

SIMULACIÓN DINÁMICA DE SISTEMAS DE OSMOSIS INVERSA

J. Armijo C¹ y C. Condorhuamán C.²

RESUMEN

En este trabajo se desarrolla un modelo matemático para simular de forma dinámica un sistema de osmosis inversa. El modelo se conforma a partir de balances macroscópicos de materia en estado no estacionario combinados con el modelo de transporte en la membrana: difusión-solución. En esta primera parte, se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales suponiendo un flujo patrón de mezcla completa en el módulo de osmosis inversa (módulo de polarización=1). El sistema de ecuaciones se resuelve simultáneamente mediante el método de Runge-Kutta-Fehlberg. Los resultados indican que aumentar el área de membrana o de la presión incrementa el volumen de producto recuperado y el incremento de la concentración inicial en la alimentación reduce el caudal severamente.

Palabras claves: Simulación, osmosis inversa, difusión-solución, polarización por concentración

A DYNAMIC SIMULATION OF REVERSE OSMOSIS SYSTEMS

ABSTRACT

This paper develops a mathematical model to simulate dynamically a reverse osmosis system. The model is formed from materials balances macroscopic unsteady state combined with the model membrane transport: diffusion-solution. In this first part, we solve the system of differential equations assuming a completely mixed flow pattern in the reverse osmosis module (module polarization = 1). The system of equations is solved simultaneously by the Runge-Kutta-Fehlberg method. The results indicate that increasing the area of membrane or pressure increases the volume of recovered product and increasing the initial concentration in the feed reduces the permeate flow severely.

Keywords: Simulation, reverse osmosis, diffusion-solution concentration polarization

I INTRODUCCIÓN

La desalinización de agua de mar para producir agua potable, mediante osmosis inversa (OI), se ha convertido en una opción económicamente factible a medida que las fuentes de agua han disminuido gradualmente debido a su escasez y deterioro de su calidad. Los sistemas de osmosis inversa tienen muchas ventajas sobre otras técnicas de desalinización: bajo requerimiento de energía, bajas temperaturas de operación, diseño modular y bajo costos de producción de agua. A inicios de los años 90, el costo total de agua desalinizada incluyendo costo de capital amortizados en 25 años^[1] era \$1.5/

m³ comparado al valor actual entre \$0.65/m³ a \$ 0.90/m³

En general, los sistemas de OI son utilizados para la separación de sales disueltas y de sustancias en solución. El proceso consiste en pasar una solución acuosa de alta presión (alimentación) a través de una membrana porosa semipermeable, y retirar el permeado de la membrana a presión y temperatura ambiente. La solución de alta presión remanente (residuo) contiene una elevada concentración de uno o varios constituyentes originales. La figura N.º 1 muestra un esquema general del proceso.

1 jarmijocarranza@hotmail.com Departamento Académico de Operaciones Unitarias, Facultad de Q. e Ing. Química, UNMSM.

2 cesarioccc@yahoo.com Departamento Académico de Operaciones Unitarias, Facultad de Q. e Ing. Química, UNMSM.

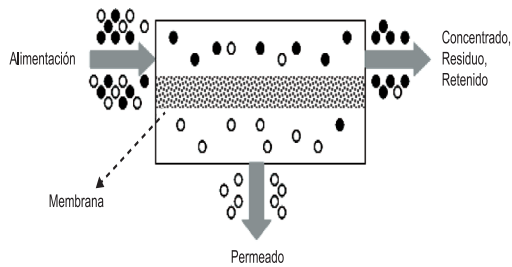


Figura N.º 1. Esquema del módulo de osmosis inversa que muestra las corrientes de alimentación, permeado y rechazo.

Los sistemas de OI son hábiles para separar partículas de hasta 0.0001 mm, que es el tamaño de un ión, motivo por el cual su principal aplicación es la de obtener agua potable a partir de agua salobre.

La propiedad^[2] más importante de las membranas es su capacidad para controlar la velocidad de permeado de diferentes especies químicas. Para describir el mecanismo de permeado se utiliza de forma extensiva el modelo de solución-difusión. En este modelo las especies químicas se disuelven en el material de la membrana y seguidamente se difunden a través de ella a consecuencia de una gradiente de concentración. Las especies químicas se separan debido a diferencias en las solubilidades y las velocidades de difusión.

Una de las principales limitaciones de los procesos de separación mediante membranas es la acumulación del soluto o iones de la sal sobre la superficie de la membrana. Este fenómeno se denomina polarización por concentración y se produce debido a que la membrana rechaza el soluto dejando pasar preferentemente el solvente a través de la membrana.

Como resultado de la polarización por concentración el volumen o flujo del producto permeado disminuye reduciendo el rendimiento del proceso. El fenómeno de polarización por concentración está controlado por las propiedades del soluto y de las membranas, así como por la hidrodinámica de flujo^[3]. Para reducir los efectos de la polarización por concentración se recurre a diferentes técnicas como por ejemplo:

aumentar el flujo, colocar promotores de turbulencia en el canal de la alimentación, flujo en reversa, agitación, modificación de la estructura polimérica de la membrana.

Cuando se diseñan y operan módulos de OI es necesario conocer los efectos de la polarización por concentración para determinar las condiciones óptimas de operación, ayudar en el diseño de módulos con membranas de alto rendimiento así como la interpretación de los estudios del comportamiento de las membranas^[3].

Diferentes aproximaciones o teorías se utilizan para predecir el efecto de la polarización.

1- Modelos analíticos. Los modelos analíticos varían en su complejidad dependiendo de la exactitud para describir el movimiento del fluido cuando esta circula sobre la superficie de la membrana.

- a) Teoría de la película. Esta teoría proporciona un estimado rápido del grado de la polarización de concentración basado en el conocimiento del coeficiente de transferencia de masa en el lado de la alimentación y del flux de permeado. Este modelo supone: perfil de velocidades y concentración totalmente desarrollado, flux de permeado invariable en la dirección axial, y el efecto de la succión (permeado) en la superficie de la membrana no altera el perfil de velocidades axial. Se utilizan correlaciones teóricas o empíricas para estimar el coeficiente de transferencia de masa.
- b) Teoría del soluto retenido. Este modelo relaciona la velocidad del permeado con la concentración en la capa de polarización y determina la variación de la velocidad del permeado en dirección axial a lo largo de la superficie de la membrana mediante balance de materia del soluto.
- c) Teoría de convección-difusión. Este modelo, más complejo que las anteriores, considera que el fluido se mueve en dos direcciones y mediante el balance de materia entre el soluto rechazado y el soluto que se mueve axialmente determina la

variación de la concentración en ambas direcciones, axial y transversal.

El trabajo de S. Kim y E. Hoek^[4] compara las predicciones teóricas de las tres teorías con datos experimentales. Sus resultados muestran que la capa de polarización de concentración varía a lo largo de la longitud axial de la membrana, y las predicciones del modelo de la película, siendo el más simple, es bastante próximo al modelo de convección-difusión.

2- Modelos de fenómenos de transporte.

Estos modelos se fundamentan en principios físico-químicos para describir la hidrodinámica de flujo y el efecto de dispersión de las especies química. Actualmente se aprovecha el gran avance en los métodos computacionales para resolver de forma numérica las complejas ecuaciones que describen los perfiles de velocidad y concentración en más de una coordenada espacial, en la capa de polarización.

- a) Balances de momento y transporte microscópico. Una de las herramientas más poderosas desarrolladas para este fin es el denominado Computación Dinámica de Fluidos (CFD). Esta metodología analiza fenómenos transferencia de masa, calor y fenómenos asociados como reacciones químicas, adsorción e intercambio iónico aplicados a sistemas que trabajan con fluidos. Diferentes métodos numéricos se han implementado en diferentes software comerciales que se lista en la referencia^[5]. Uno de los trabajos que sigue la línea CFD es el de E. Lyster y Y. Cohen^[3], quienes escriben las ecuaciones diferenciales de momento y de transferencia de masa en dos dimensiones y resuelven el sistema de ecuaciones de forma numérica mediante el método de elementos finitos con el programa COMSOL.

La enorme complejidad de la técnica CFD lo hace difícil acoplar sus resultados al diseño, control y optimización de los procesos de separación con membranas.

- b) Balances de gradiente máximo. En este análisis, variables tales como presión, velocidad y concentración se consideran que cambian solo en dirección axial de flujo y se desprecia los efectos de dispersión. L. Song y otros^[6] utilizan esta técnica, mediante balances de materia determinan las velocidades en el canal del módulo y del permeado; y calculan la caída de presión en dirección de flujo utilizando un factor de fricción determinado experimentalmente.
- c) Balances de materia y transporte macroscópico. En este caso no se requiere detalles del proceso interno del módulo de osmosis. Las variables de proceso tales como velocidad y concentración dependen solo del tiempo y no de la coordenada espacial, se trabaja con información de las corrientes que entran y salen del módulo. Los trabajos de Slater^[7] y Jamal, Khan, Kamil^[8] presentan la simulación dinámica del sistema de osmosis inversa basado en balances de materia combinados con las ecuaciones de transporte simplificados del módulo. Para la integración numérica utiliza el método de Runge- Kutta de 4to grado. Slater presenta resultados de la simulación numérica mediante balances macroscópicos y los compara con datos experimentales. Ambos trabajos, de Jamal y Slater, expresan el caudal de permeado en función de la concentración de la alimentación y no de la concentración de la corriente de rechazo porque suponen que son aproximadamente iguales.

El objetivo del presente trabajo es simular el sistema OI mediante modelos dinámicos de balances de materia combinados con el modelo de transporte solución-difusión para determinar los efectos de la concentración, la presión y el área en el comportamiento del proceso de OI.

II. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

La configuración que se muestra en la Figura N.º 2 es el sistema de OI seleccionado para el desarrollo del modelo matemático.^[7,8]

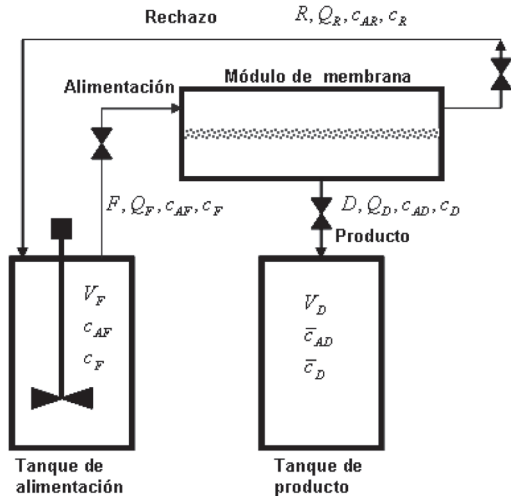


Figura N.º 2. Esquema del sistema de osmosis inversa que muestra el tanque de alimentación, de permeado y el módulo.

El tanque de alimentación se carga con solvente puro (B: agua), el agitador está encendido. El líquido es bombeada hacia el módulo y se deja circular por un periodo de tiempo (t_b) hasta conseguir condiciones estacionarias de flujo. El flujo de permeado o producto depende de la permeabilidad de la membrana al solvente, y de la caída de presión transmembrana. El volumen de permeado recogido es $Q_D t_b$. Al tiempo $t=0$ se agrega una cantidad de soluto (A: sal) al tanque de alimentación. Debido a la agitación violenta, la concentración de soluto en el tanque es uniforme e igual a c_{AF0} , y la concentración total es c_F . La corriente de alimentación tiene las mismas concentraciones que del tanque. A medida que transcurre el proceso, $t>0$, el volumen del producto se incrementa y el volumen del tanque de alimentación disminuye. La concentración de soluto en el tanque de alimentación se incrementa en el tiempo debido a la recirculación de la corriente de rechazo. El soluto que pasa a través de la membrana se mezcla en el tanque de producto y la concentración, en cualquier instante, es un valor promedio entre el tiempo $t=0$ y el instante t . De esta manera, el sistema opera en forma sucesiva de incrementos de la concentración de soluto en el tanque de alimentación. La descripción anterior difiere de la presentada en las referencias de Jamal y Slater donde el

volumen de permeado en el tanque es cero al tiempo $t=0$.

El análisis del sistema de OI se realiza individualmente en cada unidad: tanque de permeado y de alimentación, y finalmente en el módulo.

1- Balances de materia

a) Tanque de permeado o producto.

Balance de soluto más solvente:

$$\frac{d(V_D \bar{c}_D)}{dt} - D = 0 \tag{1}$$

El flujo molar se relaciona con el flujo volumétrico:

$$D = c_D Q_D \tag{2}$$

Si consideramos que las soluciones son diluidas, podemos aproximar:

$$\bar{c}_D \cong c_D \tag{3}$$

Reemplazando 3 y 2 en 1 obtenemos:

$$\frac{dV_D}{dt} = Q_D \tag{4}$$

Balance de soluto:

$$\frac{d(V_D \bar{c}_{AD})}{dt} - \frac{D}{c_D} c_{AD} = 0 \tag{5}$$

Expandimos el termino de la derivada y obtenemos:

$$\bar{c}_{AD} \frac{dV_D}{dt} + V_D \frac{d\bar{c}_{AD}}{dt} - \frac{D}{c_D} c_{AD} = 0$$

Si reemplazamos 2 y 4 en la ecuación anterior obtenemos:

$$\frac{d\bar{c}_{AD}}{dt} = \frac{Q_D}{V_D} (c_{AD} - \bar{c}_{AD}) \tag{6}$$

b) Tanque de alimentación

Balance de soluto más solvente

$$\frac{d(V_F c_F)}{dt} + F - R = 0 \tag{7}$$

Los flujos volumétricos se relacionan con los flujos molares como sigue:

$$\begin{aligned} F &= c_F Q_F \\ R &= c_R Q_R \end{aligned} \quad (8)$$

Para soluciones diluidas suponemos que:

$$c_F \cong c_R \quad (9)$$

Reemplazando 9 y 8 en 7:

$$\frac{dV_F}{dt} = Q_R - Q_F \quad (10)$$

Balance de soluto:

$$\frac{d(V_F c_{AF})}{dt} + \frac{F}{c_F} c_{AF} - \frac{R}{c_R} c_{AR} = 0 \quad (11)$$

Si expandimos el termino de la derivada obtenemos:

$$V_F \frac{dc_{AF}}{dt} + c_{AF} \frac{dV_F}{dt} + \frac{F}{c_F} c_{AF} - \frac{R}{c_R} c_{AR} = 0$$

Reemplazamos 8 y 10 en la ecuación anterior para obtener:

$$\frac{dc_{AF}}{dt} = \frac{Q_R}{V_F} (c_{AR} - c_{AF}) \quad (12)$$

c) Módulo de osmosis inversa

Suponemos que el volumen del módulo es pequeño comparado al volumen del tanque de alimentación y por lo tanto no hay acumulación de materiales en ella. Si bien el fenómeno de polarización es un proceso de acumulación de soluto, se considera que el crecimiento de la capa de acumulación sobre la superficie de la membrana ocurre en los primeros instantes y es rápido. Una vez establecida la capa de soluto esta mantiene un espesor invariable en el tiempo a lo largo de la dirección del flujo así mismo, la concentración de soluto en la capa de polarización permanece constante. El trabajo de simulación numérica de Lyster-Cohen para un módulo de canal rectangular muestra que la concentración de soluto se incrementa,

en estado estacionario, desde la entrada al canal hasta el extremo de salida.

Balance de soluto + solvente

$$F = R + D \quad (13)$$

Balance de soluto

$$\frac{F}{c_F} c_{AF} = \frac{R}{c_R} c_{AR} + \frac{D}{c_D} c_{AD} \quad (14)$$

Si reemplazamos los flujos volumétricos definidos mediante las ecuaciones 2 y 8; y consideramos soluciones diluidas:

$$c_F \cong c_R \cong c_D$$

Las ecuaciones 13 y 14 quedan como sigue:

$$Q_F = Q_R + Q_D \quad (15)$$

$$Q_F c_{AF} = Q_R c_{AR} + Q_D c_{AD} \quad (16)$$

Combinando las ecuaciones 15 y 16 se demuestra que:

$$Q_R (c_{AR} - c_{AF}) = Q_D (c_{AF} - c_{AD}) \quad (17)$$

2-Balances de materia combinados

De la ecuación 15 : QR-QF = -QD, reemplazando en la ecuación 10 obtenemos:

$$\frac{dV_F}{dt} = -Q_D \quad (18)$$

Esta ecuación se resuelve con la ecuación 4:

$$\frac{dV_D}{dt} = Q_D \quad (4)$$

Con las condiciones iniciales:

$$t = 0 \quad V_F = V_{F0} \quad V_D = V_{D0} \quad (19)$$

El resultado de la integración es:

$$V_F = (V_{F0} + V_{D0}) - V_D \quad (20)$$

Por otro lado, si reemplazamos las ecuaciones 17 y 20 en la ecuación 12 se obtiene después de arreglar la ecuación 21:

$$\frac{dc_{AF}}{dt} = \left[\frac{Q_D c_{AF}}{(V_{F0} + V_{D0}) - V_D} \right] \left(\frac{c_{AF} - c_{AD}}{c_{AF}} \right) \quad (21)$$

Las ecuaciones 4, 6 y 21 forman el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que simulan el comportamiento dinámico del sistema de OI. Para resolver estas ecuaciones se necesita una expresión para el flujo de permeado, QD, el mismo que está determinado por el modelo que se use para describir el transporte de las especies químicas a través de la membrana. En este trabajo aplicamos el modelo de la solución-difusión.

3-Modelo de transporte solución-difusión [9]

Este modelo se caracteriza por un mecanismo simultáneo de disolución y difusión en la membrana, ambos, dependientes de las características del material del que están hechas las membranas. El mecanismo del modelo es:

- 1- Las especies químicas son adsorbidas sobre la superficie de la membrana desde el fluido adherida a ella.
- 2- Las especies químicas adsorbidas se difunden a través de la membrana en virtud de una gradiente de concentración.
- 3- Las especies químicas que llegaron a la cara opuesta de la membrana son desorbidos desde la superficie de la membrana hacia la fase fluida.

El modelo supone:

- 1- En la interfase fluido-membrana se establece rápidamente un estado de equilibrio en la distribución de las especies químicas, es decir la velocidad de adsorción y desorción son más rápidas que la velocidad difusión en la membrana. Las concentraciones pueden relacionarse mediante la ley de Henry.
- 2- En el interior de la membrana las especies se difunden a consecuencia de su

gradiente de concentración. La velocidad de difusión está determinado por la ley de Fick y es proporcional a un coeficiente de difusión efectivo.

- 3- La solución de alta presión (alimentación) transmite su presión al interior de la membrana de manera uniforme, y se propaga de forma constante hasta alcanzar la superficie de la membrana en contacto con la solución de baja presión (permeado) donde cae bruscamente hasta igualarse a la presión menor.
- 4) No existe acumulación de especies químicas en la membrana.

La figura N.º 3 muestra un esquema con las variables que se utilizan para expresar las ecuaciones de transporte según el modelo de solución-difusión.

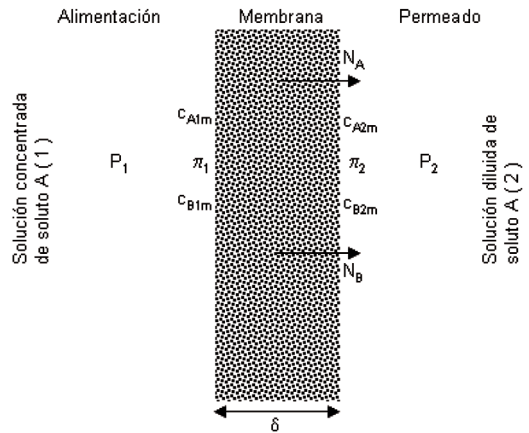


Figura N.º 3. Esquema que muestra la difusión de soluto y solvente a través de la membrana.

Las ecuaciones que determinan las velocidades de transporte en función de las concentraciones en fase fluida son:

Flux molar de soluto:

$$N_A = \kappa_A (c_{A1m} - c_{A2m}) \quad (22)$$

Donde la constante de permeabilidad al soluto está dado por el cociente entre permeabilidad y espesor de membrana:

$$\kappa_A = \frac{P_A}{\delta} \quad (23)$$

Flux molar de solvente:

$$N_B = \kappa_B (\Delta P - \Delta \pi) \quad (24)$$

Donde:

La caída de presión transmembrana es

$$\Delta P = P_1 - P_2 \quad (25)$$

Las presiones osmóticas dependen de las concentraciones del soluto en cada lado de la membrana:

$$\Delta \pi = \pi_1(c_{A1m}) - \pi_2(c_{A2m}) \quad (26)$$

La constante de permeabilidad al solvente está dado por el cociente de la permeabilidad al espesor a corregido por la relación entre el volumen molar y la concentración del solvente, la temperatura absoluta y la constante universal de los gases:

$$\kappa_B = \frac{P_B}{\delta} \frac{v_B c_{B1m}}{RT} \quad (27)$$

La relación de flux molares permite demostrar la relación:

$$\frac{N_A}{c_{A2m}} = \frac{N_B}{c_{B2m}} \quad (28)$$

Reemplazando las ecuaciones 22 y 24 en 28, se obtiene después de arreglar :

$$\frac{c_{A2m}}{c_{A1m}} = \frac{1}{1 + \kappa [\Delta P - \pi_1(c_{A1m}) + \pi_2(c_{A2m})]} \quad (29)$$

Donde la relación entre las constantes de permeabilidades definen la selectividad de la membrana:

$$\kappa = \frac{\kappa_B}{\kappa_A c_{B2m}} \quad (30)$$

La ecuación 29 permite establecer que un aumento de la presión de alimentación disminuye la concentración de soluto en el lado del permeado, lo cual mejora la calidad del agua en los sistemas de desalinización. En cambio, un aumento de la concentración en el lado de alimentación aumenta la presión osmótica p_1 , y como consecuencia aumenta la concentración de soluto en el permeado.

4- El efecto de la polarización por concentración[10, 11]

El soluto tiende acumularse sobre la superficie de la membrana si esta deja pasar más fácilmente al solvente. La concentración del soluto se incrementa en el tiempo creando un gradiente de concentración que origina un flux de retorno desde la superficie de la membrana hacia la masa principal de la solución. En estado estacionario, se alcanza un valor constante para la concentración del soluto sobre la superficie de la membrana y así mismo para el flux neto del soluto, que es el mismo que atraviesa la película de líquido como el que atraviesa la membrana. Se considera que en el lado de la solución concentrada (alimentación) el efecto de la polarización por concentración es más importante que en el lado de la solución diluida (permeado).

La figura N.º 4 muestra un esquema del modelo de película estancada sobre la superficie de la membrana.

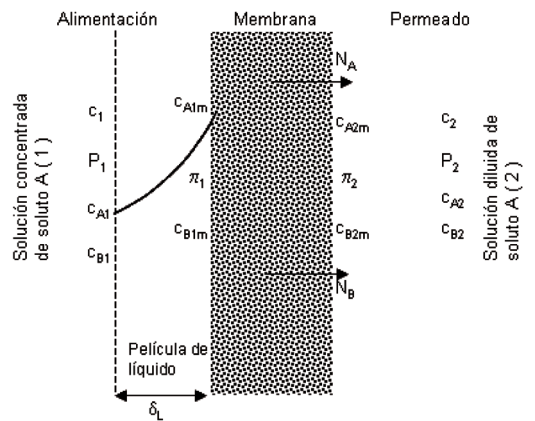


Figura N.º 4. Esquema de los procesos de difusión en la membrana y la película de líquido. Se muestra la caída de concentración en el lado de solución concentrada.

Debido a la acumulación de soluto en la superficie de la membrana, se desarrolla un gradiente de concentración en la solución de alimentación que produce difusión molecular hacia el seno de la solución, reduciendo el flux de solvente que llega a la membrana. El incremento de la presión osmótica p_1 debi-

do al aumento de la concentración también reduce el flujo de solvente.

En estado estacionario, el flux neto de A en la película de fluido está dado por la primera ley de Fick:

$$N_A = (N_A + N_B) \frac{c_A}{c_1} - D_{AB} \frac{dc_A}{dz} \quad (31)$$

Integrando la ecuación anterior se demuestra:

$$N_A + N_B = \frac{D_{AB}}{\delta_L} c_1 \ln \left[\frac{\frac{N_A}{N_A + N_B} - \frac{c_{A1m}}{c_1}}{\frac{N_A}{N_A + N_B} - \frac{c_{A1}}{c_1}} \right] \quad (32)$$

Pero en el lado del permeado se puede escribir la relación:

$$\frac{N_A}{N_A + N_B} = \frac{c_{A2m}}{c_2} \quad (33)$$

Reemplazando en la ecuación anterior obtenemos:

$$N_A + N_B = k_L c_1 \ln \left[\frac{c_{A1m} - f c_{A2m}}{c_{A1} - f c_{A2m}} \right] \quad (34)$$

Donde:

El coeficiente de transferencia se define como:

$$k_L = \frac{D_{AB}}{\delta_L} \quad (35)$$

La relación de concentraciones totales:

$$f = \frac{c_1}{c_2} \quad (36)$$

En muchos casos prácticos, para soluciones diluidas f se aproxima a 1

Definimos:

La velocidad de permeado:

$$V_p = \frac{N_A + N_B}{c_2} \quad (37)$$

Y el coeficiente de rechazo

$$r = 1 - \frac{c_{A2m}}{c_{A1m}} \quad (38)$$

Si las ecuaciones 37 y 38 se reemplazan en 34 se obtiene:

$$M_p = \frac{t}{1 + f(t-1)(1-r)} \quad (39)$$

Donde:

MP es el módulo de polarización

$$M_p = \frac{c_{A1m}}{c_{A1}} \quad (40)$$

Y:

$$t = \exp \left[\frac{V_p}{fk_L} \right] \quad (41)$$

Para régimen turbulento el coeficiente de transferencia tiende a infinito y el valor de t se aproxima a 1, es decir, el módulo de polarización se hace 1 y:

$$c_{A1m} \cong c_{A1}$$

Al reemplazar la ecuación 40 en la ecuación 29 obtenemos la concentración del soluto sobre la pared de la membrana en el lado de permeado, en función de la composición del soluto en el lado de alimentación la :

$$c_{A2m} = \frac{M_p c_{A1}}{1 + \kappa [\Delta P - \pi_1 (M_p c_{A1}) + \pi_2 (c_{A2m})]} \quad (42)$$

Si suponemos que la resistencia a la transferencia de masa es despreciable en el lado y soluciones diluidas en el lado del permeado, podemos aproximar:

$$\begin{aligned} c_{A2m} &\cong c_{A2} \\ c_{B2m} &\cong c_2 \end{aligned} \quad (43)$$

Y finalmente la ecuación 42 queda como sigue:

$$c_{A2} \cong \frac{M_p c_{A1}}{1 + \kappa [\Delta P - \pi_1 (M_p c_{A1}) + \pi_2 (c_{A2})]} \quad (44)$$

Las concentraciones c_{A1} y c_{A2} son las concentraciones de soluto en el seno principal de las soluciones de alimentación y permeado, respectivamente. Las ecuaciones 42 o 44 relacionan solo concentraciones locales, y que estas pueden variar, principalmente, a lo largo de la superficie de la membrana en la misma dirección de las corrientes de alimentación o de permeado.

5- Módulo de mezcla completa

El módulo de mezcla completa es un patrón de flujo idealizado que supone:

- Flujo pistón de los fluidos que circulan por la cámara de alimentación o rechazo, y por la cámara de permeado.
- Composición uniforme independiente de la geometría de la cámara, en ambos, alimentación y permeado.
- La composición de soluto en la corriente de rechazo es igual a la composición de soluto en el interior de la cámara de alimentación o rechazo.
- La composición de soluto en la corriente de permeado es igual a la composición de soluto en la cámara de permeado.

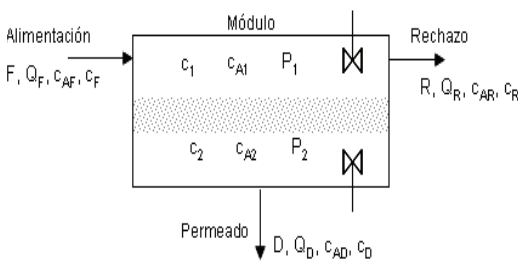


Figura N.º 5. Esquema del módulo de osmosis inversa: Las concentraciones c_{A1} y c_{A2} pueden variar en dirección de flujo y no son iguales a las concentraciones de rechazo y permeado, respectivamente

La figura N.º 5 muestra las condiciones de las corrientes para el modelo de mezcla completa.

Las suposiciones mencionadas expresan que:

$$\begin{aligned} M_p &\cong 1 \\ c_{AD} &\cong c_{A2} \\ c_{AR} &\cong c_{A1} \end{aligned} \quad (45)$$

Luego, reemplazando estas condiciones en la ecuación 44:

$$c_{AD} = \frac{c_{AR}}{1 + \kappa [\Delta P - \pi_1(c_{AR}) + \pi_2(c_{AD})]} \quad (46)$$

La ecuación 46 no permite un cálculo directo de alguna de las composiciones debido a que las presiones osmóticas dependen de ellas.

Por otro lado, si definimos el corte como la relación de flujos molares de permeado a alimentación, el mismo que puede expresarse en termino de flujos volumétricos para soluciones diluidas, es decir:

$$\theta = \frac{D}{F} = \frac{c_D Q_D}{c_F Q_F} \cong \frac{Q_D}{Q_F} \quad (47)$$

Al reemplazar la ecuación 47 en la ecuación 16 de balance de materia, obtenemos:

$$c_{AR} = \frac{c_{AF} - \theta c_{AD}}{1 - \theta} \quad (48)$$

Combinando las ecuaciones 47 y 48 obtenemos:

$$c_{AD} = \frac{c_{AF}}{1 + \kappa(1 - \theta) [\Delta P - \pi_1(c_{AR}) + \pi_2(c_{AD})]} \quad (49)$$

Y reemplazando 49 en 48:

$$c_{AR} = \frac{c_{AF} \{1 + \kappa [\Delta P - \pi_1(c_{AR}) + \pi_2(c_{AD})]\}}{1 + \kappa(1 - \theta) [\Delta P - \pi_1(c_{AR}) + \pi_2(c_{AD})]} \quad (50)$$

Finalmente, el flujo volumétrico de permeado se relaciona con el flux molar del solvente y el área de la membrana:

$$N_B A_m = \frac{c_{BD}}{c_D} D = c_{BD} Q_D \cong c_D Q_D \quad (51)$$

Reemplazando el flux molar de solvente dado por la ecuación 24, y despejando el caudal obtenemos:

$$Q_D = \frac{\kappa_B A_m}{c_D} [\Delta P - \pi_1(c_{AR}) + \pi_2(c_{AD})] \quad (52)$$

Las ecuaciones 49, 50 y 52 representan las relaciones combinadas del balance de materia en el módulo, suponiendo mezcla completa, con el modelo de transporte solución-difusión.

III. METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

El sistema de ecuaciones diferenciales no lineales está constituido por:

$$\frac{dV_D}{dt} = Q_D \quad (4)$$

$$\frac{d\bar{c}_{AD}}{dt} = \frac{Q_D}{V_D} (c_{AD} - \bar{c}_{AD}) \quad (6)$$

$$\frac{dc_{AF}}{dt} = \left[\frac{Q_D c_{AF}}{(V_{F0} + V_{D0}) - V_D} \right] \left(\frac{c_{AF} - c_{AD}}{c_{AF}} \right) \quad (21)$$

$$\theta = \frac{D}{F} = \frac{c_D Q_D}{c_F Q_F} \cong \frac{Q_D}{Q_F} \quad (47)$$

$$c_{AD} = \frac{c_{AF}}{1 + \kappa(1 - \theta) [\Delta P - \pi_1(c_{AR}) + \pi_2(c_{AD})]} \quad (49)$$

$$c_{AR} = \frac{c_{AF} \{1 + \kappa [\Delta P - \pi_1(c_{AR}) + \pi_2(c_{AD})]\}}{1 + \kappa(1 - \theta) [\Delta P - \pi_1(c_{AR}) + \pi_2(c_{AD})]} \quad (50)$$

$$Q_D = \frac{\kappa_B A_m}{c_D} [\Delta P - \pi_1(c_{AR}) + \pi_2(c_{AD})] \quad (52)$$

Presión osmótica en función de la concentración^[3]:

$$\pi = 0.04572c - 1.797 \times 10^{-6} c^2 + 4.631 \times 10^{-9} c^3 \quad (53)$$

Condiciones iniciales:

$$t = 0$$

$$V_D = V_{D0}, \quad V_F = V_{F0} \quad (54)$$

$$c_{AF} = c_{AF0}, \quad c_{AR} = 0, \quad c_{AD} = 0, \quad \bar{c}_{AD} = 0$$

En esta primera parte del trabajo, se supone módulo de mezcla completa, es decir cuando el módulo de polarización es 1.

El sistema planteado constituye un problema de valor inicial, cuya solución aproximada se realiza mediante técnicas numéricas de iteración. Una familia importante de estas técnicas son los métodos de Runge-Kutta^[12, 13]. Hemos ensayado con dos métodos explícitos: Runge-Kutta 4to grado (RK4) y Runge-Kutta-Fehlberg(RKF)^[13]. El primero integra las ecuaciones diferenciales en pasos de tamaño iguales, por lo tanto el número total de pasos tiende a ser muy grande. En el segundo método, el tamaño del paso puede aumentar o disminuir de acuerdo a un error preestablecido para las variables dependientes.

La implementación de estos métodos se ha hecho en Visual Basic de 32 y 64 bits.

La Tabla N.º 1 muestra las condiciones de trabajo para probar los métodos de RK4 y RKF. Las Figuras N.º 6, 7 y 8 muestran los resultados de la integración para la relación cAF/cAF0. La cAF0= 0.0855 kmol/m3.

La tabla N.º 1 muestra que se requieren 3000 pasos de integración por el método de RK4 en un intervalo de 3 horas. En cambio, el método de RKF requiere de 3677 en un intervalo de 200 horas. En el método RK4 el tamaño de paso es constante e igual a 0.001 horas; en el método RKF el paso inicial es el mismo pero este va incrementándose hasta alcanzar el valor de 0.05 horas.

Las tolerancias que aparecen en la tabla N.º 1 representan la precisión que se requiere en el cálculo del volumen y la concentración.

Tabla N.º 1. Condiciones de trabajo para ensayar los métodos de RK4 y RKF.

Método de RUNGE-KUTTA-FEHLBERG				
paso inicial horas	Tolerancia		Total de pasos	Tiempo final calculado, horas
	m3	kmol/m3		
5,E-03	1,E-05	1,E-07	138	197,51
	1,E-05	1,E-08	918	199,78
	1,E-08	1,E-08	2101	115,36
1,E-03	1,E-05	1,E-08	921	199,87
	1,E-07	1,E-08	3677	199,94
Método de RUNGE-KUTTA-4º				
1,E-03			3000	3

La Figura N.º 6 compara el efecto de las tolerancias con el método de RKF para el mismo paso inicial = 0.005 horas. La figura muestra que disminuir 10 veces la tolerancia para la concentración tiene mayor efecto en los cálculos que disminuir 1000 veces la tolerancia para el volumen. La Figura N.º 7 muestra el efecto de la tolerancia para el volumen, cuando el paso inicial es 0.001 horas. En este caso los resultados prácticamente son los mismos a pesar que la tolerancia para el volumen disminuye 100 veces.

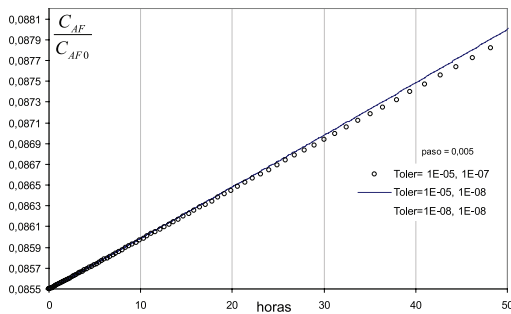


Figura N.º 6. La variación de la concentración en el tanque de alimentación calculado por el método de RKF, para el paso inicial = 0.005 horas.

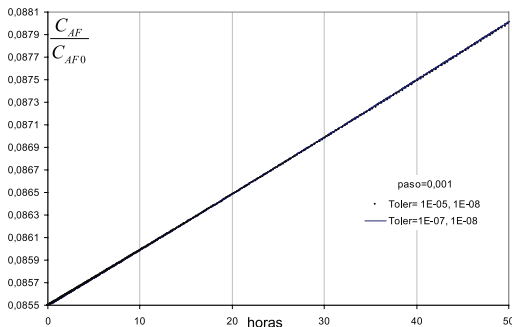


Figura N.º 7. La variación de la concentración en el tanque de alimentación calculado por el método de RKF, para el paso inicial = 0.001 horas.

La Figura N.º 8 compara el método de RK4 con RKF, con el mismo paso inicial de 0.001 horas y tolerancias de 10⁻⁷ y 10⁻⁸ para el volumen y la concentración respectivamente. Se observa de la figura que los resultados son bastantes próximos, pero

evidentemente el método de RKF requiere menos pasos (3677) que el método RK4 (200/0.001=200000) para el mismo intervalo de tiempo (200 horas).

Nosotros adoptamos el método de RKF con tolerancias 10⁻⁷ y 10⁻⁸ para el volumen y la concentración respectivamente.

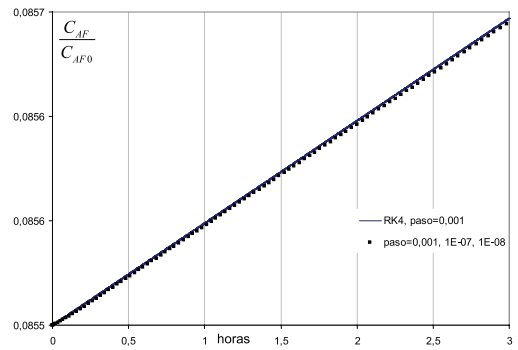


Figura N.º 8. la concentración en el tanque de alimentación calculada por los métodos de RK4 y RKF con un paso inicial = 0.001 horas.

IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La Tabla N.º 2 muestra las condiciones y los parámetros usados en la solución del sistema de ecuaciones diferenciales para el proceso de OI cuando el módulo de la polarización por concentración es igual a 1. El tiempo de circulación de agua pura, antes de agregar la sal al tanque de alimentación, es de 10 horas.

Tabla N.º 2. Condiciones de operación en el sistema de osmosis inversa para la simulación numérica.

Soluto	Cloruro de sodio (NaCl)
Solvente	Agua
Densidad, kg/m3	1000
VF, para t<0, m3	5
toperación, t<0, hr	10
QF0, m3/h	0,1
Selectividad, 1/bar	0,5
Permeabilidad de soluto, m/h	0,001368
Permeabilidad de solvte, kmol/hm2bar	0,0432
CAD, para t=0, kmol/m3	0
CAD promedio, para t=0, kmol/m3	0
CAR, para t=0, kmol/m3	0
paso inicial, hora	0,001
Tolerancia Vol,m3	0,0000001
Tolerancia Conc,kmol/m3	0,00000001

La Tabla N.º 3 presenta los casos resueltos: efecto del área de membrana, casos 1 y 2; efecto de la caída de presión transmembrana, casos 1 y 3; y efecto de la concentración inicial en el tanque de alimentación, casos 1 y 4.

Tabla N.º 3. Casos resueltos en la simulación numérica para comparar el efecto de las variables de operación: área, presión y concentración

Caso	Área m ²	Caída de presión transmbna, bar	Concentración en el TK alimentación, kmol/m ³	Tiempo final, hrs	Nº pasos
1	0,15	30	0,0855	800	14019
2	0,45	30	0,0855	415	21001
3	0,15	90	0,0855	348	21001
4	0,15	30	0,2565	800	10277

La Tabla N.º 4 muestra las condiciones iniciales para cuando el flujo a través del módulo de ósmosis inversa es agua pura.

Tabla N.º 4. Condiciones iniciales en el sistema de osmosis inversa. Los valores corresponden agua pura.

Caso	Volumen inicial V _{F0} , m ³	Volumen inicial V _{D0} , m ³	Caudal inicial Q _{D0} , m ³ /h
1	4,965	0,0349	0,003499
2	4,895	0,1049	0,010497
3	4,895	0,1049	0,010497
4	4,965	0,0349	0,003499

Las Figuras N.º 9, 10, 11 y 12 muestran el efecto del aumento del área de la membrana en el cálculo del volumen de permeado (VD), caudal de permeado (QD), la concentración de sal en el tanque de alimentación (CAF) y la concentración de sal promedio en el tanque de permeado, respectivamente (casos 1 y 2 de la tabla N.º 3)

La figura 9 muestra el aumento de volumen de permeado a medida que aumenta el tiempo de operación para cualquier área de membrana. El cambio de volumen es más rápido en el caso de mayor área. En las primeras 10 horas el aumento de volumen es lento, y este se hace más rápido después de las 60 horas en el caso de 0.15 m² de área y, 30 horas para el caso de 0.45 m² de área.

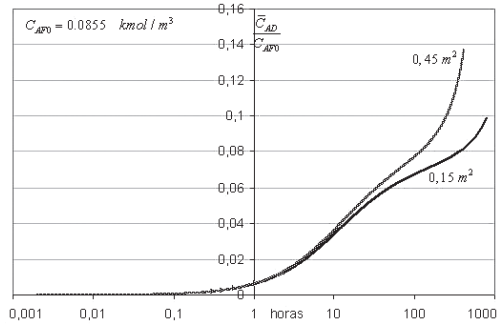


Figura N.º 9. Volumen de permeado en función del tiempo y del área de membrana.

La Figura N.º 10 muestra la relación del caudal de permeado a caudal permeado de agua pura, en función del tiempo y del área de membrana. Al inicio la relación disminuye lentamente, pero se hace más rápida mas allá de las 60 horas en el caso de 0.15 m² de área y después de las 30 horas en el caso de 0.45 m². Al cabo de 415 horas el caudal es el 63% del caudal inicial cuando el área es 0.45 m² comparado al 78% que se alcanza después de 800 horas en el caso de 0.15 m²

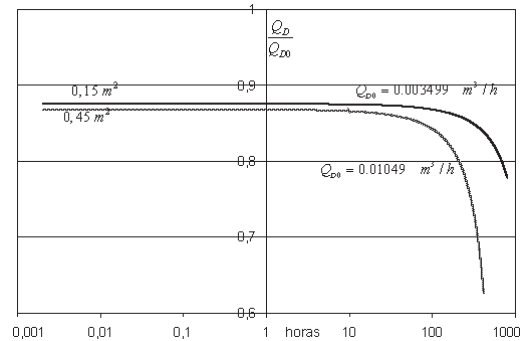


Figura N.º10. El caudal de permeado como función del tiempo y del área de membrana.

La Figura N.º 11 muestra la variación de la concentración de sal en el tanque de alimentación, en función del tiempo. El aumento de la concentración se debe al retorno de la corriente de rechazo al tanque de alimentación. Al inicio la variación es lenta luego se incrementa más rápidamente en el caso del área de 0.45 m² con respecto al caso del área de 0.15 m². Aunque no mostramos la variación de la concentración en la corriente

de rechazo, esta se incrementa de la misma forma que la mostrada en la figura N.º 11 y, el incremento puede llegar a ser hasta 3 veces la concentración de la alimentación inicial, en el caso del área de 0.45 m². El aumento de la concentración de rechazo aumenta la presión osmótica de la corriente de rechazo lo cual reduce el flujo de permeado de acuerdo a la ecuación 52.

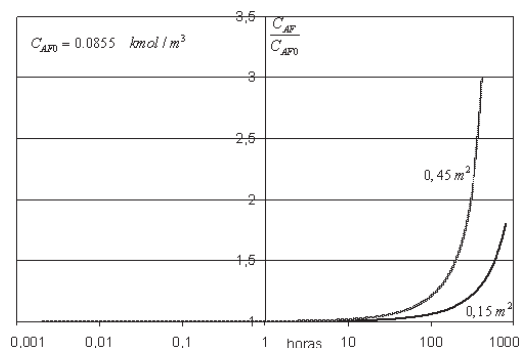


Figura N.º 11. La concentración de soluto en el tanque de alimentación en función del tiempo y del área de membrana.

La Figura N.º 12 muestra la variación de la concentración promedio en el tanque de permeado en función del tiempo. La concentración en el tanque de permeado aumenta más rápidamente para cuando el área es 0.45 m² que cuando esta es 0.15 m².

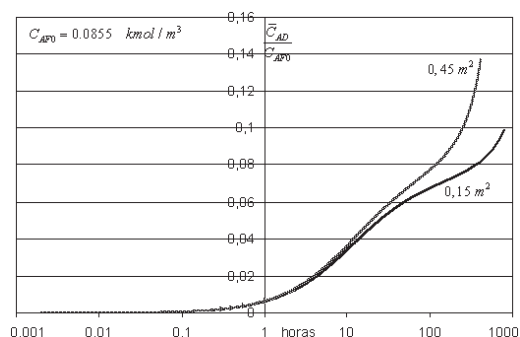


Figura N.º 12. La concentración promedio de soluto en el tanque de permeado, como función del tiempo y del área de membrana.

Las Figuras N.º 13, 14, 15 y 16 muestran el efecto del aumento de la caída presión

transmembrana en el cálculo del volumen de permeado (VD), caudal de permeado (QD), la concentración de sal en el tanque de alimentación (CAF) y la concentración de sal promedio en el tanque de permeado, respectivamente (casos 1 y 3 de la Tabla N.º 3).

La figura N.º 13 muestra que el volumen de permeado aumenta más rápidamente para la presión de 90 bar, que en el caso de 30 bar.

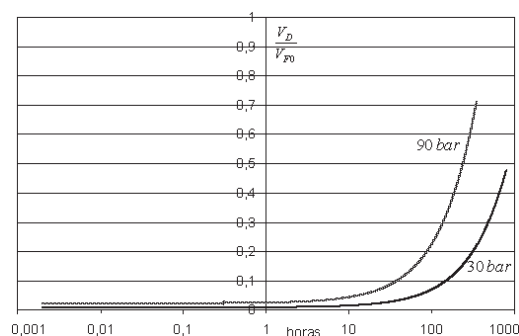


Figura N.º 13. El volumen de permeado en función del tiempo y la caída de presión transmembrana.

La Figura N.º 14 muestra el caudal de permeado en función del tiempo y de la caída de presión transmembrana. Se observa que la relación de caudales disminuye lentamente en los primeros instantes para luego disminuir rápidamente. El descenso rápido se inicia en un periodo menor de tiempo, cuando la presión es de 90 bar comparado al de 30 bar.

La Figura N.º 15 muestra la variación de la concentración de sal en el tanque de alimentación. Se observa que a mayor presión, el aumento de la concentración es más rápida, similar al caso del aumento de área, figura 11.

En la Figura N.º 16 se muestra el aumento de la concentración promedio de sal en el tanque de permeado. Se observa que a mayor presión más lenta es la variación a diferencia del aumento de área, figura 13. Esto se explica porque a mayor presión, mayor flujo de permeado haciendo más diluida la solución de permeado.

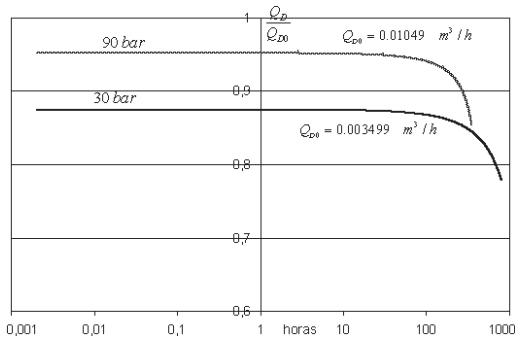


Figura N.º 14. El caudal de permeado como función del tiempo y de la caída de presión transmembrana.

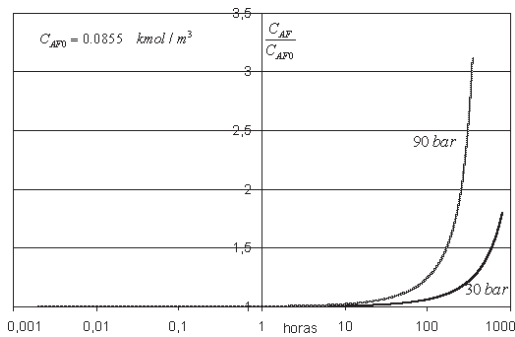


Figura N.º 15. La concentración en el tanque de alimentación en función del tiempo y de la caída de presión transmembrana.

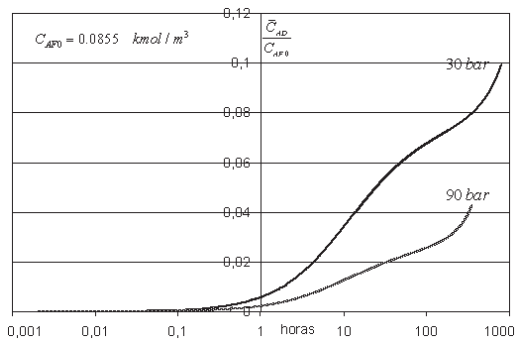


Figura N.º 16. La concentración promedio en el tanque de permeado en función del tiempo y la caída de presión transmembrana.

Las Figuras N.º 17, 18, 19 y 20 muestran el efecto del aumento de la concentración inicial en el cálculo del volumen de permeado (VD), caudal de permeado (QD), la concentración de sal en el tanque de alimentación (CAF) y la concentración de sal promedio en el tanque de permeado, respectivamente (casos 1 y 4 de la Tabla N.º 3).

La Figura N.º 17 muestra el aumento del volumen de permeado. Se observa que la variación del volumen es más rápida para cuando la concentración inicial es más diluida. Para 800 horas de operación se alcanza el 48% de recuperación como volumen de permeado; a diferencia de las figura 9 y 13, donde se observa que se alcanza una recuperación del 71% en 415 y 349 horas, respectivamente.

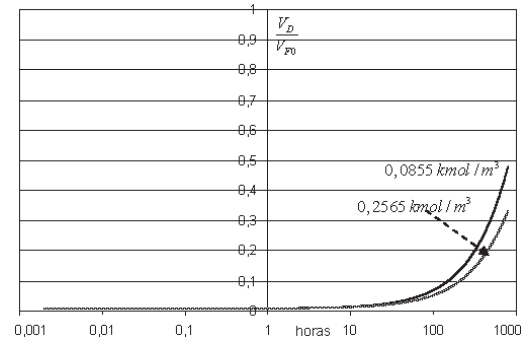


Figura N.º 17. El volumen de permeado en función de la concentración inicial en el tanque de alimentación.

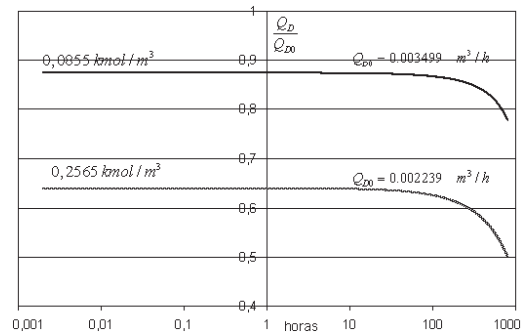


Figura N.º 18. El flujo de permeado en función del tiempo y la concentración inicial en el tanque de alimentación.

La Figura N.º 18 muestra la relación de caudales de permeado a medida que el tiempo progresa, en función de las concentraciones iniciales en el tanque de alimentación. La relación de caudales disminuye lentamente al inicio y, el descenso brusco ocurre casi para el mismo periodo de tiempo, alrededor de 100 horas.

La Figura N.º 19 muestra que la concentración de sal en el tanque de alimentación varía más rápidamente cuando la concentración inicial es más diluida.

En la Figura N.º 20 se observa que la concentración de soluto promedio en el tanque de permeado aumenta más rápidamente cuando la concentración inicial es más concentrada.

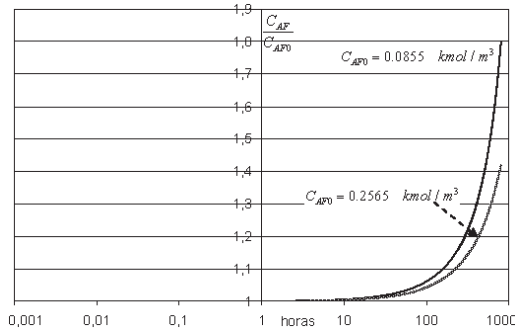


Figura N.º 19. La concentración en el tanque de alimentación como función del tiempo y la concentración inicial.

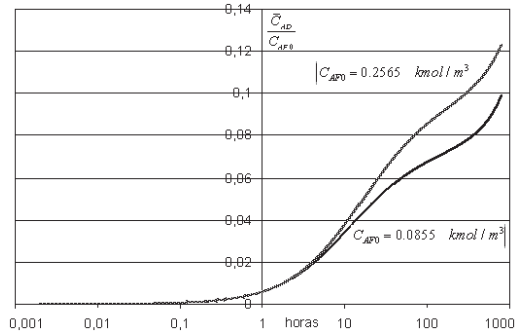


Figura N.º 20. La concentración promedio en el tanque de permeado en función del tiempo y la concentración inicial

La Tabla N.º 5 muestra la reducción del caudal de permeado calculado como: $1-(Q_D/Q_{D0})$, en los primeros 7 segundos del proceso. Al comparar los casos 1 y 2, se establece que el aumento del área de la membrana reduce el caudal en la misma proporción, 12 a 13%. El aumento de presión reduce el caudal en 5%, caso 3. El aumento de la concentración, caso 4, reduce el caudal en 36%. Esto último se debe al aumento de la presión osmótica con la concentración. Así mismo, la tabla 5 muestra que un aumento de tres veces el área o la presión produce una recuperación del 2% respecto al volumen de alimentación inicial (casos 2 y 3). En cambio, el aumento de 3 veces la concentración inicial en el tanque de alimentación produce solo una recuperación de 0.7% (casos 1 y 4).

Tabla N.º 5. Reducción del caudal de permeado en función del aumento: de área, la caída de presión y la concentración inicial.

Caso	En los primeros 7 segundos	
	Relación volumen V_p/V_{F0}	Reducción de caudal $1-(Q_D/Q_{D0})$
1	0,00705	0,124
2	0,02145	0,132
3	0,02145	0,047
4	0,00705	0,360

La Tabla N.º 6 muestra la relación de volúmenes (V_D/V_{F0}), la reducción del caudal de permeado ($1- Q_D/Q_{D0}$) y la relación de concentración de rechazo a a la alimentación inicial (C_{AR}/C_{AF0}) al cabo de 100 horas de operación.

Tabla N.º 6. Relación de volumen de permeado, reducción del caudal de permeado y concentración de rechazo respecto a las condiciones iniciales, para 100 horas de operación.

Caso	Relación de volumen V_p/V_{F0}	Reducción del caudal de permeado : $1- Q_D/Q_{D0}$	Relación de concentraciones, C_{AR}/C_{AF0}
1	0,0685	0,1317	1,091
2	0,205	0,1580	1,313
3	0,2247	0,0584	1,381
4	0,0516	0,3743	1,063

De la tabla 6 se deduce que un incremento de tres veces el área de membrana o de la presión produce una recuperación de volumen de permeado de 20.5% y 22.5%, casos 2 y 3, respectivamente, a pesar que la concentración de la alimentación y de rechazo están aumentando. Así mismo, comparando los casos 1 y 4, se observa que la recuperación de volumen de permeado es más rápida para soluciones diluidas, caso 1, que para soluciones concentradas, caso 4. Comparando las tablas 5 y 6, la recuperación aumenta de 0.7% a 6.85%, caso 1; y de 0.7% a 5.16%, caso 4.

Por otro lado, en todos los casos, la tabla 6 muestra que el aumento de la concentración de la alimentación o de rechazo con el tiempo, hace que la reducción del caudal de permeado se incremente respecto al valor inicial que se mostraba en tabla 5.

En relación a la concentración de la corriente de rechazo esta aumenta en una proporción

similar, 31 y 38% respecto a la concentración inicial en el tanque de alimentación, cuando la presión y el área de membrana aumentan 3 veces, casos 2 y 3. Al comparar los casos 1 y 4, se observa que para una concentración inicial $c_{AF0} = 0.0855 \text{ kmol/m}^3$ la concentración de rechazo se incrementa en 9%, comparado al 6% de incremento para cuando la concentración inicial $c_{AF0} = 0.2565 \text{ kmol/m}^3$.

La Figura N° 21 muestra la relación de concentraciones de la corriente de rechazo a la corriente de alimentación en función del tiempo para los cuatro casos estudiados. Se observa que la concentración de rechazo aumenta por encima de la concentración de alimentación, en todos los casos, pero la magnitud del aumento es mayor al aumentar tres veces la presión transmembrana comparado al aumento de tres veces el área de membrana. Por otro lado, al comparar los casos 1 y 4, se observa que el aumento de concentración inicial en el tanque de alimentación reduce la magnitud del aumento de la concentración de rechazo. La relación de concentraciones disminuye lentamente en todos los casos, posteriormente se inicia un descenso brusco alrededor de 500 horas, casos 1 y 4, comparado a los casos 2 y 3 donde el descenso brusco se inicia alrededor de 200 horas.

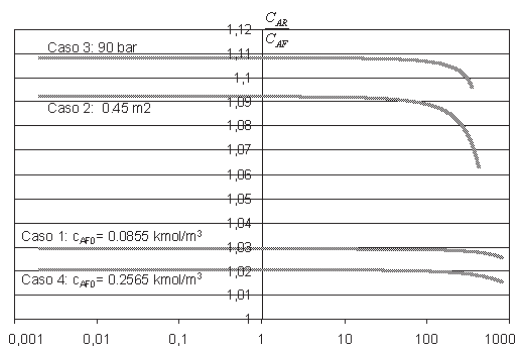


Figura N.º 21. La relación de concentraciones de rechazo a alimentación en cualquier instante para los casos 1, 2, 3 y 4.

V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

1. El incremento del área de membrana o de la presión en la cámara de alimentación, aumenta el volumen de permeado recuperado.
2. El incremento de la concentración inicial de soluto en el tanque de alimentación afecta severamente la reducción del flujo de permeado.
3. La contaminación del permeado con la sal (concentración promedio de sal en el tanque de permeado) se incrementa con el aumento del área, se reduce con el aumento de la presión, y aumenta cuando la concentración inicial es más concentrada.
4. En todos los casos estudiados, la concentración de la corriente de rechazo es mayor que la concentración de la alimentación en las primeras horas de operación para luego disminuir.
5. Se recomienda implementar el método de Runge-Kutta-Michelsen^[14] cuya solución implícita permitiría reducir el número de pasos en la iteración.

VI. NOMECLATURA

A_m : área de membrana, m²

c_A : concentración molar del soluto o sal, kmol/m³

c_B : concentración molar de solvente, kmol/m³

c_{AF} , c_{AD} , c_{AR} : concentración molar de las corrientes de alimentación, de permeado y rechazo, respectivamente, kmol/m³

c_F , c_D , c_R : concentración molar total de las corrientes de alimentación, de permeado y de rechazo, respectivamente, kmol/m³.

D : flujo molar de la corriente de permeado, kmol/h

F: flujo molar de la corriente de alimentación, kmol/h

k_L : coeficiente de transferencia de masa en fase líquida, m/h

N_A , N_B : flux molares del soluto A, y del solvente B, respectivamente, kmol/m² h

Q_F , Q_D , Q_R : caudal de las corrientes de alimentación, de permeado y de rechazo, respectivamente, m³/h.

R: flujo molar de la corriente de rechazo, kmol/h

t: tiempo, h

V_F , V_D : volumen de solución en el tanque de alimentación y permeado, respectivamente, m³.

δ : espesor de membrana o de película, m

π : presión osmótica, bar

ΔP : caída de presión transmembrana, bar

K_A : constante de permeabilidad de soluto, m²/h

K_B : constante de permeabilidad de solvente, kmol/h m² bar

$K = K_B / (K_A C_{B2m})$ selectividad de la membrana, 1/bar

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] June-Seok Choi, Sangho Lee, Jin-Min Kim, Suingil Choi, Small-scale desalination plants in Korea: Technical challenges, *Desalination* 2009; 249: 222-232.
- [2] Baker Richard W., *Membrane Technology and Applications*, Ed. John Wiley & Sons Ltd 2004, p. 15
- [3] Eric Lyster, Yoram Cohen, Numerical study of concentration polarization in a rectangular reverse osmosis membrane channel: permeate flux variation and hydrodynamic end effects, *J. of Membrane Science* 2007; 303: 140-153.
- [4] Kim Suhan, Eric M.V. Hoek, Modeling concentration polarization in reverse osmosis process, *Desalination* 2005; 186: 111-128.
- [5] Da-Wen Su Editor, *Computational Fluid Dynamics in Food Processing*, CRC-Press Taylor & Francis Group, 2007: 433.
- [6] Lianfa Song, Seungkwon Hong, J.Y. Hu, S. L. Ong, and W.J. Ng, Simulations of full-scale reverse osmosis membrane process, *J. of Environmental Engineering*, 2002; 960-966.
- [7] C.S. Slater, J.M. Zielinski, R.G. Wendel, Simulation of reverse osmosis process concentrating industrial wastes, *Manhattan College Chemical Engineering Department Riverdale, N.Y* 10471, 1992: 1175
- [8] K. Jamal, M. A. Khan, M. Kamil, Mathematical modeling of reverse osmosis systems, *Desalination* 2004; 160: 29-42.
- [9] Baker Richard, *Op.cit*, p. 18
- [10] Baker Richard, *Op.cit*, p 161
- [11] Shoji Kimura, S. Sourirajan, Analysis of data in reverse osmosis with porous cellulose acetate membranes used, *AIChE Journal*, 1967; 13: 497-503
- [12] J. D. Lambert, *Numerical Methods for Ordinary differential systems: The Initial Value Problem*, John Wiley & Sons Ltd 1991: 149
- [13] J. C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Edition John Wiley & Sons 2008; 93, 105, 137, 208
- [14] Michael L. Michelsen, An efficient general purpose method for the integration of stiff ordinary differential equations, *AIChE Journal*, 1976; 22: 594-597.