

Manipulação Direta de Curvas com Restrições de Interpenetração

Luis Rivera

Universidade Estadual do Norte Fluminense, LCMAT-CCT,
Av. Alberto Lamego 2000, Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro, Brasil, 28015-620
rivera@uenf.br

RESUMEN

Em modelagem geométrica assistido por computador, segmentos de curvas que definem o objeto devem ser manipulados com o mouse de forma trivial e natural, a fim de se obter detalhes desejados da geometria do contorno do objeto modelado. São várias as operações necessárias para esse propósito: deformações de segmentos com tamanhos e graus desejados, controle de auto-interferências entre segmentos não adjacentes do mesmo objeto, e simplicidade da operação sem envolver parâmetros complexos que requer domínios de outras áreas como a física. Neste trabalho, propomos uma metodologia de deformações baseadas em multiresoluções de manipulação direta para controlar o tamanho desejado dos segmentos a ser deformado, controlamos as auto-interferências baseadas por detecção de colisões usando caixas orientadas que se reconstróem dinamicamente durante o processo de deformações, sem entrar em modelos físicos. Valida-se o método formulado manipulando objetos planos definidos por curvas B-splines cúbicos.

Palabras Clave: Manipulação direta; multiresolução de curvas; auto-interferências; deformações de curvas; modelagem.

ABSTRACT

In modeling geometric represented by computer, the segments of curves that define the object must be handled with the mouse of trivial and natural form in order to obtain wished details of the geometry of the contour of the shaped object. This purpose requires of various operations: deformations of segments with size and wished degrees, control of auto-interference between not adjacent segments of the same object, and simplicity of the operation without wrapping complex parameters that they need dominions of other areas as the physics. In this paper, we propose a methodology based on the deformation multiresolutions of direct manipulation to control the desired size of the segments to be deformed, we control the self-interference through detection of collisions using oriented boxes that these ones reconstruct dynamically during deformation process without coming in physical models. We validate the proposed method trough manipulating flat objects defined by cubic B-spline curves.

Key words: Direct manipulation; multiresolutions of curves, self-interference; deformations of curves; modeling.

1. INTRODUCCIÓN

Em modelagem geométrica assistido por computador (CAGM: computer-aided geometric modelling), é necessário considerar ferramentas que permita uma manipulação de forma natural de segmentos do objeto geométrico, para dar uma geometria desejada. Em tempos atuais, o mouse é o elemento básico e comum para manipular segmentos do objeto, arrastando um ponto na direção e comprimento desejado, de uma maneira natural. Também é importante controlar o comprimento do segmento a deformar, como consequência de arrastar um ponto do objeto, simulando a rigidez do material que representa o objeto, sem envolver notações ou parâmetros confusos para um usuário comum. Outra característica a se considerar na manipulação direta de objetos é respeito ao que diz controle de possíveis interpenetrações de segmentos em deformação com outros segmentos do mesmo objeto, conhecidos na literatura como auto-interferência. As interpenetrações dos contornos dos objetos fazem que esse objeto mude de classe de homotopia, adquirindo uma geometria complexa, nada real respeito aos objetos modelados.

Em este trabalho, formula-se uma metodologia para modelar um objeto plano de contorno definido por segmento de curvas, usando-se a técnica de manipulação direta proposta por Bartels e Beatty [Bartels+ 1989], estendida em termos de multiresolução por Rivera et al. [Rivera+ 1999], de forma a considerar a detecção e prevenção de interpenetrações entre os segmentos do mesmo objetos, conhecidas como auto-interferências, como consequência das deformações ao se arrastar um ponto do contorno no objeto para dar uma forma desejada. São muitas as alternativas fornecidas na linha de manipulação direta para objetos de forma livre. Entre os métodos mais relevantes são baseados em manipulação de pontos de controle [Farin 1990], [Piegl+ 1995], mas que não são adequados para manipulação direta, devido a que não são conhecidas as novas posições dos pontos de controle para uma determinada deformação do segmento desejado. Similar problema se encontra nos métodos baseadas nas operações de pontos de nós em curvas B-splines [Forsey+ 1988], [Lyche+ 1987]. As técnicas de manipulação direta ([Bartels+ 1989], [Fowler+ 1993], [Fowler 1993]) permitem uma deformação intuitiva do

objeto, unicamente arrastando com o mouse um ponto do segmento da curva até uma posição desejada, mas não considera o grau de deformação nem as auto-interferências que poderia ocasionar essa deformação. A deformação interativa baseada em teoria variacional ([Wesselink 1996], [Welch 1995]) é outro método para manipular segmentos de curvas, usando conceitos de minimização de funções de energia. O design variacional usando representações em multiresolução de curvas ([Takahashi+ 1998]; [Takahashi 1998]) permite deformações, suaves editando os efeitos em contínuos níveis de resoluções. Efeitos realistas de deformação de amplitudes desejadas são obtidas usando deformações baseadas em física [Guan+ 1997], mas é difícil determinar a força adequada para uma deformação desejada. Em [Rivera+ 1999] é estendida a manipulação direta formulada por [Bartels+ 1989] e [Fowler 1993] para permitir uma deformação desejada de segmentos de curvas, mas não se consideram as auto-interferências. As detecções de interferências entre segmentos de curvas são analisadas, com diferentes enfoques, em [Dinesh+ 1997] e [Rivera+ 2003], mas não são aplicadas em detecção de auto-interferências. Existem variedades de técnicas para detectar interferências entre objetos em movimento ([Lin 1993], [Gottschalk+ 1996], [Hahn, 1996]; [Hubbard 1995]. [Kamat 1993]), dos quais a técnica de caixas envolventes ([Gottschalk+ 1996]) é aproveitada por [Grispun+ 2001] para análise de detecção de auto-interferência em deformação de superfícies por subdivisão.

Para atingir o objetivo proposto, aborda-se na Seção 2 a representação dos objetos em multiresolução, explicando o método de manipulação direta em multiresolução. Na Seção 3 formaliza-se a estrutura hierárquica parcial para a deformação parcial do segmento do contorno do objeto. A Seção 4 aborda a reconstrução de caixas orientadas seguindo a estrutura hierárquica parcial. A verificação de auto-interferência é abordada na Seção 5; e finalmente, conclui-se na Seção 6.

2. REPRESENTACIÓN DE OBJETO

Para efeitos de testes da metodologia proposta neste trabalho, representa-se um objeto no plano definido por curvas B-splines cúbicas (ordem $k = 4$) para $C = \{c_1, \dots, c_{2n}\}$ pontos de

controle, cujo *j*ésimo segmento básico é definido como $f_j(t) = N(t).C_j$, donde $N(t) = [N_1(t), \dots, N_k(t)]$, para $0 \leq t < 1$, é o vetor de funções base parametrizada, e C_j é o vetor de k pontos de controle vizinhos, em seqüência simétrica do ponto c_j , que geram o segmento f_j ([Rogers+ 1990]).

A notação f representa a curva que define o contorno do objeto, composta por segmentos f_j , e as notações $f^{-1}, f^{-2}, \dots, f^{-m}$ são as representações em multiresolução, seqüências imediatas inferiores, de f obtidas com o algoritmo *fast wavelet transformation* de [Gomes+ 1998], cujos pontos de controle são $C^{-1}, C^{-2}, \dots, C^{-m}$ respectivamente, onde m é o nível desejado permitido. Com essas notações, pode-se considerar f como sendo resolução f^0 . A resolução f^{-i} também é composta por um conjunto de segmentos f_s^{-i} gerados por k pontos de controle agrupados em um vetor C_s^{-i} . A diferença entre seqüência consecutiva de resoluções de f , caso $g^{-1} = f^{-i+1} - f^{-i}$, é a função de detalhe.

Na prática, as transformações de decomposição e reconstrução são feitas no nível de pontos de controle. Na decomposição são usadas as matrizes de filtro de análise A^i e B^i tais que $C^{-i-1} = A^i C^{-i}$ e $D^{-i-1} = B^i C^{-i}$, onde D^{-i-1} é o vetor de coeficientes de detalhe que define g^{-i-1} , e na reconstrução são usadas as matrizes de filtro de síntese P^i e Q^i tais que $C^{-i+1} = P^i C^{-i} + Q^i C^{-i}$.

2.1 Manipulación Directa EM

Uma forma natural de se deslocar o ponto $f_j(t)$ em um vetor Δd é movimentando minimamente os k pontos de controle que geram o segmento f_j ([Bartels+ 1989], [Fowler+ 1993]). Esses k pontos de controle, também, participam na definição de $2k+1$ segmentos vizinhos (k segmentos para ambos os lados de f_j) que variam em certo grau, de

forma que permita uma deformação suave de f . O deslocamento mínimo dos elementos de C_j é computado da forma

$$\Delta C_j = \Delta d \|N(t)\|^{-2} N(t) \quad (1)$$

Quando esses k pontos de controle são próximos um do outro, a deformação de f é aguda, sendo considerado como deformação local, porque unicamente são variados $2k+1$ segmentos vizinhos. Para permitir a deformação de forma natural de maior comprimento de f , é necessário movimentar maior número de pontos de controle. Uma forma eficiente de movimentar maior que k pontos de controle, é distribuindo, segundo alguma função definida $g(t)$, o deslocamento total Δd em um conjunto de sub-deslocamentos $\{\Delta d_i\}_{i=1, \dots, m}$, para serem aplicados nas projeções do ponto $f_j(t)$ nas respectivas resoluções f^{-i} , ([Rivera+ 1999]). Cada projeção de $f_j(t)$ em f^{-i} é deslocado em um vetor Δd_i , usando-se (1), da forma:

$$\Delta C_{h_{j,i}}^{-i} = \Delta d_i \|N(t_{h_{j,i}})\|^{-2} N(t_{h_{j,i}}) \quad (2)$$

onde o parâmetro $t_{h_{j,i}}$ corresponde a t na projeção de $f_j(t)$ na resolução f^{-i} , detalhado em [Rivera 2000], o sub-índice $h_{j,i} = \left\lfloor \frac{j}{2^i} \right\rfloor$.

O teorema a seguir valida o efeito de deslocamentos de Δd em qualquer resolução de f correspondente ao ponto $f_j(t)$.

Teorema 1: Se $p = f_j(t) + \Delta d$ (o ponto $f_j(t)$ deslocado em Δd), então $p = f_{h_{j,i}}^i(t_{h_{j,i}}) + \Delta d + G$, onde G é a soma dos elementos de detalhe da decomposição de f até nível i .

Prova-se este teorema deformando em Δd e descompondo cada resolução de f até f^{-i} , e reconstruindo com a adição dos detalhes de decomposição, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 p &= f_j(t) + \Delta d \\
 &= f_{h_{j,1}}^{-1}(t_{h_{j,1}}) + g_{h_{j,1}}^{-1}(t_{h_{j,1}}) + \Delta d \text{ decomposto} \\
 &= f_{h_{j,2}}^{-2}(t_{h_{j,2}}) + g_{h_{j,2}}^{-2}(t_{h_{j,2}}) + g_{h_{j,1}}^{-1}(t_{h_{j,1}}) + \Delta d \text{ decomposto} \\
 &\dots \\
 &= f_{h_{j,i}}^{-i}(t_{h_{j,i}}) + \sum_{s=1}^{i-1} g_{h_{j,s}}^{-s}(t_{h_{j,s}}) + \Delta d \text{ decomposto}
 \end{aligned}$$

Sendo $G = \sum_{s=1}^i g_{h_{j,s}}^{-s}(t_{h_{j,s}})$ a soma dos elementos de detalhes reconstruídos.]

Corolário 1: O deslocamento em Δd do ponto $f_j(t)$ é equivalente ao acumulado da seqüência dos deslocamentos em $\{\Delta d_i\}_{i=1,\dots,m}$, sub-deslocamento de Δd , dos pontos projeções de $f_j(t)$ nas resoluções inferiores respectivas.

A prova deste corolário é imediata. Pelo Teorema 1, o deslocamento em Δd_1 do ponto p_1 , que é a projeção de $f_j(t)$ na resolução f^{-1} , é equivalente ao deslocamento em Δd_1 de $f_j(t)$. Similar forma, o deslocamento em Δd_2 da projeção de $f_j(t) + p_1$ na resolução f^{-2} é equivalente ao deslocamento em

$\Delta d_1 + \Delta d_2$ de $f_j(t)$. Em geral, o processo de deslocamentos em $\{\Delta d_i\}_{i=1,\dots,m}$ nas resoluções inferiores permite o deslocamento em $\Delta d_1 + \Delta d_m$ de $f_j(t)$.]

No processo de deformação de segmentos de contornos em multiresolução, ainda existem alguns detalhes a se considerar, recomendado por [Finkelstein+ 1994], para preservar os detalhes originais dos segmentos, que consistem em expressar os coeficientes de detalhe, na etapa de decomposição, em notação polar, de forma que na variação dos coeficientes de escala, as orientações dos vetores de coeficientes de detalhe continuem com as mesmas características originais.

A figura 1 mostra o deslocamento de $f_j(t)$ em Δd , até em quatro resoluções inferiores por vez. Observa-se que se o deslocamento Δd é aplicado na resolução inferior, a amplitude de deformação é maior (curva pontilhada externa da figura) que deslocando em Δd o ponto $f_j(t)$, a curva trancelhada interior da figura. Com isso, pode-se manipular amplitude variados de segmentos unicamente distribuindo Δd em sub-deslocamentos Δd_i para resoluções inferiores do contorno.

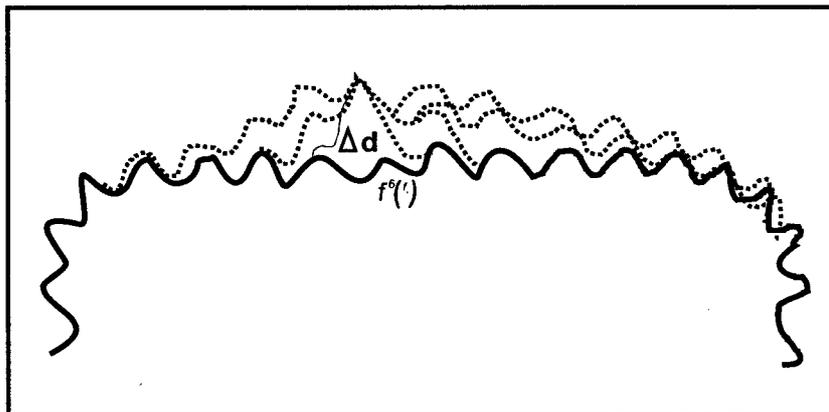


Figura 1. Deformações variadas de uma curva: maior largura (superior) determinada por deslocamento na resolução inferior; menor largura (interior) obtida com deslocamento sem distribuição de vetor de variação nas resoluções inferiores.

2.2. Árvore binária de caixas orientadas envolventes

Uma estrutura em árvore binária de caixas orientadas envolventes permite uma rápida verificação de interferência entre objetos em movimento ([Rivera+ 2000a], [Gottschalk+ 1996]). Pretende-se usar essa técnica na rápida verificação de interferências entre segmentos que movimentam do mesmo objeto.

Cada vértice da árvore é uma caixa orientada envolvendo adaptada e ajustadamente um conjunto de um ou mais segmentos básicos do contorno f . Por conveniência, a árvore é construída de folhas para raiz, sendo cada folha uma caixa orientada básica envolvendo adaptada e ajustadamente um segmento básico f_j . Os vértices imediatos ancestrais envolvem ajustadamente cada par de folhas adjacentes; os imediatos ancestrais¹ a elas envolvem adaptada e ajustadamente as caixas básicas envolvidas por cada par de caixas neste nível, etc. até a raiz que envolve adaptada e ajustadamente todas as caixas básicas do contorno f . A Figura 2 mostra um segmento da estrutura de caixas orientadas

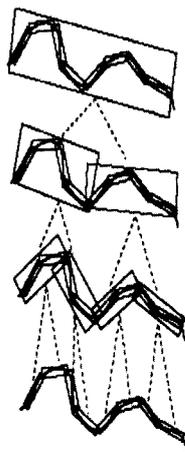


Figura 2. Hierarquia de caixas envolventes orientadas.

¹ Um vértice é ancestral descendente direto ou filho.

Em geral, a definição de cada caixa é feita em duas etapas: *adaptação* e *ajuste*. Na etapa de adaptação, um segmento f_j é amostrado uniformemente em p pontos ($p=5$ é indicado). Os autovetores da matriz de covariância desses p pontos definem os eixos da caixa. Caso das caixas ancestrais, os segmentos f_j são os segmentos de resoluções que correspondem a esse nível; exemplo f^{-1} corresponde ao nível 1 (ancestrais das folhas), f^{-2} corresponde ao nível 2 antes das folhas, etc. Na etapa ajuste, definem-se as dimensões das caixas de forma ajustada ao segmento (caso de caixas básicas) e ajustada às caixas básicas, no caso de caixas ancestrais.

Sabe-se que a projeção desses elementos sobre os eixos pode definir as dimensões ajustadas. O detalhe de construção de caixas orientadas em multiresolução é tratado em [Rivera+ 2003].

3. ÁRVORE BINÁRIA PARCIAL

Definição: *Árvore binária parcial enraizada R é uma sub-árvore de uma árvore G envolvendo um subconjunto de m folhas adjacentes com a mesma raiz e altura de G .*

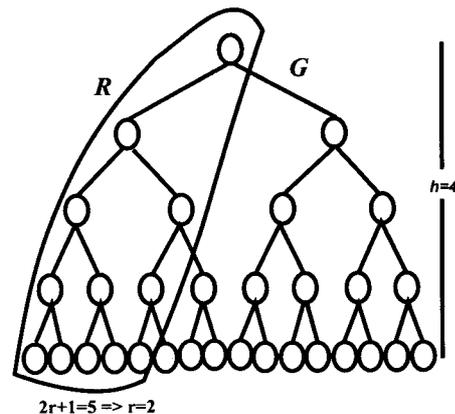


Figura 3: Uma árvore binária parcial enraizada R de 5 folhas associada a uma árvore binária completa G de 16 folhas.

A figura 3 mostra uma árvore binária parcial enraizada R associada a uma árvore binária completa G . Observa-se que R é uma árvore binária incompleta, sendo esta uma de suas características. Dada uma árvore binária completa G de n folhas e altura h , o número de vértices de todas as árvores binárias parciais enraizadas de $q = 2r+1$ folhas, com $q < n$ e um valor de r , podem variar dentro de um intervalo definido por um teorema formulado a seguir.

Teorema 3: Uma árvore binária parcial enraizada R de $q = 2r+1$ folhas, de uma árvore binária completa G de altura h , é composta por s vértices, tal que

$$h+1 + \sum_{j=1}^h \left\lfloor \frac{r}{2^{j-2}} \right\rfloor \leq s \leq h+1 + \sum_{j=1}^h \left\lceil \frac{r}{2^{j-2}} \right\rceil \quad (3)$$

A prova do teorema é simples, considerando a característica da árvore binária completa G de $h+1$ níveis de vértices. Os $2r+1$ vértices adjacentes do nível h (folhas) de G geram os $r+1$ vértices adjacentes no nível $h-1$; esses, ao mesmo tempo, definem um mínimo de $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$ e um máximo de $\lceil \frac{r}{2} \rceil + 1$ vértices. Assim sucessivamente até o nível 1 com mínimo de $\lfloor \frac{r}{2^{h-2}} \rfloor + 1$ e máximo de $\lceil \frac{r}{2^{h-2}} \rceil + 1$ vértices. Como é lógico, qualquer árvore binária parcial enraizada possui de raiz a mesma de G , sendo essa raiz o vértice do nível zero. A soma respectiva desses vértices define as cotas da expressão do teorema. A desigualdade é implícita porque $\sum_{j=1}^{h-2} \lfloor \frac{r}{2^j} \rfloor \leq \sum_{j=1}^{h-2} \lceil \frac{r}{2^j} \rceil$.

4. RECONSTRUÇÃO DAS CAIXAS

O deslocamento do ponto $f_j(t)$ ocasiona a variação dos segmentos $\{f_{s+j}\}_{-r \leq j \leq r}$, para um dado valor r . A variação desses segmentos também acarretam variações das respectivas caixas básicas (folhas) envolventes e suas super-caixas (ancestrais), segundo a estrutura de uma árvore binária parcial enraizada

associada às caixas básicas que compõem as folhas.

As caixas básicas são re-computadas em tempo constante, enquanto as super-caixas dependem do nível da árvore em que se encontram. A etapa de “adaptação” é feita em tempo constante, enquanto o “ajuste” depende do número de caixas básicas que devem ser projetadas nos eixos. Em geral, se h é a altura da árvore, as caixas no nível $s=1, \dots, h-1$ demandam a projeção de 2^s caixas básicas que devem ser envolvidas por tal caixa. O número de caixas a serem reconstruídas depende da largura de deformação do contorno, isso leva a classificar as deformações em dois tipos: *básico* ou *composto*.

4.1 Caso básico

Um caso básico é a deformação local, onde variam unicamente dos $2r+1$ segmentos afetados ao se deslocar o ponto $f_j(t)$, já que r é o grau da curva que define o contorno do objeto. Nesta modalidade são reconstruídas s caixas da árvore de caixas orientadas, segundo a hierarquia de uma árvore binária parcial enraizada de $2r+1$ folhas adjacentes. Caso de $r=3$, curva cúbica de $n=32$ segmentos, a árvore binária composta por 63 caixas orientadas, sendo de altura $h=5$. O número total de caixas reconstruídas, s , é tal que $15 \leq s \leq 19$, que realmente é pouco em relação a todo.

4.2 Caso composto

Quando o deslocamento de $f_j(t)$ é propagado através das múltiplas resoluções de f , o número de segmentos que variam é maior que no caso básico, por tanto o parâmetro r é maior que o grau de f . Isso implica que o número de vértices da respectiva árvore binária parcial enraizada é maior que no caso básico, porém menor que o número total dos vértices da árvore binária associada ao objeto definido por f .

5. INTERFERÊNCIAS

A variação de s segmentos como consequência do deslocamento, com o mouse, de um único ponto do contorno, pode ocasionar a interpenetração de algum de esses segmentos com os outros segmentos não adjacentes do

contorno. Se o deslocamento for para interior no objeto, podem acontecer três possíveis casos: sem interpenetração, interpenetração direta, e interpenetração indireta. A Figura 4 mostra esses três possíveis casos.

A interpenetração direta é a penetração do ponto arrastado no segmento oposto ao deslocamento. Em forma geral, pode ocorrer a interpenetrações indiretas, quando o contorno do objeto é irregular, sendo possível a interpenetração de qualquer segmento que está em variação com outros segmentos estáticos não adjacentes do contorno.

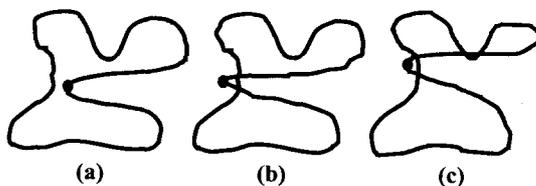


Figura 4: Casos de interpenetração: (a) não interpenetra; (b) interpenetração direta; (c) interpenetração indireta.

5.1 Detecção de auto-interferências

Cada caixa básica das folhas da árvore R são verificadas as interferências respeito às sub-árvores de G . Se houver interferências das caixas, imediatamente são testadas numericamente o contato entre os segmentos básicos respectivos.

Seja V_R o conjunto das q folhas da árvore binária parcial enraizada R , e V o conjunto dos vértices da árvore binária G . Cada $v_i^R \in V_R$ é testada com os elementos de V , exceto a raiz e elementos de V_R , segundo a estrutura binária de caixas orientadas, de raiz às folhas ([Rivera+ 2003]). O processo de verificação de interferências para v_i^R é feita enquanto existir interseção entre as caixas testadas, passando aos seus sucessores em G .

Duas caixas são consideradas não interceptantes se existir uma reta que as

separa. No plano, as possíveis retas separadoras são colineares às arestas de uma das caixas ([Rivera+ 2003]), sendo testados quatro casos, como máximo, se as caixas forem separadas. Uma verificação simples da existência da reta separadora de duas caixas é feita comparando a interseção dos segmentos, que são as projeções das caixas respectivas sobre a reta perpendicular à possível reta separadora. Os dois segmentos não interceptam se a distância entre seus centróides é maior que a semi-soma dos comprimentos dos dois segmentos.

Diz-se que dois segmentos estão em possível interferência se existe a interseção de suas respectivas caixas básicas. Então, se v_i^R interfere com $v_j^R \in V$, é possível que o segmento f_i está interceptando com o segmento f_j . Aqui podem ser observadas duas situações dos segmentos: afastados ou interpenetrados. A Figura 5 mostra as duas possibilidades.

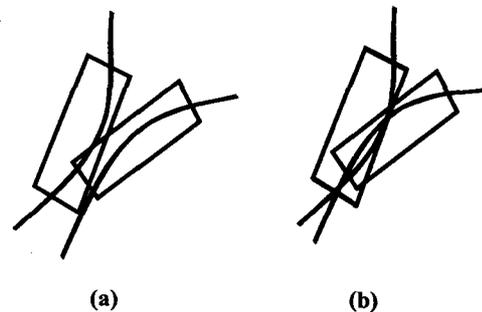


Figura 5: Casos possíveis de segmentos: (a) afastados; (b) interpenetrados.

5.2 Análise de interferências

As duas situações de segmentos, cujas caixas estão em interferência, são analisadas numericamente. Neste caso, não se está interessado em determinar o ponto exato de contato; por tanto não serão gerados os sub-passos de tempo para a convergência nos pontos de contato, tal como ocorre na simulação e animações baseada em física [Rivera+ 2000b]. Será apenas detectado um caso de interpenetração entre os segmentos, e ignorar esse passo que ocasionou a interpenetração. Com essa restrição, o efeito do ponto $f_p(x)$ arrastando se separa do indicador

do mouse, porque não pode continuar se deslocando devido à restrição de não interpenetração dos segmentos. Se não houver nenhuma interpenetração dos segmentos, o processo de deslocamento do ponto continua. Retomar a configuração anterior à interpenetração implica que deve haver um mecanismo de guardar um backup do estado dos elementos associados à árvore R antes do início do passo de deslocamento que gerou a interpenetração.

A análise numérica de interferências é realizada localmente entre os segmentos f_s e f_q envolvidas pelas caixas básicas em interferência. Em outras palavras, verifica-se a existência de interseção dos segmentos $f_s(x)$ e $f_q(y)$ para $0 \leq x, y < 1$. Caso exista a interseção, há interferência dos segmentos, caso contrário verifica-se a interseção dos segmentos do próximo par de caixas que interferem se houver mais.

6. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

A forma de geração dos objetos de contornos com detalhes reais é o objetivo de um aplicativo ideal no CAD, CAGM. Neste trabalho, viu-se a necessidade de formular um método que se aproxima a esse aplicativo ideal, claro que ainda existem deficiências que serão resolvidas nos próximos trabalhos.

A Manipulação direta de segmentos arbitrários do contorno de um objeto é facilmente controlada pela distribuição das deformações a través de suas representações inferiores de resolução, embora de aparência pesada, que é simplificada com o uso de programas prontos de transformações em multiresolução do objeto, para permitir o realismo das deformações, que combinado com a detecção de auto-interferências de seus segmentos em deformação, passa a ser uma ferramenta poderosa para o usuário do aplicativo de design de objetos geométricos.

Como trabalhos futuros consideram-se a extensão do método abordado para outros tipos de curvas, sua generalização para objetos definidos por superfícies splines.

BIBLIOGRAFIA

- [Bartels+ 1989] Bartels, R.; Beatty, J., A Technique for the Direct Manipulation of Spline Curves. *Proceedings of Graphics Interface*, 33-39, (1989).
- [Dinesh+ 1997] Dinesh, K. P.; Reissell, L. M., Haptic Interaction with Multiresolution Image Curves. *Computer & Graphics*, Vol. 21, No. 4, 405-411. (1997).
- [Farin 1990] Farin, G., Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A practical guide. *Academic Press Inc.* (1990).
- [Finkelstein+ 1994] Finkelstein, A.; Salesin, D., Multiresolution Curves. *Computer Graphics Proceedings, SIGGRAPH'94*, 261-268. (1994).
- [Forshey+ 1988] Forshey, D; Bartels, R., Hierarchical B-spline Refinement. *Computer Graphics Proceedings SIGGRAPH'88*, 205-212. (1988).
- [Fowler 1993] Fowler, B., Geometric Manipulation of Tensor Product Surfaces. *Computer Graphics*, 22(4), 101-108. (1993).
- [Fowler+ 1993] Fowler, B.; Bartels, R. Constraint Based Curve Manipulation. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 13(5), 43-49. (1993).
- [Gomes 1998] Gomes, J. Velho, L. From Fourier Analysis to Wavelets. *Course Notes, SIGGRAPH.* (1998).
- [Gottschalk+ 1996] Gottschalk, S.; Lin, M.; Manocha, D. OBBtree: A Hierarchical Structure for Rapid Interference Detection. *Computer Graphics Proceedings, SIGGRAPH'96*, 171-180. (1996).
- [Grinspun+ 2001] Grinspun, E.; Schroder, P. Normal Bounds for Subdivision-Surface Interference Detection. *Proceedings of IEEE Scientific Visualization.* (2001).
- [Guan+ 1997] Guan, Z.; Ling, J.; Tao, N.; Ping, X.; Rongxi, T. Study and Application of Physics-Based Deformable Curves and Surfaces. *Computer & Graphics*, 21(3), 305-313. (1997).
- [Hahn 1996] Hahn, J. Realistic Animation of Rigid Bodies. *Computer Graphics*, 24(4), 299-308. (1996).

- [Hubbard 1995] Hubbard, P. Collision Detection for Interactive Graphics Application. PhD. Thesis, *Department of Computer Science*, Brown University, Berkeley. (1995).
- [Kamat 1993] Kamat, V.V. A Survey of Techniques for Simulation of Dynamic Collision Detection and Response. *Computer & Graphics*, 17(4), 379-385. (1993).
- [Lin 1993] Lin, M. Efficient Collision Detection for Animation and Robotics. PhD. Thesis, *Department of Electrical Engineering and Computer Science*, University of California, Berkeley. (1993).
- [Lyche 1987] Lyche, T., Morken, K. Knot Removal for Parametric B-spline Curves and Surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 4(3), 217-231. (1987).
- [Piegl 1995] Piegl, L., Tiller, W. The NURBS Book. *Springer Editions*. (1995).
- [Rivera+ 1999] Rivera, L., Carvalho, P.C., Velho, L. Interactive Manipulation of Multiresolution Curves. *Proceedings on Computer Graphics and Imaging (CGIM'99)*, 25-27. (1999).
- [Rivera 2000] Rivera, L. Animação Baseada em Física com Modelos Geométricos em Multi-Resolução. PhD Thesis, *Departamento de Informática*, Pontifícia Universidade Católica (PUC-Rio). (2000).
- [Rivera+ 2000a] Rivera, L., Carvalho, P.C., Velho, L. Free Deformation of Multiresolution B-splines Curves. *PESQUIMAT-Revista UNMSM*, Lima-Peru, Vol. III, N.1, 65-79. (2000).
- [Rivera+ 2000b] Rivera, L., Carvalho, P.C., Velho, L. Animation Based in Dynamic Simulation Involving Irregular Objects with Non-Homogeneous Roughness. *ACM-Proceedings of Computer Animation*, 128-135. (2000).
- [Rivera+ 2003] Rivera, L.; Carvalho, P.C.; Velho, L. Oriented Bounding Boxes Based on Multiresolution Contours. *I Congreso Internacional de Científicos Peruanos*, (2003).
- [Rogers+ 1990] Rogers, D.; Adams, J. *Mathematical Elements for Computer Graphics*, McGraw-Hill International Ed. (1990).
- [Takahashi 1998] Takahashi, S. Variational Design of Curves and Surfaces Using Multiresolution Constrains. *The Visual Computer*, 14(5/6), 208-227. (1998).
- [Takahashi+ 1998] Takahashi, S.; Shinagawa, Y.; Kunii, T. Continuous-Resolution-Level Constrains Variational Design of Multiresolution Shapes. *The Visual Computer*, 14(4), 177-192. (1998).
- [Wesselink 1996] Wesselink, W. Variational Modeling of Curves. PhD Thesis, *Department of Computer Science*, Eindhoven University of Technology. (1996).
- [Welch 1995] Welch, W. Serious Putty: Topological Design for Variational Curves and Surfaces. PhD Thesis, *Department of Computer Science*, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, USA. (1995).