Tesis, 10(11), 2017, 127-142

Un tratamiento algebraico de la Lógica proposicional

An algebraic treatment of propositional logic

Miguel Ángel Merma Mora
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
miguelangelmerma@gmail.com

Resumen

Se traduce el lenguaje lógico proposicional a un lenguaje algebraico. Para ello establece dos correspondencias fundamentales, la que existe entre la verdad (V) y el cero (0) y la que relaciona la falsedad (F) con el uno (1). Estas correspondencias establecen el equivalente algebraico de cada uno de los operadores de la lógica proposicional y, a su vez, permiten reducir por medios algebraicos cualquier fórmula de lógica proposicional. Si la fórmula en cuestión es tautológica, su versión algebraica es reductible a 0; si la fórmula es contradictoria, su versión algebraica es reductible a 1 y si la fórmula es contingente, su versión algebraica no se reduce ni a 0 ni a 1, sino a una expresión de menor extensión que admite entre los valores de su matriz algebraica por lo menos un 0 y por lo menos un 1.

Palabras Clave: Lógica proposicional, interpretación algebraica, álgebra de Boole, reducción algebraica.

Abstract

Propositional logical language is translated into algebraic language. For this it establishes two fundamental correspondences, that exists between the truth (V) and the zero (0) and that which relates the falsehood (F) with the one (1). These correspondences establish the algebraic equivalent of each one of the operators of the propositional logic and, in turn, allow to reduce by algebraic means any formula of propositional logic. If the formula in question is tautological, its algebraic version is reductible to 0; If the formula is contradictory, its algebraic version is reductible to 1 and if the formula is contingent, its algebraic version is not reduced to 0 or to 1, but to an expression of smaller extension that admits between the values of its algebraic matrix at least a 0 and at least A 1.

Keywords: Propositional logic, algebraic interpretation, Boolean algebra, algebraic reduction.

Un tratamiento algebraico de la Lógica proposicional

Introducción

Hay una buena cantidad de trabajos que, siguiendo la dirección del proyecto logicista, formulan interpretaciones lógicas de la matemática, pero hay pocos que siguen el camino inverso. Los estudios de lógica en nuestro medio han seguido, mayoritariamente, la tradición de Frege y Russell, por lo cual no hay muchos trabajos que se inscriban en la tradición algebrista de la lógica inaugurada por George Boole y desarrollada, entre otros, por Löwenheim, Schröder y Adolf Lindenbaum. Este artículo pertenece al universo de esta segunda tradición.

Se establecerá la posibilidad de abordar la lógica proposicional en términos matemáticos, específicamente algebraicos. Se sostendrá que es viable un tratamiento algebraico de la lógica proposicional haciendo uso de un sistema posicional binario construible sobre la base de definiciones adecuadas. Conseguiremos nuestro objetivo definiendo algebraicamente dos operadores lógicos; la negación y la disyunción. Tales operadores de la lógica proposicional aplican sobre variables proposicionales, las cuales poseen valores de verdad. En el tratamiento algebraico que se propone, la negación y la disyunción se interpretan como operaciones algebraicas sobre variables numéricas bivalentes que pueden asumir el 0 o el 1 en lugar de la verdad (V) y la falsedad (F) respectivamente.

Este artículo se circunscribe principalmente en el ámbito de la filosofía de la lógica y del metaanálisis lógico, en la medida en que se efectúa una exploración metalógica. El método empleado aplica procedimientos hipotético-deductivos al análisis del lenguaje formal de la lógica proposicional estándar. Esta metodología permite caracterizar aspectos sintácticos y semánticos de la lógica proposicional al dotarla de una interpretación no estándar de tipo algebraico.

1. La traducción del lenguaje lógico proposicional a un lenguaje algebraico

Empezaremos estableciendo una correspondencia entre la tabla de verdad de la proposición compuesta **¬p** y la tabla numérica de la expresión algebraica **(1 − p)**, siempre que **p** solo pueda asumir los valores 0 o 1.

La negación: ¬p ≡ (1 − p)

Tabla 1.1.

p	¬p
V	F
F	V

Tabla 1.2.

p	(1 − p)	(1 − p)
0	1 − 0	1
1	1 − 0	0

Si le asignamos el valor 0 a la variable **p**, entonces, el equivalente algebraico de su negación adopta el valor 1 y si la variable **p** asume el valor 1, el equivalente algebraico de su negación adopta el valor 0. De esto se desprende que la proposición **¬p** equivale, en la interpretación algebraica, a **(1 − p)**.

Por otra parte, estableceremos la correspondencia entre la tabla de verdad de la proposición compuesta **p∨q** y la tabla numérica de la expresión algebraica **pq**, considerando siempre que **p** y **q** solo pueden asumir los valores 0 o 1.[1]

La disyunción inclusiva: (p∨q) ≡ pq

Tabla 1.3.

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 1.4.

p	q	p × q	pq
0	0	0 × 0	0
0	1	0 × 1	0
1	0	1 × 0	0
1	1	1 × 1	1

En el primer arreglo del cuadro de la derecha tenemos que ambas variables numéricas asumen el 0 como valor y que, en ese caso, el producto de **p** y **q** arroja 0. En el segundo arreglo tenemos que cuando **p** asume el valor 0 y **q** asume el valor 1, el producto también arroja 0. En el tercer arreglo tenemos que cuando **p** asume el valor 1 y **q** asume el valor 0, el producto nuevamente arroja 0. Finalmente, en el cuarto arreglo tenemos que cuando **p** y **q** asumen el valor 1, el producto esta vez arroja 1. De esto se desprende que la proposición compuesta **p**∨**q** equivale en la interpretación algebraica que proponemos al producto **pq**.

Sobre la base de la interpretación algebraica de estos dos operadores lógicos fundamentales se puede interpretar cualquier otro operador lógico en términos algebraicos. El procedimiento consiste en expresar los demás operadores en términos de disyunciones y negaciones.[2]

La conjunción: $(p \wedge q) \equiv (p + q - pq)$

1.	$p \wedge q$	
2.	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	De Morgan en 1
3.	$1 - (1 - p)(1 - q)$	Interpret. algebraica en 2
4.	$1 - (1 - q - p - pq)$	Producto de binomios en 3
5.	$1 \; - 1 + q + p \; - pq$	Introducción del signo negativo en 4
6.	$q + p - pq$	Diferencia en 5
7.	$p + q - pq$	Conmutatividad de la adición en 6

El condicional: $(p \rightarrow q) \equiv (1 - p)q$

1.	$p \rightarrow q$	
2.	$\neg p \vee q$	Definición de condicional en 1
3.	$(1 - p)q$	Interpret. algebraica en 2

El bicondicional: $(p \leftrightarrow q) \equiv (p + q - 2pq)$

En el caso del operador bicondicional necesitamos emplear algunas propiedades adicionales del lenguaje algebraico que estamos desarrollando. Como las variables numéricas **p**, **q**, **r**, **s**,… solo pueden asumir los valores numéricos 0 o 1, tenemos que, sin importar cuál de esos valores asuma una variable numérica cualquiera, siempre se cumple que:

Tabla 1.5.[3]

$p^2 = p$	$q^2 = q$	$r^2 = r$	$s^2 = s$	$\cdots$
$p^3 = p$	$q^3 = q$	$r^3 = r$	$s^3 = s$	$\cdots$
$p^4 = p$	$q^4 = q$	$r^4 = r$	$s^4 = s$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$

Utilizaremos estas propiedades adicionales para pasar de la línea 7 a la línea 8 del siguiente desarrollo:

1. $p \leftrightarrow q$
2. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ — Definición de bicondicional en 1
3. $\neg[\neg(p \rightarrow q) \vee \neg(q \rightarrow p)]$ — De Morgan en 2
4. $1 - [1 - (1 - p)q][1 - (1 - q)p]$ — Interpret. algebraica en 3
5. $1 - [1 - (q - pq)][1 - (p - qp)]$ — Distrib. del producto en 4
6. $1 - (1 - q + pq)(1 - p + pq)$ — Introduc. del signo negativo en 5
7. $1 - (1 - p + pq - q + pq - pq^2 + pq - p^2q + p^2q^2)$ — Multiplicación de factores en 6
8. $1 - (1 - p + pq - q + pq - pq + pq - pq + pq)$ — Propiedades adicionales en 7
9. $1 - (1 - p + pq - q + pq)$ — Diferencia en 8
10. $1 - 1 + p - pq + q - pq$ — Introduc. del signo negativo en 9
11. $p - pq + q - pq$ — Diferencia en 10
12. $p + q - 2pq$ — Conmutatividad de la adic. en 11

La disyunción exclusiva: $(p \nleftrightarrow q) \equiv 1 - (p + q - 2pq)$

1. $p \nleftrightarrow q$
2. $\neg(p \leftrightarrow q)$ — Definición de disyunción exclusiva en 1
3. $1 - (p + q - 2pq)$ — Interpretación algebraica en 2

El operador de Nicod: $(p \,/\, q) \equiv (1 - p)(1 - q)$

1. $p \,/\, q$
2. $\neg(p \wedge q)$ Definición del operador de Nicod en 1
3. $\neg p \vee \neg q$ De Morgan en 2
4. $(1 - p)(1 - q)$ Interpret. algebraica en 3

El operador daga: $(p \downarrow q) \equiv (1 - pq)$

1. $p \downarrow q$
2. $\neg(p \vee q)$ Definición del operador daga en 1
3. $(1 - pq)$ Interpretación algebraica en 2

En resumen, establecemos la representación algebraica de los operadores más conocidos de la lógica proposicional en el cuadro siguiente:

Tabla 1.6.

Operadores de la lógica proposicional	Expresiones algebraicas equivalentes
$\neg p$	$(1 - p)$
$p \vee q$	pq
$p \wedge q$	$(p + q - pq)$
$p \rightarrow q$	$(1 - p)q$
$p \leftrightarrow q$	$(p + q - 2pq)$
$p \not\leftrightarrow q$	$1 - (p + q - 2pq)$
$p \,/\, q$	$(1 - p)(1 - q)$
$p \downarrow q$	$(1 - pq)$

La interpretación algebraica que desarrollamos es un álgebra de Boole y, más específicamente, un álgebra de Lindenbaum cuya forma es $<$ **L/equiv,** $\sqcup$, $\sqcap$, $\complement$,0,1 $>$, donde **0** y **1** son los individuos, $\sqcup$ y $\sqcap$ son operaciones binarias y $\complement$ es una operación unaria.[4] En nuestra interpretación, $\sqcup$ es la conjunción, $\sqcup$ es la disyunción inclusiva y $\complement$ es la negación, debido a que asociamos la verdad con el 0 y la falsedad con el 1. Nuestro sistema es un álgebra de Lindenbaum y por consiguiente un álgebra de Boole, ya que cumple los axiomas que debe satisfacer todo álgebra de Boole:[5]

$x \sqcup y = y \sqcup x$ $\quad$ $x \sqcap y = y \sqcap x$ $\quad$ $x \sqcup \complement x = 1$ $\quad$ $x \sqcap \complement x = 0$

$x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$ $\quad$ $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$ $\quad$ $x \sqcup 0 = x$ $\quad$ $x \sqcap 1 = x$

$x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$ $\quad$ $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$.

2. La reducción algebraica de las fórmulas del cálculo proposicional

En nuestra interpretación algebraica, las tautologías se reducen a cero, puesto que la verdad está asociada con el cero como una de las bases de la interpretación y si una fórmula de lógica proposicional es verdadera en todos los arreglos posibles, entonces es igual a cero en todos los arreglos de nuestra interpretación algebraica.[6]

En el caso de las contradicciones, tendremos expresiones algebraicas reductibles a uno. Esta reducción es posible, puesto que la falsedad está asociada con el uno como una de las bases de nuestra interpretación y si una fórmula es falsa en todos los arreglos posibles, entonces es igual a uno en todos los arreglos de nuestra interpretación algebraica.[7]

Finalmente, las fórmulas contingentes no se reducen ni a cero ni a uno en nuestra interpretación. Esta clase de fórmulas se reducen a expresiones algebraicas de menor extensión que tienen por lo menos un cero y por lo menos un uno en su matriz.

2.1. Ejemplos de reducción algebraica de fórmulas tautológicas

2.1.1. Modus ponens: $[(p \to q) \wedge p] \to q$

Tabla 2.1.1.

p	q	$[(p \to q) \wedge p] \to q$
0	0	0 0 0 0 0 0 0
0	1	0 1 1 1 0 0 1
1	0	1 0 0 1 1 0 0
1	1	1 0 1 1 1 0 1

1.	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$	
2.	$\neg[(p \rightarrow q) \wedge p] \vee q$	Definición de condicional en 1
3.	$[\neg(p \rightarrow q) \vee \neg p] \vee q$	De Morgan en 2
4.	$\neg(p \rightarrow q) \vee \neg p \vee q$	Asociatividad en 3
5.	$[1-(1-p)q](1-p)q$	Interpret. algebraica en 4[8]
6.	$(1-p)q-(1-p)^2q^2$	Distribución del producto en 5
7.	$q-pq-(1^2-2p+p^2)q^2$	Distribución del producto y binomio al cuadrado en 6
8.	$q-pq-(1-2p+p)q^2$	Propiedad adicional del sistema algebraico en 7
9.	$q-pq-(1-p)q^2$	Propiedad aritmética en 8
10.	$q-pq-(q^2-pq^2)$	Distribución del producto en 9
11.	$q-pq-(q-pq)$	Propiedad adicional del sistema algebraico en 10
12.	$q-pq-q+pq$	Propiedad aritmética en 11
13.	0	Propiedad aritmética en 12

2.1.2. Silogismo hipotético: $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

Tabla 2.1.2.

p	q	r	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$		
0	0	0	0 0 0 0 0 0 0	0	0 0 0
0	0	1	0 0 0 1 0 1 1	0	0 1 1
0	1	0	0 1 1 1 1 0 0	0	0 0 0
0	1	1	0 1 1 1 1 0 1	0	0 1 1
1	0	0	1 0 0 0 0 0 0	0	1 0 0
1	0	1	1 0 0 1 0 1 1	0	1 0 1
1	1	0	1 0 1 0 1 0 0	0	1 0 0
1	1	1	1 0 1 0 1 0 1	0	1 0 1

1.	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$	
2.	$\neg[(p \to q) \wedge (q \to r)] \vee (p \to r)$	Definición de condicional en 1
3.	$[\neg(p \to q) \vee \neg(q \to r)] \vee (p \to r)$	De Morgan en 2
4.	$\neg(p \to q) \vee \neg(q \to r) \vee (p \to r)$	Asociatividad en 3
5.	$[1-(1-p)q][1-(1-q)r]\,(1-p)r$	Interpret. algebraica en 4
6.	$[1-(1-p)q][1-(1-q)r]\ \ r\,(1-p)$	Conmutatividad en 5
7.	$[1-(1-p)q][r-(1-q)r^2](1-p)$	Distribución del producto en 6
8.	$[1-(1-p)q][r-(1-q)r](1-p)$	Propiedad adic. del sistema algebr. en 7
9.	$[1-(1-p)q][r-(r-rq)](1-p)$	Distribución del producto en 8
10.	$[1-(1-p)q][r-r+rq](1-p)$	Propiedad aritmética en 9
11.	$[1-(1-p)q]\ \ rq(1-p)$	Propiedad aritmética en 10
12.	$[1-(1-p)q](1-p)qr$	Conmutatividad en 11
13.	0	Reducción a cero en 12

Se puede apreciar que, en nuestra interpretación algebraica, el silogismo hipotético es un múltiplo del modus ponens. Este último se representa algebraicamente como $[1-(1-p)q](1-p)q$ mientras que el silogismo hipotético se representa algebraicamente como $[1-(1-p)q](1-p)qr$.

En vista de que en el ejemplo anterior pudimos probar que la expresión algebraica $[1-(1-p)q](1-p)q$ es reductible a cero, ya sabemos con certeza que la expresión algebraica $[1-(1-p)q](1-p)qr$ también es reductible a cero, puesto que es un múltiplo de la expresión anterior.

2.1.3. Dilema constructivo: $[(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \vee r)] \to (q \vee s)$

Tabla 2.1.3.

p	q	r	s	$\{[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \wedge (p \vee r)\} \rightarrow (q \vee s)$[9]		
0	0	0	0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0	0 0 0
0	0	0	1	0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0	0	0 0 1
0	0	1	0	0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1	0	0 0 0
0	0	1	1	0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1	0	0 0 1
0	1	0	0	0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0	0	1 0 0
0	1	0	1	0 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0	0	1 1 1
0	1	1	0	0 1 1 1 1 0 0 1 0 0 1	0	1 0 0
0	1	1	1	0 1 1 1 1 0 1 1 0 0 1	0	1 1 1
1	0	0	0	1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0	0	0 0 0
1	0	0	1	1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 0	0	0 0 1
1	0	1	0	1 0 0 0 1 0 0 1 1 1 1	0	0 0 0
1	0	1	1	1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1	0	0 0 1
1	1	0	0	1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0	0	1 0 0
1	1	0	1	1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0	0	1 1 1
1	1	1	0	1 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1	0	1 0 0
1	1	1	1	1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1	0	1 1 1

1. $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (q \vee s)$
2. $\neg[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \vee (q \vee s)$ Definición de condicional en 1
3. $[\neg(p \rightarrow q) \vee \neg(r \rightarrow s) \vee \neg(p \vee r)] \vee (q \vee s)$ De Morgan en 2
4. $\neg(p \rightarrow q) \vee \neg(r \rightarrow s) \vee \neg(p \vee r) \vee (q \vee s)$ Asociatividad en 3
5. $[1 - (1 - p)q][1 - (1 - r)s]\,(1 - pr)qs$ Interpret. algebraica en 4
6. $[1 - (1 - p)q][1 - (1 - r)s]\;s\,(1 - pr)q$ Conmutatividad en 5
7. $[1 - (1 - p)q][s - (1 - r)s^2](1 - pr)q$ Distribución del producto en 6
8. $[1 - (1 - p)q][s - (1 - r)s](1 - pr)q$ Propiedad adic. del sistema algebr. en 7
9. $[1 - (1 - p)q][s - (s - rs)](1 - pr)q$ Distribución del producto en 8

10. $[1-(1-p)q][s-s+rs](1-pr)q$	Propiedad aritmética en 9
11. $[1-(1-p)q]\ rs\,(1-pr)q$	Propiedad aritmética en 10
12. $[1-(1-p)q]\ r\,(1-pr)qs$	Conmutatividad en 11
13. $[1-(1-p)q](r-pr^2)qs$	Distribución del producto en 12
14. $[1-(1-p)q](r-pr)qs$	Propiedad adic. del sistema algebr. en 13
15. $[1-(1-p)q]\ r\,(1-p)qs$	Factorización en 14
16. $[1-(1-p)q](1-p)qrs$	Conmutatividad en 15
17. 0	Reducción a cero en 16

El dilema constructivo también es un múltiplo del modus ponens. Este último se representa algebraicamente como $[1-(1-p)q](1-p)q$ mientras que el dilema constructivo se representa algebraicamente como $[1-(1-p)q](1-p)qrs$.

2.2. Ejemplos de reducción algebraica de fórmulas contradictorias

2.2.1. $p \wedge \neg p$

Tabla 2.2.1.

p	p ∧ ¬p
0	0 1 1
1	1 1 0

1. $p \wedge \neg p$[10]	
2. $\neg(\neg p \vee p)$	De Morgan en 1
3. $1-(1-p)p$[11]	Interpretación algebraica en 2
4. $1-(p-p^2)$	Distribución del producto en 3
5. $1-(p-p)$	Propiedad adic. del sistema algebr. en 4
6. $1-0$	Propiedad aritmética en 5
7. 1	Propiedad aritmética en 6

2.2.2. $(\neg p \vee q) \wedge (p \wedge \neg q)$

Tabla 2.2.2.

p	q	$(\neg p \ \vee q) \ \wedge (p \ \wedge \neg q)$
0	0	1 0 0 1 0 1 1
0	1	1 1 1 1 0 0 0
1	0	0 0 0 1 1 1 1
1	1	0 0 1 1 1 1 0

1. $(\neg p \vee q) \wedge (p \wedge \neg q)$[12]
2. $(\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg p \vee q)$ De Morgan en 1
3. $\neg[\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee q)]$ De Morgan en 2
4. $1 - [1 - (1 - p)q]\ (1 - p)q$[13] Interpretación algebraica en 3
5. $1 - [(1 - p)q - (1 - p)^2q^2]$ Distribución del producto en 4
6. $1 - [(1 - p)q - (1^2 - 2p + p^2)q^2]$ Binomio al cuadrado en 5
7. $1 - [(1 - p)q - (1 - 2p + p)q]$ Propiedad adic. del sistema algebr. en 6
8. $1 - [q - pq - (q - 2pq + pq)]$ Distrib. del prod. en 7
9. $1 - [q - pq - q + 2pq - pq]$ Propiedad aritmética en 8
10. $1 - [q - q - pq - pq + 2pq]$ Conmutatividad de la adición en 9
11. $1 - [\,-2pq + 2pq]$ Propiedad aritmética en 10
12. $1 - 0$ Propiedad aritmética en 11
13. 1 Propiedad aritmética en 12

2.3. Ejemplos de reducción algebraica de fórmulas contingentes

2.3.1 $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$

Tabla 2.3.1.a.

p	q	$[(p \to q) \wedge q] \to p$
0	0	0 0 0 0 0 0 0
0	1	0 1 1 1 1 0 0
1	0	1 0 0 0 0 1 1
1	1	1 0 1 1 1 0 1

1.	$[(p \to q) \wedge q] \to p$[14]	
2	$\neg[(p \to q) \wedge q] \vee p$	Def. de condic. en 1
3.	$[\neg(p \to q) \vee \neg q] \vee p$	De Morgan en 2
4.	$[\neg(\neg p \vee q) \vee \neg q] \vee p$	Def. de condic. en 3
5.	$\neg(\neg p \vee q) \vee \neg q \vee p$	Asociatividad en 4
6.	$[1-(1-p)q]\,(1-q)p$	Interpr. algebr. en 5
7.	$[(1-q)p-(1-p)\;q\,(1-q)p]$	Distr. del prod. en 6
8.	$[(1-q)p-(1-p)\;p\,(1-q)q]$	Conmutatividad en 7
9.	$[(1-q)p-(p-p^2)\,(q-q^2)]$	Distr. del prod. en 8
10.	$[(1-q)p-(p-p)\,(q-q)]$	Propiedad adic. del sistema algebr. en 9
11.	$[(1-q)p-(0)(0)]$	Propiedad aritmética en 10
12.	$(1-q)p$[15]	Propiedad aritmética en 11

q → p

Tabla 2.3.1.b.

p	q	$q \to p$
0	0	0 0 0
0	1	1 0 0
1	0	0 1 1
1	1	1 0 1

Conclusiones

Es posible abordar algebraicamente la lógica proposicional empleando para ello un sistema que use, convencionalmente, el 0 y el 1 en lugar de la verdad y la falsedad respectivamente, así como operaciones algebraicas en lugar de operadores lógicos.

El tratamiento algebraico propuesto prueba pedagógicamente que se puede convertir un lenguaje cualitativo, que emplea valores de verdad, en un lenguaje de medida, que emplea ceros y unos. Queda claro que los predicados cualitativo y métrico no son propiedades de los fenómenos estudiados, sino que son propiedades del lenguaje con que se describe tales fenómenos. La lógica proposicional ha sido descrita usualmente en términos cualitativos, mientras que el abordaje que proponemos en este artículo trata la lógica proposicional como una estructura algebraica.

El tratamiento algebraico que se presenta en este artículo constituye un algebra de la lógica proposicional o álgebra de Lindenbaum y, consecuentemente, un álgebra de Boole, ya que cumple cada uno de los axiomas que debe satisfacer toda estructura que sea un álgebra de Boole.

El lenguaje métrico desarrollado en este artículo pierde algunas características propias del lenguaje cualitativo convencional pero también muestra propiedades que no eran apreciables con el uso de este último. Un ejemplo de ello es la relación existente entre el modus ponens, el silogismo hipotético y el dilema constructivo. Algebraicamente, los dos últimos son múltiplos del modus ponens.

Notas

1 La expresión algebraica pq debe entenderse como el producto de p por q.

2 Según (Copi, 1979/1994: 277), el par de operadores (¬, ∨) provee una lógica funcional completa.

3 Esto se justifica en virtud de que tanto el cero como el uno elevados a cualquier potencia siguen siendo el mismo número.

4 El álgebra de Lindenbaum es una entrada del diccionario (Mosterín, J. y Torretti, R., 2010, p. 32).

5 Véase los axiomas que satisface todo álgebra de Boole en (Mosterín, J. y Torretti, R., 2010 pp. 29-30)

6 Cualquier fórmula del tipo $A \vee \neg A$ es igual a cero en nuestra interpretación algebraica.

7 Las fórmulas del tipo $A \wedge \neg A$ son iguales a uno en nuestra interpretación algebraica.

8 Aplicamos las equivalencias de la tabla 1.6. en la línea cuatro de la deducción.

9 Hemos introducido los signos de agrupación [ ] y { } en la fórmula del dilema constructivo para apreciar mejor la jerarquía de los operadores.

10 Esta es claramente una fórmula contradictoria, pues afirma y niega la misma proposición.

11 Una fórmula del tipo (1 – A)A es igual a cero, pues es el equivalente algebraico de una tautología.

12 Esta fórmula es contradictoria, ya que equivale a afirmar y negar la proposición condicional p → q.

13 A la derecha del operador de sustracción de mayor jerarquía hay una fórmula del tipo (1 – A)A.

14 Esta fórmula de lógica proposicional tiene una matriz contingente idéntica a la matriz de la fórmula q → p.

15 Esta fórmula final es el equivalente de q → p. Sus arreglos algebraicos figuran en la tabla 2.3.1.b. la cual tiene la misma matriz que 2.3.1.a.

Referencias

Ackermann, W. (1968). *Solvable cases of the decision problem*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

Ayer, A. (1971). *Lenguaje, verdad y lógica*. Barcelona: Ediciones Martínez Roca.

Bernays, P. (1926). Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalkuls der 'Principia Mathematica'. *Mathematische Zeitschrift, 25,* 305-20.

Boole, G. (1847). *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning*. Cambridge: Macmillan, Barclay & Macmillan.

Boole, G. (1848). The Calculus of Logic. *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 3, 183-98.

Boole, G. (1958). *An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. New York: Dover Publications.

Bunge, M. (2008). *Semántica I: Sentido y referencia*. Barcelona: Editorial Gedisa.

Cassini, A. (2006). *El juego de los principios: una introducción al método axiomático*. Buenos Aires: AZ ediciones.

Copi, I. M. (1979/1994). *Lógica simbólica* (12ª reimpresión). México DF: Compañía editorial continental.

Ferrater Mora, J. y Leblanc, H. (1962). *Lógica matemática* (2ª ed.). México DF: Fondo de Cultura Económica.

Gödel, K. (2006). "La suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden" publicado en sus *Obras Completas*. Madrid: Alianza Editorial, pp. 23-37.

González, P. M. (2006). *Platón y la Academia de Atenas*. Madrid: NIVOLA libros y ediciones.

Hilbert, D. y Bernays, P. (2011). *Foundations of mathematics I*. London: College publications.

Katz, J. (1971). *Filosofía del lenguaje*. Barcelona: Ediciones Martínez Roca.

Lightstone, A. (1964). *The axiomatic method: an introduction to mathematical logic*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Mendelson, E. (1963/1968). *Introduction to mathematical logic.* Princeton, New Jersey: D. van Nostrand Company, INC.

Merma, M. (2016). *Una interpretación algebraica de la lógica proposicional y de sus implicancias en fórmulas predicativas cerradas con cuantificadores*. Tesis de licenciatura. Lima: Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Mosterín, J. (2003). *Conceptos y teorías en la ciencia*. Madrid: Alianza Editorial.

Mosterín, J. y Torretti, R. (2010). *Diccionario de lógica y filosofía de la ciencia.* Madrid: Alianza Editorial.

Piscoya, L. (2007). *Lógica general* (3ª ed.). Lima: Fondo editorial Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Piscoya, L. (2009). *Tópicos en epistemología* (2ª ed.). Lima: Fondo editorial de la UIGV.

Quine, W. V. O. (1998). *Filosofía de la lógica*. Madrid: Alianza Editorial.

Suppes, P. (1970). *A probabilistic theory of causality*. Amsterdam: North-Holland publishing Company.

Suppes, P. (1974). *Introducción a la lógica simbólica*. México DF: Compañía editorial continental.

Suppes, P. (1988). *Estudios de filosofía y metodología de la ciencia*. Madrid: Alianza Universidad.

Wittgenstein, L. (2002). *Tractatus logico-philosophicus*. Madrid: Alianza Editorial.