

## TIEMPO DE ESCURRIMIENTO DE UN TANQUE CON UN TUBO DE SALIDA: Nuevo método de cálculo

J. Armijo-Carranza<sup>1</sup>

Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Química e Ingeniería Química  
Departamento de Operaciones Unitarias  
Av. Venezuela s/n - Lima Perú

**Abstract.** It has been developed a new calculation method to estimate the time required to drain the tank through a pipe. The method uses the Newton technique to calculate the liquid velocity and the flow regime in the pipe, with a average deviation of the 14 per cent respect to value experimental efflux time.

**Key words :** Drain, liquid, efflux, time, method

**Resumen.** Se ha desarrollado un nuevo método de cálculo para estimar el tiempo que un líquido demora en escurrir por un tanque a través de un tubo. El método utiliza la técnica iterativa de Newton para calcular la velocidad del líquido y el régimen de flujo en el tubo, con una desviación promedio del 14 por ciento respecto al tiempo de drenado experimental.

**Palabras clave :** Drenado, líquido, tiempo, método

### INTRODUCCIÓN

El escurrimiento de un líquido contenido en un tanque es un ejemplo de aplicación de los balances globales de materia y de energía, y sobre el cuál, los alumnos no graduados de Ingeniería Química pueden realizar experimentos para confrontar el tiempo de drenado experimental frente al calculado.

Bird y otros [1], y Crosby [2] presentan ecuaciones para estimar el tiempo de escurrimiento de un líquido contenido en un tanque de base plana, el cual está conectado a un tubo. Para deducir las ecuaciones, ambos, consideran sin importancia la energía cinética del líquido emergente del tubo.

En el presente trabajo se presenta un nuevo método de cálculo en donde se incluye la energía cinética del líquido y las pérdidas por fricción originadas por la reducción abrupta del área de flujo, cuando el líquido pasa del tanque hacia el tubo.

### FUNDAMENTOS TEÓRICOS

La Figura 1, muestra un esquema del sistema de drenado de un líquido contenido en un tanque de base plana conectado a un tubo de pared lisa y de longitud  $L$ . Inicialmente el líquido llena el tubo y el tanque. Se desea estimar el tiempo que el líquido de-

mora en escurrir del tanque desde una altura  $H_0$  hasta una altura  $H_1$ , estas se miden con respecto a la base del tanque.

#### Ecuación de balance de materia.

Un balance de materia en estado no estacionario, entre la superficie libre del líquido y el punto que conecta el tanque y el tubo da como resultado la siguiente ecuación:

$$\frac{dH}{dt} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 v$$

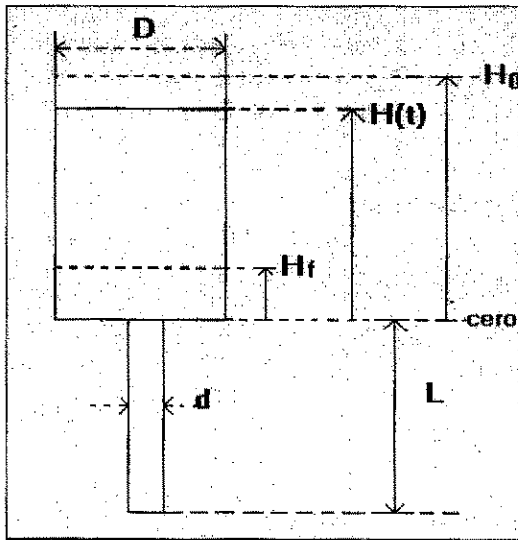
Separando variables e integrando entre la altura inicial y la altura final se obtiene la ecuación para calcular el tiempo de drenado:

$$t = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \int_{H_1}^{H_0} \frac{dH}{v} \quad (1)$$

#### Ecuación de balance de energía mecánica.

Suponiendo estado estacionario y que la velocidad del líquido en el tanque es pequeña, el balance de energía mecánica entre la superficie libre del líquido y el extremo de salida del tubo, en un instante de tiempo  $t$ , conduce a la ecuación (2):

<sup>1</sup> E-mail: d160008@unmsm.edu.pe



**Figura 1 :** Esquema del sistema de drenado de un líquido desde un tanque de base plana.

$$\alpha \frac{v^2}{2g_c} + Lw_f = \frac{g}{g_c} (H+L) \quad (2)$$

Donde, las pérdidas de energía debido a la fricción  $Lw_f$ , se consideran como la suma de las pérdidas en el tubo más lo que ocurre por la reducción del área de flujo al pasar el líquido del tanque al tubo:

$$Lw_f = f_D \frac{L}{d} \left( \frac{v^2}{2g_c} \right) + k \left( \frac{v^2}{2g_c} \right) \quad (3)$$

El factor de fricción de Darcy  $f_D$ , se determina del diagrama de Moody[3].

Para el flujo en tubos de paredes lisas, el factor de fricción se calcula con la ecuación de Blasius[3]:

$$f_D = \frac{a}{Re^b} \quad (4)$$

El factor de fricción de Darcy  $f_D$ , se determina del diagrama de Moody[3].

Para el flujo en tubos de paredes lisas, el factor de fricción se calcula con la ecuación de Blasius[3]:

Para régimen turbulento  $a=0.316$  y  $b=0.25$ , Reynolds entre 4000 y 100000, y

Para régimen laminar  $a=64$  y  $b=1$ , Reynolds menor o igual a 2100.

Se recomienda para el factor de contracción,  $k$  un valor de 0.45[3] cuando la relación de diámetros, del conducto mayor al conducto menor, es mayor a 4.

El coeficiente  $\alpha$  de la ecuación (2), representa un factor de corrección para la energía cinética, debido a que la velocidad no es uniforme a través de la sección transversal del tubo cuando el régimen de flujo es laminar (perfil de velocidades parabólico).

Para flujo laminar,  $\alpha = 2.0$  y para flujo turbulento, el valor del coeficiente es bastante cercano a 1.0[4].

Combinando las ecuaciones (2), (3) y (4) obtenemos después de arreglar:

$$F(v) = (\alpha + k)v^2 + mv^{2-b} - 2g(H+L) = 0 \quad (5)$$

Donde, para régimen laminar

$$m = 64 \frac{\mu}{\rho} \frac{L}{d^2} \quad (6)$$

y, para régimen turbulento

$$m = 0.316 \left( \frac{\mu}{\rho} \right)^{0.25} \frac{L}{d^{1.25}} \quad (7)$$

### SOLUCIONES PRESENTADAS POR BIRD[1] Y CROSBY[2]

De la ecuación (5), considerando despreciable el término cuadrático, obtenemos:

$$v = \left[ \frac{2g(L+H)}{m} \right]^{1/(2-b)}$$

Esta ecuación se reemplaza en la ecuación (1), y se obtiene después de integrar:

Para régimen laminar[1]:

$$t = \left( \frac{D}{d} \right)^2 \left( \frac{m}{2g} \right) \ln \left( \frac{L+H_0}{L+H_f} \right) \quad (8)$$

Para régimen turbulento[2]:

$$t = \frac{7}{3} \left( \frac{D}{d} \right)^2 \left[ 0.34840932 \frac{\mu^{1/7} L^{4/7}}{g^{4/7} \rho^{1/7} d^{5/7}} \right]^x$$

$$\left[ (L+H_0)^{3/7} - (L+H_f)^{3/7} \right] \quad (9)$$

## NUEVO MÉTODO DE SOLUCIÓN

A diferencia de las soluciones anteriores, aquí utilizamos la ecuación (5) sin ninguna simplificación. La ecuación (5) se resuelve por algún método iterativo, para determinar la velocidad del líquido en cualquier instante y para cualquier altura,  $H(t)$ .

Por otro lado, si en el intervalo de tiempo en que el líquido drena del tanque, el régimen de flujo es laminar o turbulento, la ecuación (1) se integra después de hacer un cambio en la variable de integración. El cambio de variable se realiza utilizando la propiedad de la integral por partes:

$$\int U dV = \int d(UV) - \int V dU$$

Hacemos  $dV = dH$  y  $U = 1/v$ , luego la integral de la ecuación (1) se integra para obtener:

$$\int_{H_f}^{H_0} \frac{dH}{v} = \frac{H_0}{v_0} - \frac{H_f}{v_f} + \int_{v_f}^{v_0} \frac{H}{v^2} dv \quad (10)$$

Donde,  $v_0$  así como  $v_f$  son las velocidades del líquido calculadas de la ecuación (5) con  $H_0$  y  $H_f$  respectivamente.

Arreglando la ecuación (5) tenemos:

$$\frac{H}{v^2} = \frac{\alpha + k}{2g} + \frac{m}{2g} \frac{L}{v^b} - \frac{L}{v^2}$$

Reemplazando esta última ecuación en (10), obtenemos después de integrar:

Para régimen turbulento

$$t = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \left[ \frac{(1+k)}{g} (v_0 - v_f) + \frac{7m}{6g} (v_0^{0.75} - v_f^{0.75}) \right] \quad (11)$$

Para régimen laminar:

$$t = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \left[ \frac{(2+k)}{g} (v_0 - v_f) + \frac{m}{2g} \ln \left( \frac{v_0}{v_f} \right) \right] \quad (12)$$

### Algoritmo de cálculo

Debido a que el factor de fricción  $f_D$ , es una función discontinua del número de Reynolds, lo mismo sucede con la función  $F(v)$ . Tenemos dos funciones  $F(v)$ , una en régimen laminar y otra en régimen turbulento, ambas de pendiente positiva y además se cruzan para un número de Reynolds que puede estimarse de la siguiente ecuación:

$$Re = \left[ 202.5 + 3.164 Re \left( \frac{d}{L} \right)^{-4} \right]^3$$

Si la relación  $(d/L)$  se hace cero,  $Re = 1189$ .

A partir del número de Reynolds estimado de la ecuación anterior, la función  $F(v)$ , de régimen turbulento crece más rápidamente que la correspondiente a régimen laminar.

Considerando el comportamiento de la función  $F(V)$ , el algoritmo de cálculo es el siguiente:

**1-** Para la altura inicial  $H_0$  y para la altura final  $H_f$ , determine la velocidad del líquido resolviendo la ecuación (5) por un método iterativo, como por ejemplo el método de Newton[5].

**2-** Calcule el número de Reynolds, y determine a cual de los casos siguientes corresponde:

**Caso 1-** Para la altura inicial ( $H_0$ ) y final ( $H_f$ ), el régimen de flujo es laminar. El tiempo de drenado se calcula con la ecuación (12).

**Caso 2-** Para la altura inicial ( $H_0$ ) y final ( $H_f$ ), el régimen de flujo es turbulento. El tiempo de drenado se calcula con la ecuación (11).

**Caso 3-** Para la altura inicial ( $H_0$ ), el régimen de flujo es turbulento y para la altura final ( $H_f$ ), el régimen es laminar. El tiempo de drenado se calcula con las ecuaciones (11) y (12).

En este caso se determina un valor de  $H$ , para  $Re_i = 3000$ , de la ecuación (5) tanto para flujo turbulento ( $H_t$ ) y para flujo laminar ( $H_l$ ). Ahora, si la integral de la ecuación (1) se desdobla de la siguiente forma:

$$\int_{H_f}^{H_0} \frac{dH}{v} = \int_{H_t}^{H_0} \frac{dH}{v} + \int_{H_t}^{H_l} \frac{dH}{v} + \int_{H_l}^{H_f} \frac{dH}{v}$$

Resulta que la primera y la última integral del lado derecho, corresponde al cálculo del tiempo con las ecuaciones (11) y (12) para régimen turbulento y laminar respectivamente. La integral del centro se resuelve fácilmente porque la velocidad,  $v_i$  correspondiente a  $Re_i$ , es constante:

$$\int_{H_l}^{H_t} \frac{dH}{v} = \frac{(H_t - H_l)}{v_i}$$

**Caso 4-** Para la altura inicial o final, no hay solución para la función  $F(v)$ . Este caso puede subdividirse en:

- a) Para la altura inicial ( $H_0$ ) el régimen es turbulento mientras que para la altura final ( $H_f$ ) no hay solución para  $F(v)$ . La solución se obtiene extrapolando la función para régimen turbulento, y el tiempo de drenado se calcula con la ecuación (11).
- b) Para la altura inicial ( $H_0$ ) el régimen es laminar, mientras que para la altura final ( $H_f$ ) no hay solución para  $F(v)$ . La solución se obtiene extrapolando la función para régimen laminar y el tiempo de drenado se calcula con la ecuación (12).
- c) Para la altura inicial ( $H_0$ ) no hay solución para  $F(v)$ , mientras que para la altura final ( $H_f$ ) el régimen de flujo puede ser laminar o turbulento. Si es laminar la solución se obtiene extrapolando la función en régimen laminar, caso contrario se extrapola la función en régimen turbulento. El tiempo de drenado se calcula con las ecuaciones (11) y (12).
- d) Para la altura inicial ( $H_0$ ) y para la altura final ( $H_f$ ) no hay solución para  $F(v)$ . Este caso requiere un análisis particular si es que se presenta, con la finalidad de obtener una solución coherente con el fenómeno físico.

El algoritmo de cálculo, estructurado aquí, se ha implementado en un programa de computadora. Este, considera que el cambio de régimen de flujo se presenta para un Reynolds igual a 3000 (**Figuras 2 y 3**).

**COMPARACIÓN CON DATOS EXPERIMENTALES**

Los datos experimentales se obtienen de los reportes presentados por los alumnos en el Departamento de Operaciones Unitarias. Los datos se toman sin ninguna discriminación o verificación, y tienen las siguientes condiciones:

- Rango de longitud de tubo 10.2 a 66.7 cm,
- Rango de diámetro de tubo 0.17 a 0.7 cm,
- Diámetro medio del tanque 15.4 cm,
- Líquido utilizado en los experimentos: agua y diesel-2.
- Número de datos experimentales, 33.

Los cálculos se han realizado con una densidad igual a 1.0 y 0.842 g/cm<sup>3</sup>, una viscosidad de 0.01 y 0.0677 g/cm s; para el agua y el diesel respectivamente.

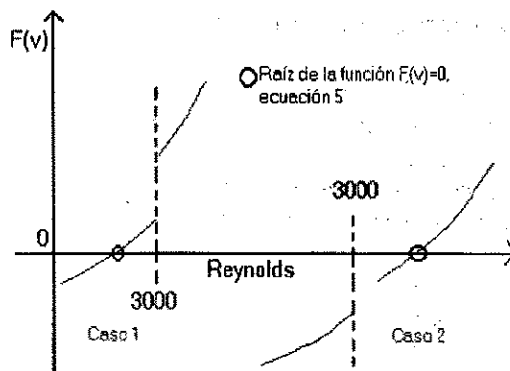


Figura N°2: Comportamiento de la función  $F(v)$ , según el régimen de flujo. Caso 1, si el régimen es laminar durante el proceso de drenado y Caso 2, si el régimen es turbulento.

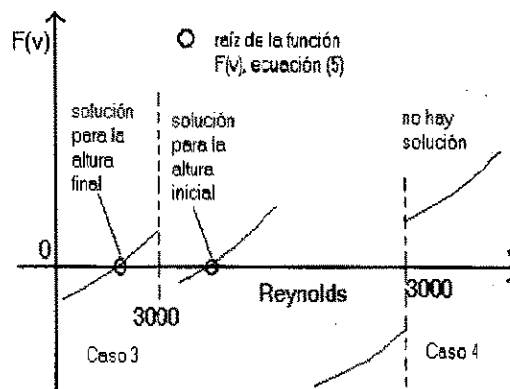


Figura N°3: Comportamiento de la función  $F(v)$ , según el régimen de flujo. Caso 3, si durante el proceso de drenado el régimen es turbulento al inicio y laminar al final. Caso 4, no hay solución, a menos que la función  $F(v)$  sea extrapolada.

Las **figuras 4 y 5**, comparan los valores calculados frente a los valores experimentales. En la **figura 4**, se muestra que los valores calculados con el método presentado en este trabajo, se aproximan más a la línea de 45° que aquellos valores calculados, con las ecuaciones de Bird[1] o de Crosby[2], como se observa en la **figura 5**.

Debe indicarse que para todos los datos experimentales, el tiempo calculado con un factor de contracción,  $k=0.45$  es mayor que el tiempo calculado con  $k=0$ .

En la **figura 6** el porcentaje de desviación está definida como sigue:

$$d_i = 100 \left( \frac{t_{i \text{ exp}} - t_{i \text{ cal}}}{t_{i \text{ cal}}} \right)$$

Figura 4: El tiempo de escurrimiento, experimental frente al valor calculado con el nuevo método para cuando el factor de contracción es cero.

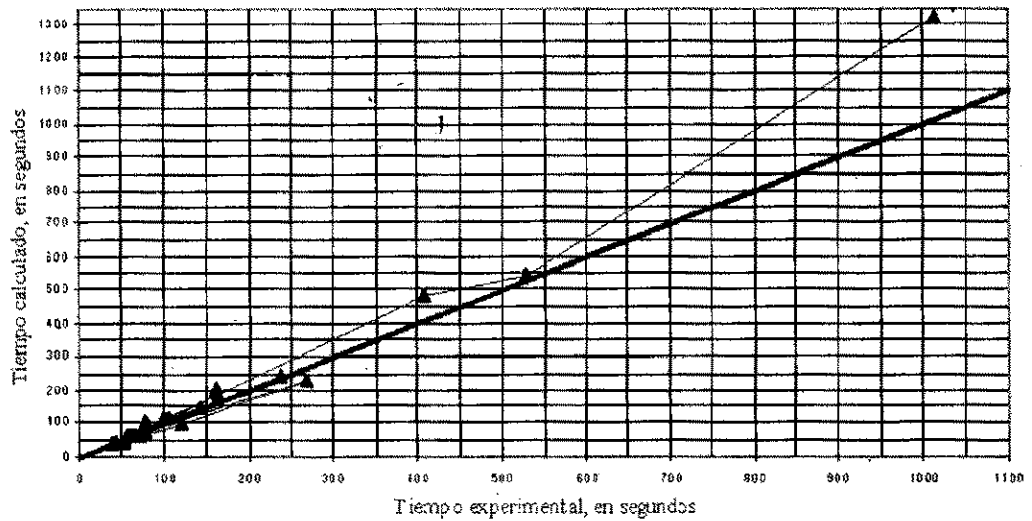


Figura 5: El tiempo de escurrimiento, experimental frente al valor calculado con la ecuación de Bird[1] o de Crosby[2].

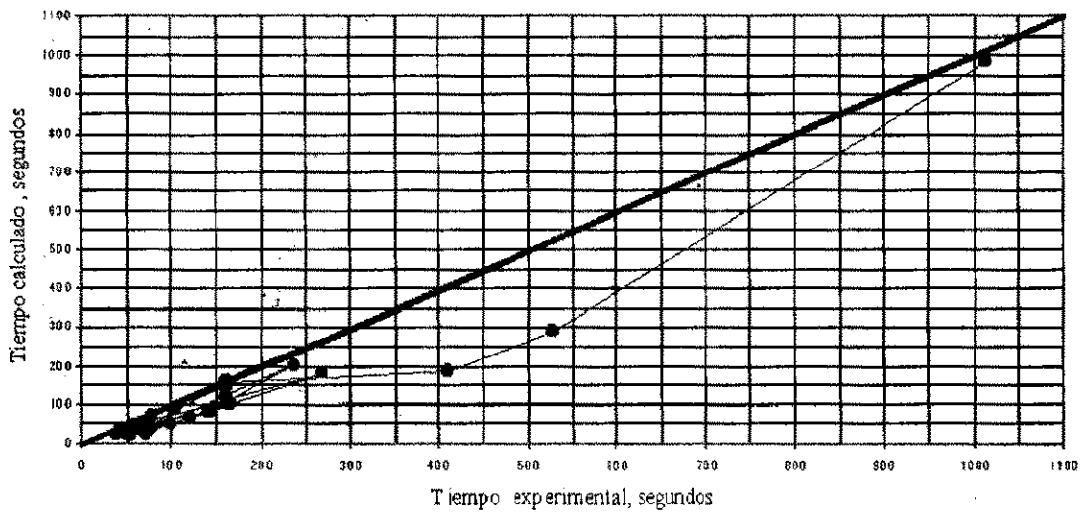
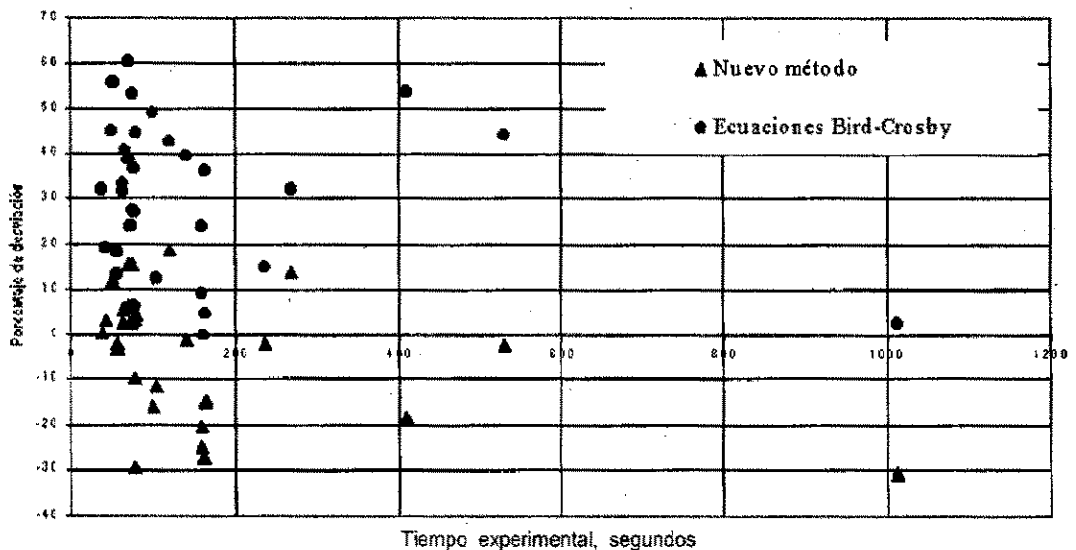


Figura 6. Porcentaje de desviación entre el tiempo experimental y el calculado.



La figura muestra una desviación sistemática, siempre positiva, cuando utilizamos las ecuaciones de Bird[1] o de Crosby[2]; mientras que las desviaciones con el nuevo método se dispersan aleatoriamente alrededor del cero.

La desviación promedio, se calcula de la ecuación:

$$\%s = 100 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n-1}$$

Donde, n es el número de valores experimentales.

La desviación promedio para el nuevo método propuesto es del 14%, comparado al 35% para los valores calculados con las ecuaciones de Bird[1] o Crosby[2]

## CONCLUSIONES

El nuevo método de cálculo predice el tiempo de escurrimiento con una desviación promedio del 14 por ciento.

La desviación sistemática entre el valor experimental y el calculado por las ecuaciones presentadas en los textos de Bird[1] y Crosby[2], indica que no se debe menospreciar el término de la energía cinética en la ecuación del balance de la energía mecánica.

La inclusión del factor de contracción en los cálculos, tiende a aumentar el porcentaje de desviación.

## LISTA DE SIMBOLOS

- a:** constante en la ecuación de Blasius, para régimen turbulento =0.316; para régimen laminar =64
- b:** constante en la ecuación de Blasius, para régimen turbulento =0.25; para régimen laminar =1.

- D:** Diámetro del tanque
- d:** diámetro del tubo
- f<sub>o</sub>:** factor de fricción de Darcy
- g:** aceleración de la gravedad.
- g<sub>c</sub>:** factor de conversión, de unidades de fuerza a unidades de masa.
- i:** i-ésimo valor experimental
- H:** altura de la superficie libre del líquido medido respecto a la base del tanque.
- H<sub>o</sub>:** altura inicial.
- H<sub>f</sub>:** altura final.
- k:** factor de pérdida de energía por contracción.
- L:** longitud del tubo conectado al tanque.
- Lw<sub>f</sub>:** pérdidas de energía debido a la fricción.
- m:** para régimen turbulento =0.316(m/r)<sup>0.25</sup>L d<sup>-1.25</sup>,  
para régimen laminar =64(m/r)Ld<sup>-2</sup>.
- Re:** número de Reynolds=vdr/m
- t:** tiempo de drenado(exp:experimental y cal:calculado)
- v:** velocidad media del líquido en el tubo.
- v<sub>o</sub>:** velocidad calculada con H<sub>o</sub>.
- v<sub>f</sub>:** velocidad calculada con H<sub>f</sub>.

## Bibliografía

- [1] Bird R. B., Stewart W., Lightfoot E.; "Transport Phenomena", John Wiley & Sons., 1960 p 237.
- [2] Crosby J.E.; "Experimentos sobre Fenómenos de Transporte en las Operaciones Unitarias de la Industria Química", Edit. Hispano Americana S.A., 1968 p 55.
- [3] Shames H.I.; "Mecánica de Fluidos", McGraw Hill Interamericana S.A., 1995 p 331-335.
- [4] Fox R.W., McDonald A.T.; "Introduction to Fluid Mechanics", J. Wiley & Sons, Inc. 1978 p 358-360
- [5] Carnahan B., Luther H.A., Wilke J.O.; "Applied numerical methods", J. Wiley N. Y. 1969, p 100-116, p 178-180