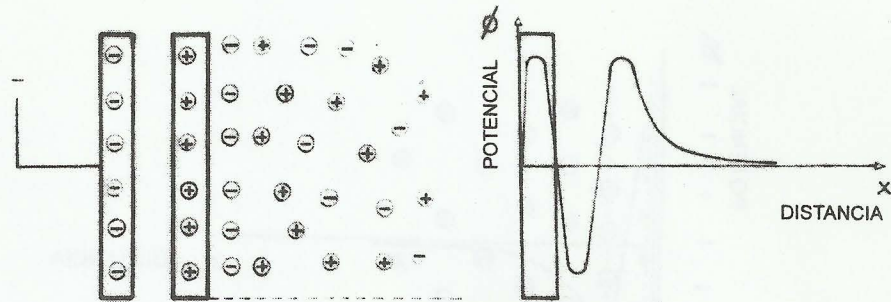


Gráfico 8.



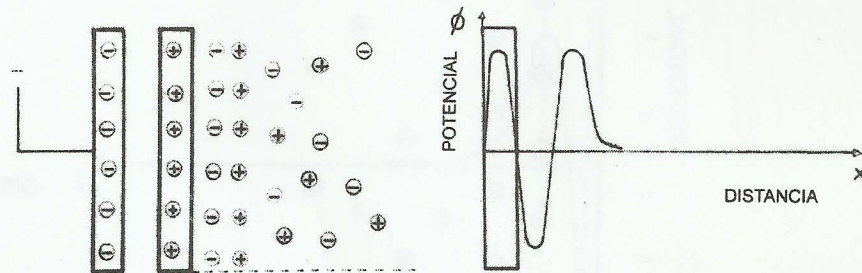
En los gráficos 6, 7 y 8 se presentan la distribución de los iones cuando existe adsorción y las propiedades del solvente cambia fuertemente debido a la inducción del campo eléctrico de la pared sólida. Obsérvese la variación de la frecuencia de las capas iónicas.

Gráfico 9.



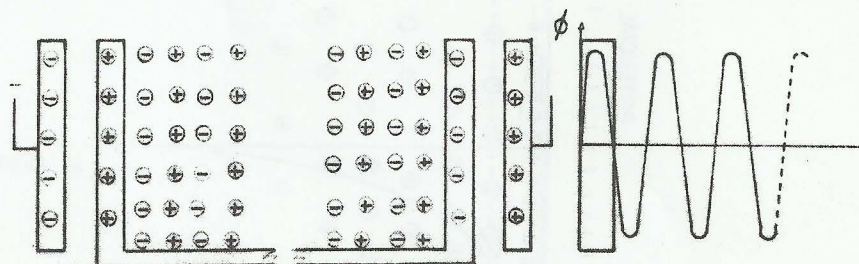
Energía potencial iónica formada.
Capa aniónica, cargas negativas.

Gráfico 10.



Energía potencial acumulada
Segunda capa iónica: cationes

Gráfico 11.



Capas iónicas alternas, cargas oscilantes.

Los gráficos 9, 10 y 11 representan la dinámica de formación de las capas iónicas inducidas por electrodos con cargas electrostáticas.

Fig N° 4 Ploteo de Espiral con $n = 0.5$

Entrar el número de puntos a plotear :

$N := 20$

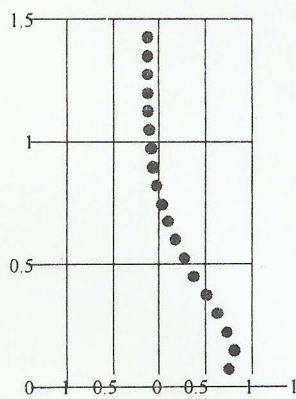
Entrar las definiciones de los vectores x, y, z

$i := 0..N - 1$

$$X_i := e^{-0.1 \cdot i} \cdot \cos\left[\left(\frac{i}{N} \cdot 6 \cdot \pi\right)^{0.5}\right]$$

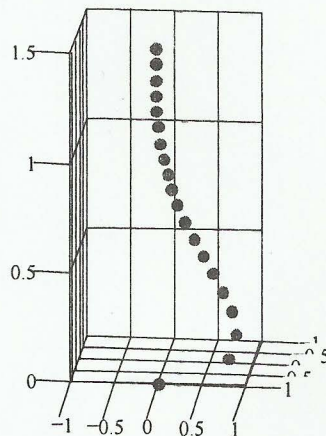
$$Y_i := e^{-0.1 \cdot i} \cdot \sin\left[\left(\frac{i}{N} \cdot 6 \cdot \pi\right)^{0.5}\right]$$

$$Z_i := \frac{i}{N} \cdot 1.5$$

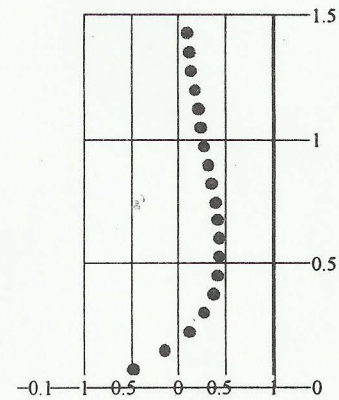


X Z

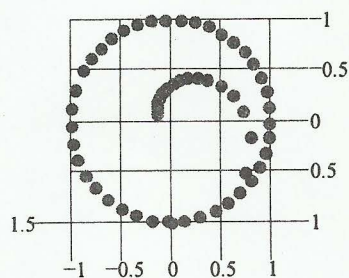
Vista de Planta :



X Y Z



Y Z



X Y

PROYECCION SOBRE X-Y

El ploteo de la ecuación 7.2, cuando $n = 0.5$ y $k = -0.1$, muestra una función espiralada de base circular.

Agradecimientos- Mi agradecimiento por la colaboración en la solución de la ecuación diferencial inicial al Dr. Luis Carrillo Díaz, docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos / e-mail d230112@unmsm.edu.pe

BIBLIOGRAFIA

- [1] Helfgott, Michel; Vera, Edgar
"Introducción a las Ecuaciones Diferenciales" UNMSM- Amaru Editores, Primera Edición, Lima - Peru (1982)
- [2] Espinoza Ramos, Eduardo "Ecuaciones Diferenciales - Aplicaciones" Cuarta edición Editorial Neptuno, Lima - Peru (1990)
- [3] Bronshtein L. ; Semediaev K. "Manual de Matemáticas para Ingenieros y Estudiantes" Cuarta Edición, Editorial Mir - Moscú (1982)
- [4] White J.R. "Lecture Notes : Mathematical Methods (10/24.539)" Universidad de Massachusets - Lowell, via INTERNET.(1998)
- [5] Bird, Lightfoot, Steward "Transport Phenomena" Editorial Wiley, USA 1973.
- [6] Gil Benitez, Wilver "Sistemas Oscilantes en Electroquímica" Tesis Facultad de Química e Ingeniería Química , 1970.
- [7] Bockris, J. Conway B.E. " Modern Aspects of Chemistry" . 5ta. Edición, 1968. Univ. Ottawa - Ontario.